


# Riassunto della lezione precedente

struttura generale di simmetria  
dello spettro di mesoni e barioni  
→ modello a quark costituenti

evidenza sperimentale di struttura  
elementare interna del protone  
→ modello a partoni

quark confinati  partoni quasi liberi

coupling che cambia con la scala di energia  
quale teoria ?

invarianza per gruppo abeliano di trasformazioni locali di gauge → QED

invarianza per gruppo non abeliano di trasformazioni locali di gauge → QCD



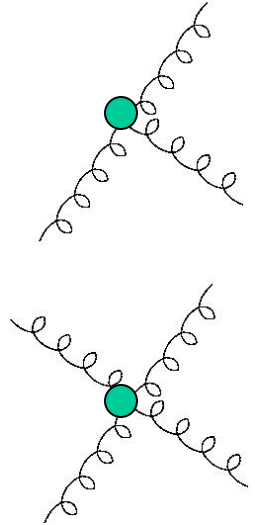
campi di gauge interagiscono con se stessi  
→ vertici trilineari e quadrilineari; conseguenze ?

## Peculiarità di teoria di gauge non abeliana

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu D_\mu - m] \psi(x) - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^i)^2$$

$$\left. \begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ [t^a, t^b] &= i f^{abc} t^c \end{aligned} \right\}$$

accoppiamenti  
trilineari e  
quadrilineari  
dettati dal  
gruppo  
di simmetria



Quali conseguenze?

Eq. di “Maxwell” per campi vettoriali

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QCD}}}{\partial A_\mu^a} = \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QCD}}}{\partial \partial_\nu A_\mu^a} \longrightarrow \partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A^{\mu b} F_{\mu\nu}^c = -g \bar{\psi} \gamma_\nu t^a \psi$$



per  $\nu = 0$  analogo della legge di Gauss per carica di colore a distribuita  
con densità  $\rho^a$  che genera un campo elettrico  $E_i^a = F_{0i}^a$

$$\partial_i E_i^a = g \rho^a + g f^{abc} A_i^b E_i^c$$



densità di carica puntiforme di colore a =1

$$\partial_i E_i^1 = g \delta(\vec{x}) \delta_{a1} \quad A_i^2$$

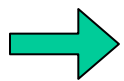
fluttuazione  
di vuoto

$$\partial_i E_i^3 = g f^{321} A_i^2 E_i^1$$

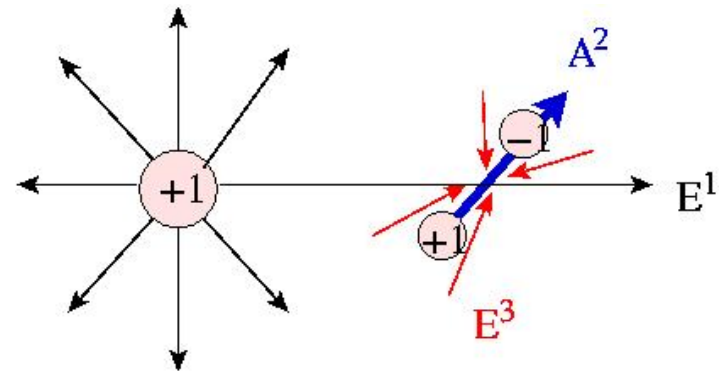
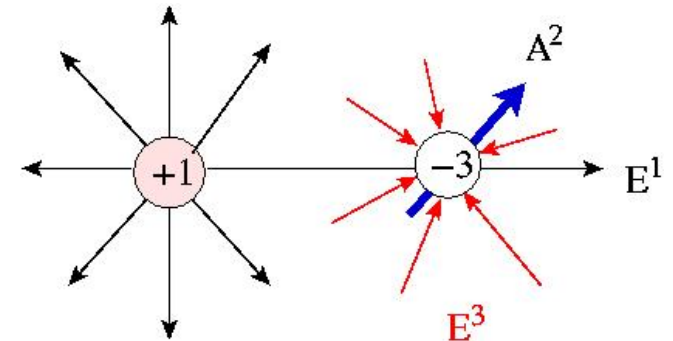
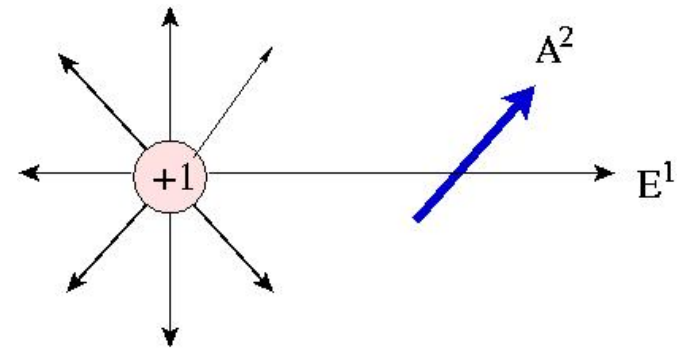
“risucchio” del campo  $E^3$

