Riassunto della lezione precedente

• fattorizzazione collineare valida a tutti gli ordini perturbativi per teorie di gauge rinormalizzabili (QED, QCD)
→ approccio universale probabilistico
→ cinematica quasi−collineare e vertice di Altarelli−Parisi

• divergenze soft e funzioni di splitting nel senso delle distribuzioni

• funzioni di struttura di un fermione $f(x,Q^2)$: probabilità di trovare in fermione fisico un fermione costituente con frazione x dell'energia e radiazione emessa con $p_\perp \leq Q$
al variare di Q cambia contenuto di $f(x,Q^2)$: equazioni di evoluzione DGLAP

• teoremi di fattorizzazione: DIS, coefficienti di Wilson, schemi di fattorizzazione

• trasformata di Mellin
invarianza per scala di fattorizzazione ⇒ DGLAP kernel ↔ dim. anomale

DIS semi-inclusivo

vale un teorema analogo a DIS inclusivo purché non si osservi $\mathbf{p}_T$ dei partoni

e$^+$e$^-$ inclusivo

Teorema : la sezione d'urto totale è finita nel limite di particelle senza massa, cioè è libera da divergenze "infrarosse" (IR)

(Sterman, '76, '78)

[generalizzazione del teorema KLN (Kinoshita-Lee-Nauenberg)]

$$\sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \sum_f e_f^2 \sum_n s_n \, \alpha_s^n(Q^2) \qquad s_0 = 1$$

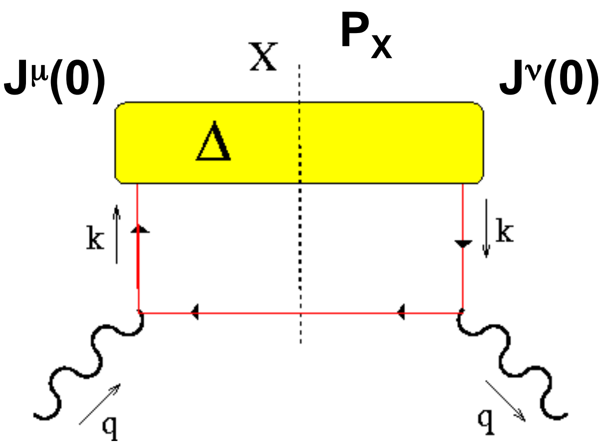
QPM correzioni di pQCD

Drell-Yan

Teorema di fattorizzazione

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dy d\Omega} = \sum_{f_1,f_2} \int_{x_1}^1 d\xi_1 \int_{x_2}^1 d\xi_2 \, \phi_{f_1}(\xi_1,\mu_F) \, \frac{d\sigma^{el}}{dQ^2 dy d\Omega}\left(\frac{x_1}{\xi_1}, \frac{x_2}{\xi_2}, \Omega, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_F)\right) \phi_{f_2}(\xi_2,\mu_F) + o\left(\frac{1}{Q^2}\right)$$

e^+e^- inclusivo



$$
\begin{aligned}
W^{\mu\nu} &= \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0}\,(2\pi)^4\,\delta(q-P_X)\\
&\qquad \langle 0|J^\mu(0)|P_X\rangle\langle P_X|J^\nu(0)|0\rangle\\
&= \int d^4\xi\, e^{iq\cdot\xi}\,\langle 0|[J^\mu(\xi)\,,\,J^\nu(0)]|0\rangle
\end{aligned}
$$

Teorema: contributo dominante nel limite di Bjorken viene da corte distanze

$\xi \to 0$

ma prodotto di operatori nello stesso punto spazio-temporale non è sempre ben definito in teoria di campo!

