Riassunto lezione precedente

- dato gruppo di simmetria SU(N), definizione e proprietà di generatori, rappresentazioni fondamentale, regolare, coniugata; esempio di SU(2)

- operatore di Casimir e classificazione dei multipletti; esempi di SU(2) e SU(3)

- applicazione allo spettro barionico, proprietà di simmetria delle rappresentazioni e identificazione degli stati; esempio di due e tre particelle descritte da doppietto di SU(2); stati simmetrici, antisimmetrici, e a simmetria mista

Rappresentazioni di SU(2)

Rappresentazione fondamentale (dim. 2): $|\chi\rangle = \begin{vmatrix} u \\ d \end{vmatrix}$

2 oggetti : $|\chi_1>$, $|\chi_2>$

$\|\chi_1>$	$\|\chi_2>$	scambio 1 <-> 2	
u	u	uu	
u	d	1/√2 (ud+du)	1/√2 (ud-du)
d	u		
d	d	dd	
		S	A

$|S_1\ S_{1z}\ ;\ S_2\ S_{2z}> \ \Leftrightarrow\ |S\ S_z>$

$|½\ ½\ ;\ ½\ ½> \ \Leftrightarrow\ |1\ 1>$

$1/\sqrt{2}\ [\ |½\ ½\ ;\ ½\ -½> +\ |½\ -½\ ;\ ½\ ½>\ ] \ \Leftrightarrow\ |1\ 0>$

$1/\sqrt{2}\ [\ |½\ ½\ ;\ ½\ -½> -\ |½\ -½\ ;\ ½\ ½>\ ] \ \Leftrightarrow\ |0\ 0>$

$|½\ -½\ ;\ ½\ -½> \ \Leftrightarrow\ |1\ -1>$

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3}_S \oplus \mathbf{1}_A$$

notazione di teoria di gruppo

Ex: $S_1 = ½$ $S_2 = ½$ ➔ $S = 1$ o 0

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \otimes \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}_S \oplus \mathbf{0}_A$$

3 oggetti : $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$, $|x_3\rangle$

$\lvert x_1\rangle \lvert x_2\rangle \lvert x_3\rangle$	scambio 1 ⇔ 2			S_z
uuu	uuu			3/2
uud, udu, duu	$1/\sqrt{3}$ (uud+udu+duu)	$1/\sqrt{2}$ (ud-du)u	$1/\sqrt{6}$ [(ud+du)u - 2 uud]	½
udd, dud, ddu	$1/\sqrt{3}$ (udd+dud+ddu)	$1/\sqrt{2}$ (ud-du)d	$-1/\sqrt{6}$ [(ud+du)d - 2 ddu]	-½
ddd	ddd			-3/2
	S	M_A	M_S	

antisimmetrico in 1⇔2 simmetrico

ma non definito negli altri

Ex: $S_1 = ½$ $S_2 = ½$ $S_3 = ½$ ➔ $S_{12} = 1$ $S_3 = ½$ + $S_{12} = 0$ $S_3 = ½$

➔ $S = 3/2$ o $½_S$ + $S = ½_A$

$$\left(\tfrac{1}{2}\otimes\tfrac{1}{2}\right)\otimes\tfrac{1}{2} = \mathbf{1}\otimes\tfrac{1}{2} + \mathbf{0}\otimes\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}{}_S \oplus \tfrac{1}{2}{}_S \oplus \tfrac{1}{2}{}_A$$

$$(\mathbf{2}\otimes\mathbf{2})\otimes\mathbf{2} = (\mathbf{3}\otimes\mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}\otimes\mathbf{2}) = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M_S} \oplus \mathbf{2}_{M_A}$$

Rappresentazioni di SU(3)

Rappresentazione fondamentale (dim. 3):