$$\partial_i E_i^1 = g \delta(\vec{x}) \delta_{a1} + g f^{123} A_i^2 E_i^3$$

$$\left. \begin{array}{l} > 0 \quad \vec{A}^2 \parallel \vec{E}^3 \\ < 0 \quad \vec{A}^2 \parallel^{-1} \vec{E}^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dipolo di carica } a=1 \\ \text{orientato verso} \\ \text{sorgente} \end{array}$$



allontanandosi dalla sorgente si vede  
carica a =1 più forte → antiscreening



# QED

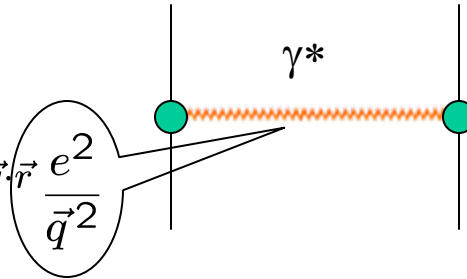
parallelo

# QCD

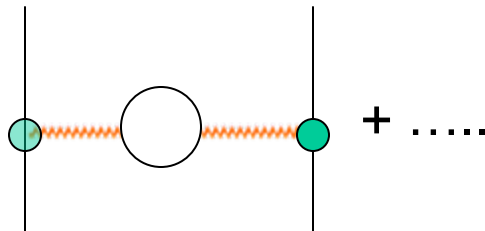
potenziale Coulombiano

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{|\vec{r}|}$$

$$= \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{\vec{q}^2}$$



correzioni  
perturbative



non separabili sperimentalmente

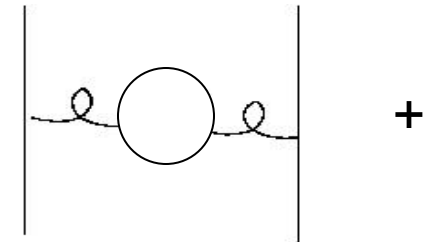
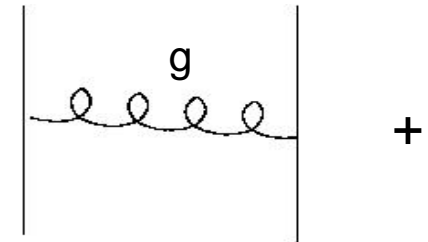
→ chi è  $V(\mathbf{r})$  ? Chi è  $e$  ?