(continua)

Esempio: campo scalare neutro libero ϕ(x) → propagatore libero Δ(x-y)

$$\langle 0|\mathcal{T}\left[\phi(x)\,\phi(y)\right]|0\rangle \;=\; -i\Delta(x-y) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

$$= \frac{m}{4\pi^2}\,\frac{K_1\left(m\sqrt{-(x-y)^2+i\epsilon}\right)}{\sqrt{-(x-y)^2+i\epsilon}} - \frac{i}{4\pi}\,\delta((x-y)^2) \;\xrightarrow{x\to y}\; \infty$$

K_1 funz. Bessel modificata del 2^0 tipo

Operator **P**roduct **E**xpansion

(Wilson, ' 69 prima congettura; Zimmermann, ' 73 dimostrazione in teoria perturbazioni; Collins, ' 84 dimostrazione diagrammatica)

definizione (anche operativa) di operatore composito:

$$\hat{A}(x)\,\hat{B}(y) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y)\,\hat{O}_i\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

- gli operatori locali $\hat{O}_i$ sono regolari nell'argomento per ogni i=0,1,2…
- la divergenza per $x \to y$ è assorbita nei coefficienti C_i
- i termini sono ordinati per singolarità decrescenti in C_i , i=0,1,2…
- di solito $\hat{O}_0 = \mathbf{I}$, ma espressione esplicita dell'espansione va trovata separatamente per ogni tipo di processo
- OPE è anche una definizione operativa perché può essere usata per definire un operatore composito regolare.
  Esempio : teoria ϕ^4, l'operatore composito $\phi(x)^2$ può essere costruito come

$$\phi(x)^2 \equiv \lim_{x\to y} \frac{\phi(x)\,\phi(y) - C_0(x-y)}{C_1(x-y)} = \hat{O}_1(x)$$

applicazione: e^+e^- inclusivo

$$W^{\mu\nu} = \int d^4\xi \; e^{iq\cdot\xi} \; \langle 0| \left[J^\mu(\xi), J^\nu(0) \right] |0\rangle$$

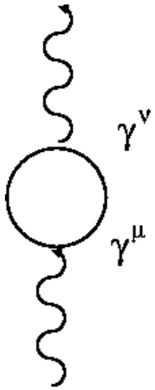
$$J^\mu(x) = \sum_f e_f^2 \sum_c : \bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\psi_f(x) :$$

$$\epsilon(\xi^0)\,[J_\mu(\xi), J_\nu(0)] = \frac{i(2\xi_\mu\xi_\nu - \xi^2 g_{\mu\nu})}{3\pi^3}\,\partial^3(\xi^2) + \frac{\xi^\lambda}{\pi}\,\partial(\xi^2)\,\sigma_{\mu\lambda\nu\rho}\,\hat{O}^\rho_V(\xi,0)$$
$$+ \frac{i\xi^\lambda}{\pi}\,\partial(\xi^2)\,\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho}\,\hat{O}^\rho_A(\xi,0) + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi,0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0,\xi)$$

- $\hat{O}_{V/A}{}^{\mu}(\xi,0)$ e $\hat{O}^{\mu\nu}(\xi,0)$ sono operatori bilocali regolari per $\xi \to 0$; contengono informazioni sul comportamento a lunghe distanze
- i coefficienti sono singolari per $\xi \to 0$ (ordinati per singolarità decrescente); contengono informazioni sul comportamento a corte distanze
- fattorizzazione tra corte e lunghe distanze rigorosa ad ogni ordine
- formula contiene il comportamento di quark liberi a corte distanze
  → portata generale per ritrovare i risultati di QPM

(continua)

contributo dominante :



$$W_{\mu\nu} = \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, \langle 0| \frac{i}{3\pi^3} \left(2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}\right) \partial^3(x^2)|0\rangle$$
$$= \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, \langle 0| \mathrm{Tr}\left[S_F(x)\gamma^\mu S_F(-x)\gamma^\nu\right]|0\rangle$$

alla fine risulta $\longrightarrow \sigma_{tot} = N_c \dfrac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum_f e_f^2$

risultato di QPM !