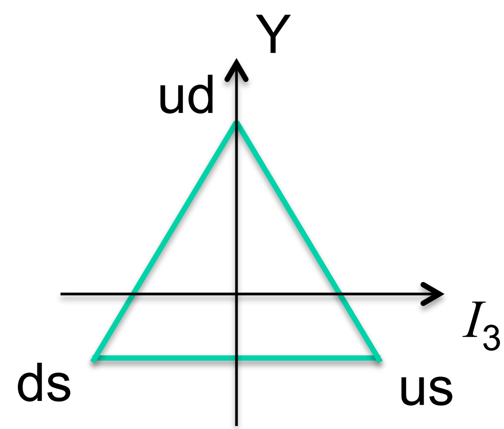
$$|\chi\rangle = \begin{vmatrix} u \\ d \\ s \end{vmatrix}$$

2 oggetti : $|\chi_1\rangle$, $|\chi_2\rangle$

$\vert\chi_1\rangle$	$\vert\chi_2\rangle$	scambio 1 <-> 2	
u	u	uu	
u	d	1/√2 (ud+du)	1/√2 (ud-du)
d	u		
d	d	dd	
u	s	1/√2 (us+su)	1/√2 (us-su)
s	u		
d	s	1/√2 (ds+sd)	1/√2 (ds-sd)
s	d		
s	s	ss	
		S	A

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6}_S \oplus \overline{\mathbf{3}}_A$$

stati A sono $\overline{3}$ perché



3 oggetti : $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$, $|x_3\rangle$

$\lvert x_1\rangle\lvert x_2\rangle\lvert x_3\rangle$	**scambio 1 ⇔ 2**				**spettro**
uuu	uuu				Δ^{++}
uud, udu, duu	1/√3 (uud+udu+duu)	1/√6 [(ud+du)u-2uud]	1/√2 (ud-du)u		Δ^{+}(S) p(M)
udd, dud, ddu	1/√3 (udd+dud+ddu)	-1/√6 [(ud+du)d-2ddu]	1/√2 (ud-du)d		Δ^{0}(S) n(M)
ddd	ddd				Δ^{-}
uus, usu, suu	1/√3 (uus+usu+suu)	1/√6 [(us+su)u-2uus]	1/√2 (us-su)u		Σ^{*+}(S) Σ^{+}(M)
uds	1/√6 (uds+usd+dus +sud+dsu+sdu)	1/2√3 [s(du+ud) + usd+dsu-2(du+ud)s]	1/2 [(usd+dsu) - s(ud+du)]	1/√6 [s(du-ud) + usd–dsu + (du-ud)s]	Σ^{*0}(S) Σ^{0}(M) Λ_{1405}(A)
		1/2 [(dsu-usd) + s(ud-du)]	1/2√3 [s(du-ud) + usd-dsu-2(du-ud)s]		Λ^{0}(M)
dds, dsd, sdd	1/√3 (dds+dsd+sdd)	1/√6 [(ds+sd)d-2dds]	1/√2 (ds-sd)d		Σ^{*-}(S) Σ^{-}(M)
ssu, sus, uss	1/√3 (ssu+sus+uss)	-1/√6 [(us+su)s-2ssu]	1/√2 (us-su)s		Ξ^{*0}(S) Ξ^{0}(M)
ssd, sds, dss	1/√3 (ssd+sds+dss)	-1/√6 [(ds+sd)s-2ssd]	1/√2 (ds-sd)s		Ξ^{*-}(S) Ξ^{-}(M)
sss	sss				Ω^{-}(S)
	S	M_S	M_A	A	

$$(\mathbf{3}\otimes\mathbf{3})\otimes\mathbf{3} = (\mathbf{6}\oplus\overline{\mathbf{3}})\otimes\mathbf{3} = (\mathbf{10}_S\oplus\mathbf{8}_{M_S})\oplus(\mathbf{8}_{M_A}\oplus\mathbf{1}_A)$$

SU(N) e i tableaux di Young

SU(2): $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$

$|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle, |\chi_3\rangle$

SU(3): $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$

$|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle, |\chi_3\rangle$

SU(6): $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle, |\chi_3\rangle \otimes (\uparrow, \downarrow)$

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3}_S \oplus \mathbf{1}_A$$
$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M_S} \oplus \mathbf{2}_{M_A}$$
$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6}_S \oplus \overline{\mathbf{3}}_A$$
$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_{M_S} \oplus \mathbf{8}_{M_A} \oplus \mathbf{1}_A$$
$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{56}_S \oplus \mathbf{70}_{M_S} \oplus \mathbf{70}_{M_A} \oplus \mathbf{20}_A$$

….

c'è una procedura automatica per calcolare le dimensioni delle rappresentazioni irriducibili?