Alla scala  $\mathbf{q}_0$  definisco  $\hat{V}(\vec{q}_0) \doteq \frac{e^2}{\vec{q}_0^2}$

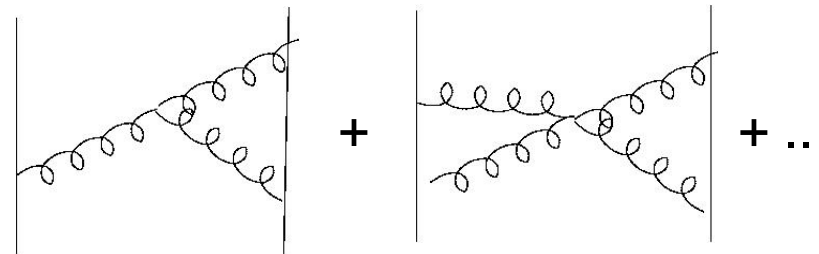
→  $e^2(\vec{q}^2)$

screening

potenziale di colore



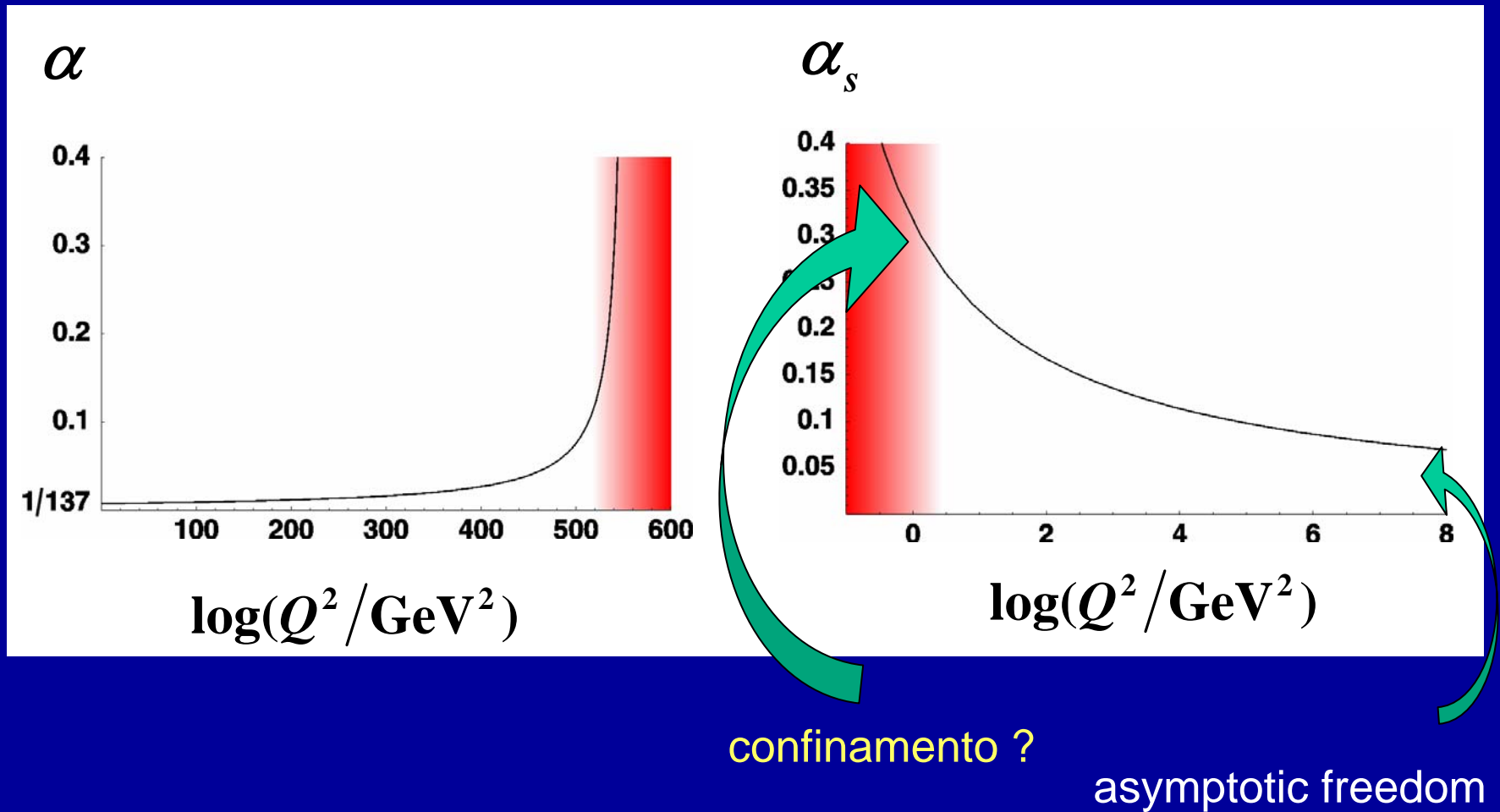
screening



antiscreening (>>)

QED  $\rightarrow$  screening

QCD  $\rightarrow$  screening + antiscreening ( $>>$ )



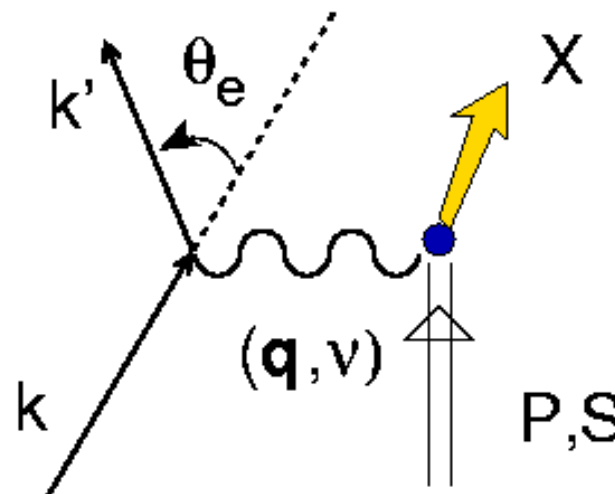
correzioni di potenze	correzioni pQCD	1	$\log \alpha_s$	$\log^2 \alpha_s$	...
1		QPM	→	IQPM	→
1/Q					
1/Q <sup>2</sup>					
1/Q <sup>3</sup>					
...					

Diffusione	leptone	--	adrone
	(elettrone, neutrino, muone)		(nucleone, nucleo, fotone)

- Quantum ElectroDynamics (QED) nota ad ogni ordine
- sonda leptonica esplora tutto il volume del bersaglio
- $\alpha_{em} \sim$  costante struttura fine piccola  $\rightarrow$  sviluppo perturbativo possibile
- approssimazione di Born (scambio di un fotone solo) e` accettabile
- fotone virtuale ( $\gamma^*$ ): ( $\mathbf{q}$ ,  $\nu$ ) indipendenti, risposta longitudinale e trasversa rispetto alla polarizzazione di  $\gamma^*$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

prototipo  
e+p  $\rightarrow$  e'+X



3 vettori indipendenti  
 $k, k', P$   
+ lo spin  $S$   
 $\theta_e$  angolo di diffusione

# definizioni e cinematica

$e^-$  ultrarelativistico  $m_e \ll |\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|$

Target Rest Frame (TRF)

$$P = (M, \mathbf{0})$$

$$k = (\sqrt{m_e^2 + |\mathbf{k}|^2}, 0, 0, |\mathbf{k}|) \\ \sim (E, 0, 0, E)$$

$$k' = (\sqrt{m_e^2 + |\mathbf{k}'|^2}, |\mathbf{k}'| \sin \theta_e, 0, |\mathbf{k}'| \cos \theta_e) \\ \sim (E', E' \sin \theta_e, 0, E' \cos \theta_e)$$

$$q = k - k' = (E - E', \mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Invarianti cinematici

$$P^2 = M^2 \quad ; \quad S^2 = 1 \quad ; \quad P \cdot S = 0$$

$$k^2 = k'^2 = m_e^2 \sim 0$$

$$q^2 \sim -2EE'(1 - \cos \theta_e) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \leq 0$$

$$\implies Q^2 \equiv -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \geq 0$$