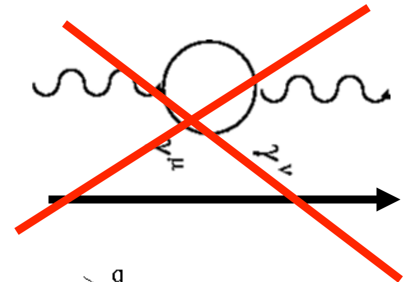
Morale : OPE per quark liberi a corte distanze è equivalente a QPM

perchè QPM assume che a corte distanze i quark si comportino come fermioni liberi → asymptotic freedom postulata in QPM si ritrova rigorosamente in OPE

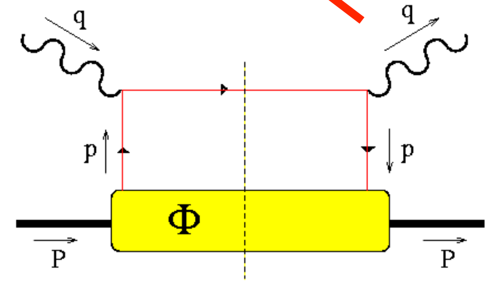
applicazione: DIS inclusivo

$$2MW_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, \langle P|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|P\rangle$$

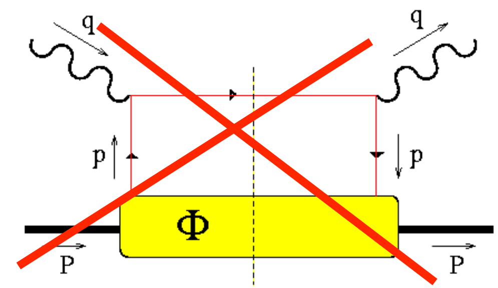
$$= \frac{i}{6\pi^4}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, \left(2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}\right) \partial^3(x^2)\, \langle P|P\rangle$$



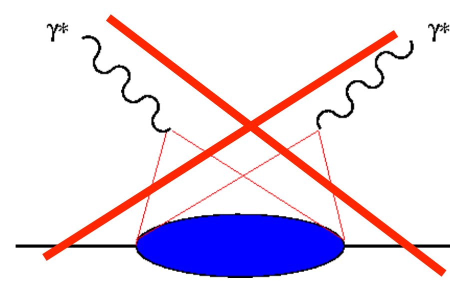
$$+\frac{1}{2\pi^2}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, x^\lambda\, \epsilon(x^0)\, \partial^1(x^2)\, \langle P|\sigma_{\mu\lambda\nu\rho}\, \hat{O}^\rho_V(x,0)|P\rangle$$



$$+\frac{1}{2\pi^2}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, x^\lambda\, \epsilon(x^0)\, \partial^1(x^2)\, \langle P|i\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho}\, \hat{O}^\rho_A(x,0)|P\rangle$$



$$+\frac{1}{2\pi}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, \epsilon(x^0)\, \langle P|\hat{O}_{\mu\nu}(x,0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0,x)|P\rangle$$



no polarizzazione → $W_S^{\mu\nu}$

Riassunto

procedura per il calcolo di $W^{\mu\nu}$:

- espansione OPE per operatore bilocale in serie di operatori locali
- trasformata di Fourier di ciascun termine
- somma dei termini ottenuti

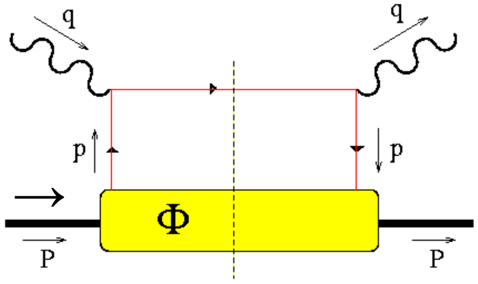
- risultato finale esprimibile in serie di potenze di M/Q attraverso il twist t (≥ 2) = d (dimensione canonica dell'operatore) − spin