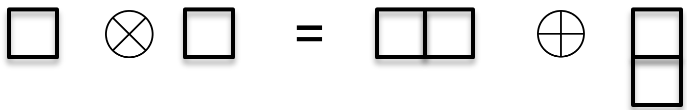
I tableaux di Young

identificazione rappresentazioni di **SU(N)**

rappresentazione fondamentale N a dim.N = □

rappresentazione coniugata N* = $\left.\begin{array}{c}\square\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \square\end{array}\right\}$ N-1 quadrati

tableaux di Young: prodotto di rappresentazioni



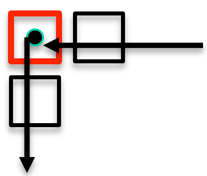
N N = ? ? come calcolare le dimensioni delle rappresentazioni prodotto?

$$\text{dimensioni} = \frac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}}$$

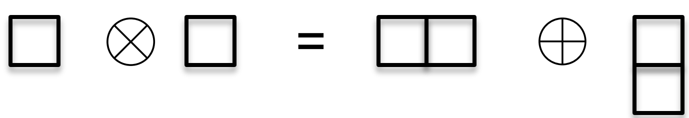
numeratore =

N	N+1	N+2
N-1	N	N+1
N-2	N-1	N
N-3		

= prodotto dei numeri in tutte le caselle

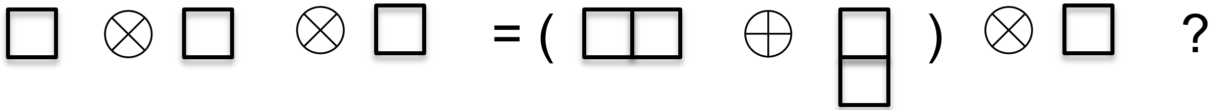
"gancio" =  = nr. di caselle attraversate

denominatore = prodotto dei "ganci" di tutte le caselle

quindi dim.  $= \frac{N(N+1)}{2} \oplus \frac{N(N-1)}{2}$

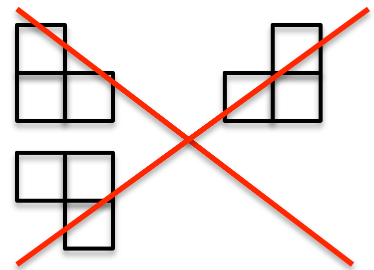
stato S A

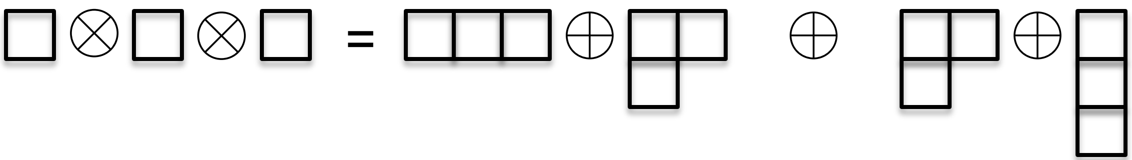
continua



si combinano le caselle in tutti i modi purché

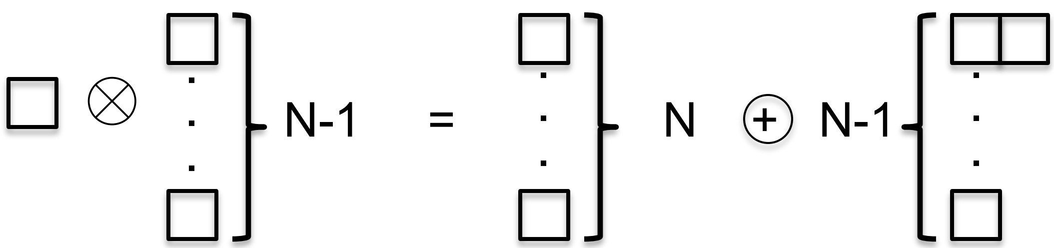
- no figure concave verso l'alto
- no figure concave verso il basso a sinistra