## Invarianti cinematici (continua)

$$\nu = \frac{P \cdot q}{M} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{M(E - E')}{M} = E - E' \quad \text{energia trasferita}$$

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{M(E - E')}{ME} = \frac{E - E'}{E} \quad \text{frazione di energia trasferita}$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$x_B = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{Q^2}{2M\nu}$$

$$0 \leq x_B \leq 1$$

limite elastico

limite anelastico

massa invariante finale

$$W = (P + q)^2 = M^2 + Q^2 \left( \frac{1}{x_B} - 1 \right) \geq M^2$$

Scelta alternativa : 3 vettori indipendenti  $P, (k+k'), (k-k') \equiv q$

Invarianti :  $P^2 = M^2 ; (k-k')^2 = q^2 \equiv -Q^2 ; (k+k')^2 \sim Q^2$

$$P \cdot q \stackrel{\text{TRF}}{=} M\nu$$

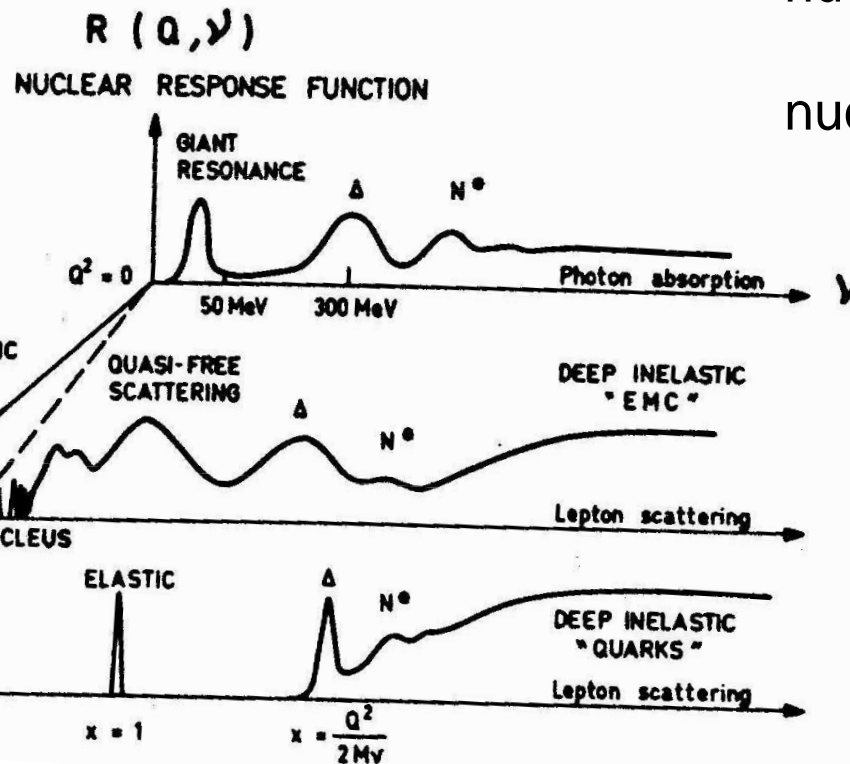
$$P \cdot (k + k') = 2P \cdot k - P \cdot q \stackrel{\text{TRF}}{=} \left(\frac{2}{y} - 1\right) M\nu$$

$Q$  e' la "lente di ingrandimento"

$Q$ [GeV]	$\lambda \sim 1/Q$ [fm]	bersaglio
0.02	10	nuclei
0.1	2	
0.2	1	mesoni / barioni
1	0.2	partoni
.....	.....	??