dimensioni di <P| operatore |P> -2

~ n. indici dell'operatore

$$\left(\frac{M}{Q}\right)^{t-2}, \left(\frac{M}{Q}\right)^{t+2-2} \ldots, \quad t \geq 2$$

la serie di potenze è contenuta nell'operatore bilocale →

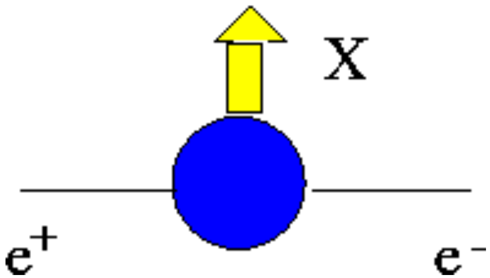


correzioni QCD / correzioni di potenze	1	α_s	α_s^2	…
1	QPM	→	IQPM	→
$1/Q$	↓	**O**perator **P**roduct **E**xpansion		
$1/Q^2$				
$1/Q^3$				….
…	↓			

N.B. per il momento solo
per e^+e^- e DIS inclusivo

OPE dimostrabile solo per e^+e^- e DIS inclusivi

e^+e^- inclusivo

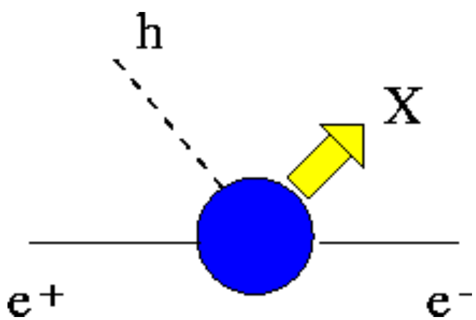


$$W^{\mu\nu} = \int d^4\xi \, e^{iq\cdot\xi} \, \langle 0| \left[J^\mu(\xi) \, , \, J^\nu(0) \right] |0\rangle$$

$q^\mu \overset{c.m.}{=} (q^0, \mathbf{0})$ regime DIS: $Q^2 \to \infty \;\Rightarrow\; q^0 \to \infty$
causalità $\Rightarrow$ [..] definito su $\xi^2 \geq 0$
contributo principale all'integrale da $q \cdot \xi$ finito
$\Rightarrow \xi^0 \sim 0 \Rightarrow \xi \sim 0$

operatore composito a corte distanze → OPE

e^+e^- semi-inclusivo



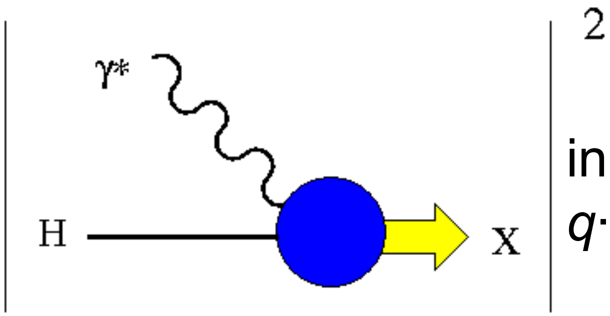
$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_X \int d^4\xi \, e^{iq\cdot\xi} \, \langle 0| J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | 0 \rangle$$

sistema dell'adrone a riposo $P_h^\mu = (M_h, \mathbf{0})$
$q\cdot\xi$ finito → $W^{\mu\nu}$ dominato da $\xi^2 \sim 0$

ma stato $|P_h>$ impedisce chiusura $\sum_X$
→ OPE non può essere applicata

DIS inclusivo

$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi \, e^{iq\cdot\xi} \, \langle P| \left[J^\mu(\xi) \, , \, J^\nu(0) \right] |P\rangle$$