$$N \otimes N \otimes N = \frac{N(N+1)(N+2)}{6} \oplus \frac{(N-1)N(N+1)}{3} \oplus \frac{(N-1)N(N+1)}{3} \oplus \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$$

per strutture mesoniche, cioè "quarkonio"



$$N \otimes N^{*} = 1 \oplus (N^2 - 1)$$

spettro mesonico e simmetria degli stati

mesone = $\{q\bar{q}\}$ con q = u,d,s ➔ nonetto

quark	carica	stranezza	stati
$u\bar{d}$	1	0	π^+ ρ^+
$d\bar{u}$	-1	0	π^- ρ^-
$u\bar{u}$			π^0 ρ^0
$d\bar{d}$	0	0	η^0 ω^0
$s\bar{s}$			η'^0 ϕ^0
$u\bar{s}$	1	1	K^+ K^{*+}
$d\bar{s}$	0		K^0 K^{*0}
$\bar{u}s$	-1	-1	K^- K^{*-}
$\bar{d}s$	0		$\bar{K}^0$ $\bar{K}^{*0}$

come distinguere ?

Ex: stati a C=0 S=0

come distinguere

singoletto da ottetto ?

iso-singoletto da iso-tripletto ?

distinzione per G parità e carica C

➔ ogni $|\chi\rangle$ si sdoppia in $|\chi\rangle_S$ e $|\chi\rangle_A$

spin dei quark: $SU(3)_f \rightarrow SU(6) = SU(3)_f \times SU(2)$

se quark avessero spin=0 allora avremmo spettro $\{q\,\bar{q}\}$

L=0	$J^P=0^+$	scalari
L=1	$J^P=1^-$	vettori
L=2	$J^P=2^+$	tensori
…	…	…

massa

invece spettro è
0^- pseudoscalari
1^- vettori
… …

compatibile con spin=½ : $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{0}$

|χ> rappr. di SU(3) di sapore
|φ> rappr. di SU(2) di spin

rappr. di SU(6) per $0^-,1^-$ sono $\boxed{|\chi\rangle_A\,|\varphi\rangle_S \quad |\chi\rangle_S\,|\varphi\rangle_A}$

$$|\chi\rangle^i_S \ \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\right\rangle$$

$$|\chi\rangle^i_A \ |\uparrow\uparrow\rangle \qquad |\chi\rangle^i_A \ |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$|\chi\rangle^i_A \ \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\right\rangle$$

i= 0 (singoletto), 1…8 (ottetto)

In totale 36 stati, cioè $\mathbf{6} \otimes \bar{\mathbf{6}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{35}$

conseguenza di spin(q)=½ e

SU(6) e spettro dei mesoni

quark	stati
$1/\sqrt{2}\,(u\bar{d} \pm \bar{d}u)$	π^+ ρ^+
$-1/\sqrt{2}\,(d\bar{u} \pm \bar{u}d)$	π^- ρ^-
$\frac{1}{2}\,[(d\bar{d}-u\bar{u}) \pm (\bar{d}d-\bar{u}u)]$	π^0 ρ^0
$1/\sqrt{6}\,[(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}) \pm (\bar{u}u+\bar{d}d+\bar{s}s)]$	η_1 ω_1
$1/(2\sqrt{3})\,[(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}) \pm (\bar{u}u+\bar{d}d-2\bar{s}s)]$	η_8 ω_8
$1/\sqrt{2}\,(u\bar{s} \pm \bar{s}u)$	K^+ K^{*+}
$1/\sqrt{2}\,(d\bar{s} \pm \bar{s}d)$	K^0 K^{*0}
$-1/\sqrt{2}\,(s\bar{u} \pm \bar{u}s)$	K^- K^{*-}
$-1/\sqrt{2}\,(s\bar{d} \pm \bar{d}s)$	$\bar{K}^0$ $\bar{K}^{*0}$