N.B.  $1 \text{ fm} = (200 \text{ MeV})^{-1}$

Frois, Nucl. Phys. **A434** ('85) 57c



$$\begin{aligned} \text{nucleo } M_A \quad x_A &= \frac{Q^2}{2M_A \nu} \\ \text{nucleone } M \quad x_B &= \frac{Q^2}{2M \nu} \end{aligned}$$

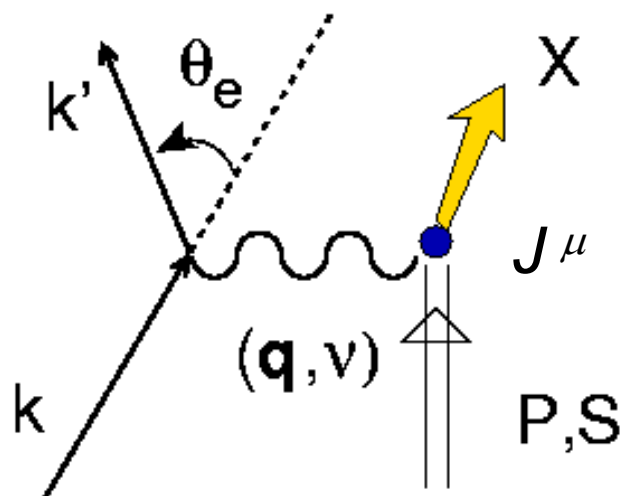
area proibita  $\nu \leq \frac{Q^2}{2M_A}$



# Sezione d'urto

n° eventi per unita` di tempo, diffusore, angolo solido

n° particelle incidenti per unita` di tempo, superficie



$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{F}} |\mathcal{M}|^2 dR$$

flusso

$$\mathcal{F} = 4\sqrt{(P \cdot k)^2 - P^2 k^2} \stackrel{\text{TRF}}{=} 4ME$$

spazio fasi

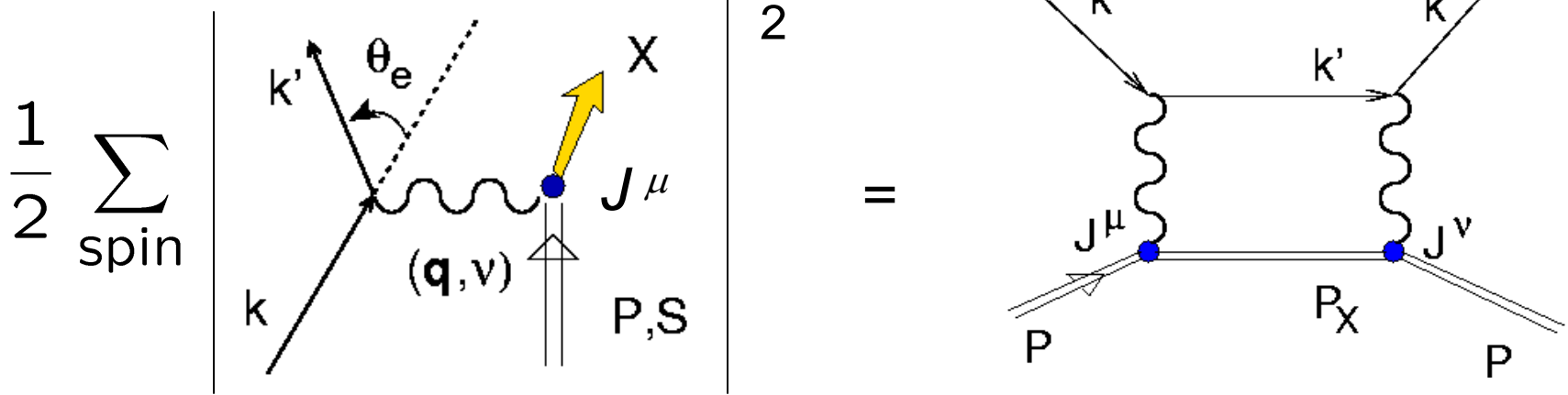
$$dR = (2\pi)^4 \delta(P + q - P_X) \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2E'}$$

$$\frac{E' dE' d\Omega}{16\pi^3}$$

ampiezza scattering

$$\mathcal{M} = \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \frac{e^2}{Q^2} \langle P_X | J^\mu(0) | P, S \rangle$$