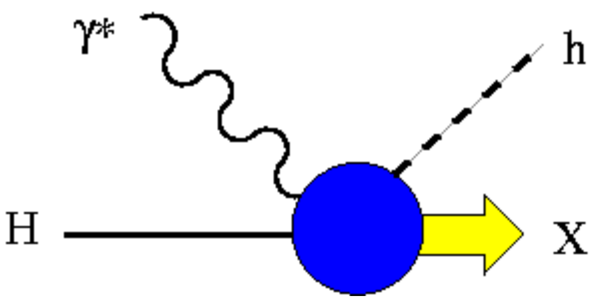


X

in limite DIS $\Rightarrow$ ($x_B = -q^2/2P\cdot q$ finito) $\Leftrightarrow$ ($\nu \to \infty$)
$q\cdot\xi$ finito in limite DIS $\to \xi^0 \sim 0 \to \xi^\mu \sim 0$

DIS semi-inclusivo

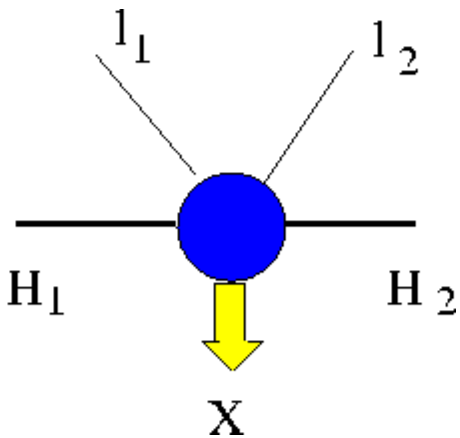
$$2MW^{\mu\nu} \propto \sum_X \int d^4\xi \, e^{iq\cdot\xi} \, \langle P|J^\mu(\xi)|P_h X\rangle\langle P_h X|J^\nu(0)|P\rangle$$



stato $|P_h>$ impedisce chiusura $\sum_X$
$\to$ OPE non può essere applicata

Drell-Yan

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, s \int d^4\xi\, e^{iq\cdot\xi} \langle P_1 P_2 | J^\mu(\xi)\, J^\nu(0) | P_1 P_2 \rangle$$



$q\cdot\xi$ finito → dominanza per $\xi^2 \sim 0$

ma <..> non è limitato in nessun sistema perché $s=(P_1+P_2)^2 \sim 2P_1\cdot P_2 \geq Q^2$ e nel limite $Q^2 \to \infty$ entrambe P_1,P_2 non limitati
$W^{\mu\nu}$ riceve contributi fuori dal light-cone!

Quali sono i diagrammi dominanti per i processi in cui non si può applicare l'OPE ?
E' possibile applicare il concetto dell'OPE (fattorizzazione) anche a processi semi-inclusivi?

Classificazione dei contributi dominanti ai vari processi hard

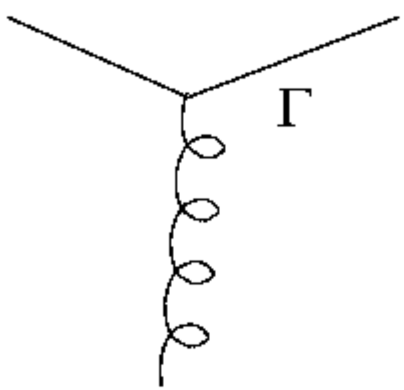
Premessa :

- propagatore di quark libero a corte distanze $S_F(x)$

$$S_F(x) = (i\gamma\cdot\partial + m)\,\Delta(x) \sim (i\gamma\cdot\partial + m)\,\frac{1}{4\pi^2 i}\,\frac{1}{x^2 - i\epsilon} + ...$$

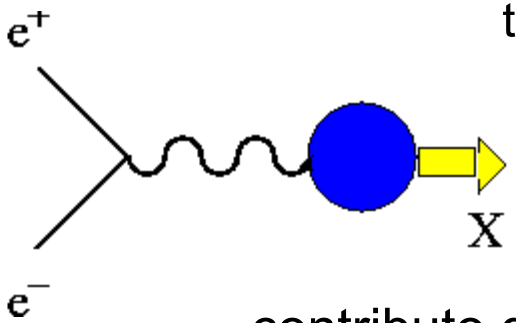
$$= \frac{-2\gamma\cdot x}{(x^2 - i\epsilon)^2}\,\frac{i}{4\pi^2 i} + ... \sim \frac{1}{x^3} + \text{termini meno singolari}$$

- interazione con gluone non incrementa la singolarità



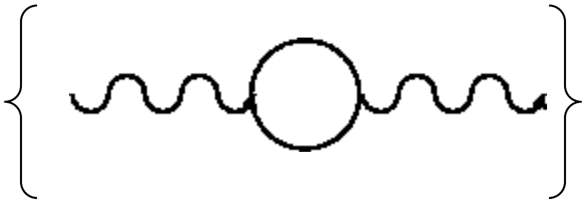
$$\sim \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4}\, S_F(x-y)\,\Gamma\, S_F(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

e^+e^- inclusivo



teorema ottico

$= \; Im$

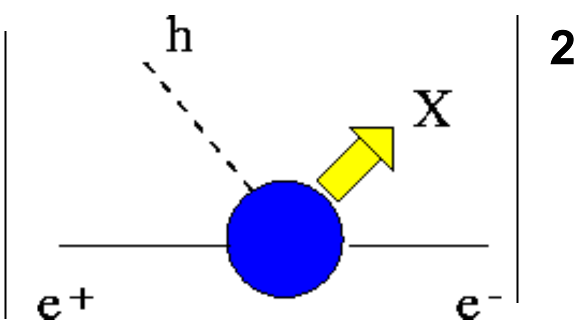


$$\sim \mathrm{Tr}\,[S_F(x)]^2 \sim \frac{1}{x^6}$$

contributo dominante a corte distanze → σ_{tot} del QPM

correzioni radiative → ~ $(\log x^2\mu_R^2)^n$ → si ritrova risultato OPE

e^+e^- semi-inclusivo



~

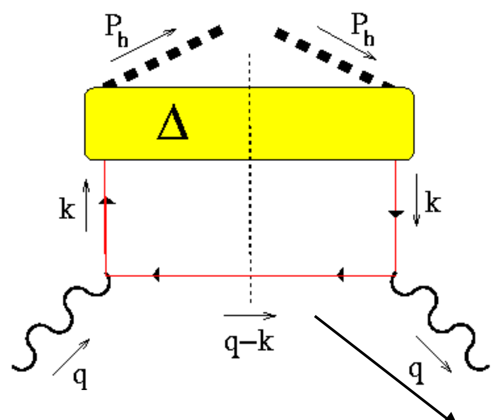


diagramma dominante a corte distanze perché

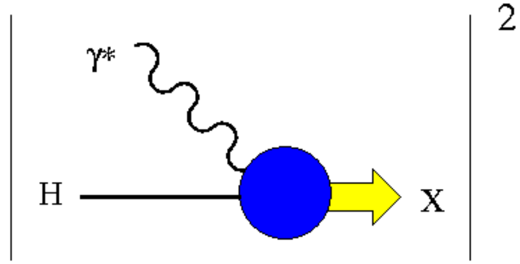
$$\sim S_F(x) \sim \frac{1}{x^3}$$

correzioni radiative → ~ $(\log x^2\mu_R^2)^n$

fattorizzazione tra vertice hard e frammentazione soft

(continua)