## Tensore adronico



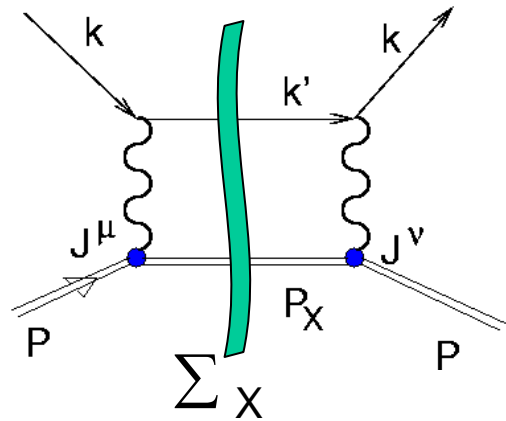
$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$$



tensore leptónico  $L^{\mu\nu} = 2k^\mu k'^\nu + 2k^\nu k'^\mu - Q^2 g^{\mu\nu}$

tensore adronico  $H^{\mu\nu} = \langle P | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | P \rangle$

# Scattering inclusivo



tensore adronico

$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \sum_X \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(P+q-P_X) H^{\mu\nu}$$

sezione d'urto per scattering inclusivo (formula generale)



$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{E'}{E} \frac{\alpha^2}{Q^4} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

$$Q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2}$$

grandi angoli soppressi !

# Scattering inclusivo elastico

$$\sum_X \dots |P_X\rangle \langle P_X| \dots = \dots |P'\rangle \langle P'| \dots \quad W' = (P+q)^2 = M^2$$

tensore  
adronico

$$\begin{aligned}
 2MW^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \sum_X \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(P+q-P_X) H^{\mu\nu} \\
 &= \delta((P+q)^2 - M^2) H^{\mu\nu} = \delta(2P \cdot q - Q^2) H^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$



$$\stackrel{\text{TRF}}{=} \delta(2M\nu - Q^2) H^{\mu\nu} = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) H^{\mu\nu}$$

$\nu \leftrightarrow Q$  : concetto di scaling

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{E'}{E} \frac{\alpha^2}{4M^2 Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

vari  
casi

$$\int dE' \frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \frac{\alpha^2}{4M^2 Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$$



## Bersaglio = particella scalare libera

$$H^{\mu\nu} = \langle P | J^\mu | P' \rangle \langle P' | J^\nu | P \rangle$$

2 vettori indipendenti :  $R=P+P'$  ,  $q=P-P'$   $\rightarrow J^\mu \approx F_1 R^\mu + F_2 q^\mu$

$$F_{1,2}(q^2, P^2, P'^2) = F_{1,2}(q^2)$$

conservazione della corrente  $q_\mu J^\mu = 0 \rightarrow F_2(q^2) = -\frac{R \cdot q}{q^2} F_1(q^2)$

definizione :  $\tilde{P}^\mu = R^\mu - \frac{R \cdot q}{q^2} q^\mu \rightarrow J^\mu = \tilde{P}^\mu F_1(Q^2)$

N.B. per particella on-shell  $q \cdot R = 0$  ; ma in generale per off-shell  $q \cdot \tilde{P} = 0$

$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} = \left( 2k \cdot \tilde{P} k' \cdot \tilde{P} - \tilde{P}^2 k \cdot k' \right) 2 |F_1(Q^2)|^2$$

$$\stackrel{\text{TRF}}{\sim} 16 E E' M^2 |F_1(Q^2)|^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2}$$



# Scattering inclusivo elastico su particella scalare libera

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} E'^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \frac{E'}{E} |F_1(Q^2)|^2 \equiv \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} |F_1(Q^2)|^2$$



Coulomb scattering elastico da  
particella puntiforme

rinculo  
bersaglio

struttura  
bersaglio