<u>DIS inclusivo</u>



~

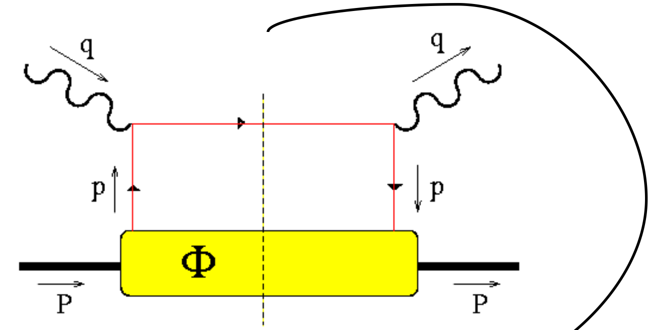
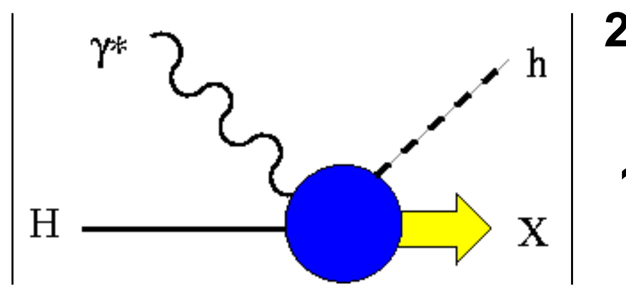


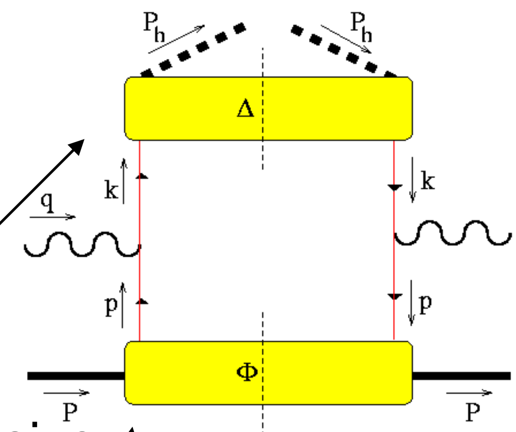
diagramma dominante a corte distanze perché $\sim S_F(x) \sim \frac{1}{x^3}$

correzioni radiative → ~ (log $x^2\mu_R{}^2)^n$ quindi si ritrova risultato di OPE

<u>DIS semi-inclusivo</u>



~



da e^+e^- semi-inclusivo

da DIS inclusivo

fattorizzazione tra vertice e.m.
hard e funzioni di distribuzione e
frammentazione (el. di matrice soft)

correzioni di potenze \ correzioni QCD	1	α_s	α_s^2	…
1	QPM	$\longrightarrow$ IQPM	$\longrightarrow$	
1/Q				
$1/Q^2$				
$1/Q^3$				
…				

Operator **P**roduct **E**xpansion

diagrammatic approach

convolution approach

….

studio sistematico delle correzioni di potenze ($\leftrightarrow$ OPE per DIS e e^+e^- inclusivi)
(Ellis,Furmanski,Petronzio, '82)

convoluzione con scattering hard fattorizzato
(Efremov,Teryaev,Jaffe, Ji,Ralston,Soper,Qiu, Sterman,Collins,Leader Anselmino…)

(continua)

Per tutti i processi di tipo DIS o e^+e^- (sia inclusivi che semi-inclusivi) il contributo dominante al tensore adronico viene dalla cinematica light-cone

- definizione e proprietà delle variabili light-cone
- teoria di campo quantizzata sul light-cone
- algebra di Dirac sul light-cone

Variabili light-cone

dato 4-vettore a^μ $\quad a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 \pm a^3) \quad , \quad \mathbf{a}_\perp = (a^1, a^2)$

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^+, a^-, \mathbf{a}_\perp)$$

prodotto scalare $\quad a \cdot b = a^+ b^- + a^- b^+ - \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp$

$$a^2 = 2a^+ a^- - \mathbf{a}_\perp^2$$

metrica $\quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(0,1,2,3)} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$

"base" light-cone :

$$n_+^\mu = (1, 0, \mathbf{0}_\perp) \quad , \quad n_-^\mu = (0, 1, \mathbf{0}_\perp) \quad ; \quad n_\pm^2 = 0 \, , \; n_+ \cdot n_- = 1$$

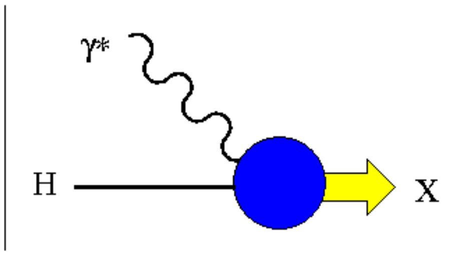
$$a^\pm = a \cdot n_\mp \longrightarrow a^\mu = (a \cdot n_-)\, n_+^\mu + (a \cdot n_+)\, n_-^\mu + \mathbf{a}_\perp$$

metrica "trasversa" $\quad g_\perp^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n_+^\mu n_-^\nu - n_+^\nu n_-^\mu = g^{\mu\nu} - n_+^{\{\mu} n_-^{\nu\}}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$$

adrone-bersaglio a riposo $\quad P^\mu \overset{restframe}{=} (M,0,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(M,M,\mathbf{0}_\perp)$

DIS inclusivo



bersaglio assorbe momento trasferito di γ^* ; ad esempio se **q** || z P_z=0 → P'_z= q >> M in regime DIS

$$P'^{\,\mu} = (\sqrt{M^2 + P'^{\,2}_z}, 0, 0, P'_z) \quad \overset{Q^2\to\infty}{\longrightarrow} \quad (P'_z, 0, 0, P'_z)$$
$$= \quad (\sqrt{2}\,P'_z, 0, \mathbf{0}_\perp)$$

regime DIS ⇒ direzione "+" dominante
direzione "-" soppressa

boost di 4-vettore $a^\mu \to a'^\mu$ lungo asse z

$$\mathrm{a}'^{\,0} = \frac{\mathrm{a}^0 + \beta\,\mathrm{a}^3}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \mathrm{a}'^{\,3} = \frac{\beta\,\mathrm{a}^0 + \mathrm{a}^3}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \mathbf{a}'_\perp = \mathbf{a}_\perp$$

$$\mathrm{a}'^{\,+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1+\beta)\,(\mathrm{a}^0+\mathrm{a}^3)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathrm{a}^+\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \mathrm{a}^+\,e^{\psi}$$

$$\mathrm{a}'^{\,-} = \mathrm{a}^-\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \mathrm{a}^-\,e^{-\psi}$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(M,M,\mathbf{0}_\perp)$$

boost lungo asse z

$$P'^{\,\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp\right)$$

N.B. rapidity

$$\psi = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \Rightarrow \beta = \tanh\psi$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp\right)$$

A = *M* → rest frame dell' adrone
A = *Q* → **I**nfinite **M**omentum **F**rame (IFM)

cinematica light-cone ⇔ boost all'IFM

<u>definizioni :</u>

$$q^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x_N A, \frac{Q^2}{x_N A}, \mathbf{0}_\perp\right)$$

invariante di Nachtmann $x_N = -\frac{q^+}{P^+}$

$$q^2 = 2q^+q^- - \mathbf{q}_\perp^2 = -Q^2$$

$$2P\cdot q = \frac{Q^2}{x_N} - x_N M^2 \implies \frac{1}{x_B} = \frac{1}{x_N} - x_N\frac{M^2}{Q^2} \implies x_N x_B^2(..) = x_N x_B^2(..)$$

$$x_B^2 - x_N x_B + \frac{x_N^2}{4} = \frac{x_N^2}{4}\left(1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2}\right) \implies x_N = \frac{2x_B}{1+\sqrt{1+\frac{4x_B^2M^2}{Q^2}}} \xrightarrow{Q^2\to\infty} x_B$$

miglior scaling in x_N quando Q ~ M

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(xA, \frac{p^2+\mathbf{p}_\perp^2}{xA}, \mathbf{p}_\perp\right)$$

frazione light-cone (longitudinale)
di momento partonico

$$x = \frac{p^+}{P^+}$$

$$p^2 = 2p^+p^- - \mathbf{p}_\perp^2$$