

# Riassunto della lezione precedente

- Linee generali della teoria dello scattering con sonde elettromagnetiche:
  - sezione d'urto inclusiva
  - sezione d'urto inclusiva elastica: caso della particella scalare  
caso particella di Dirac puntiforme  
caso particella di Dirac con struttura
- formula di Rosenbluth; fattori di forma di Sachs; separazione di Rosenbluth; deviazione dei dati sperimentali da scaling asintotico della pQCD: dov'è la soglia tra regime perturbativo e non perturbativo?

# Sezione d' urto (an)elastica inclusiva per particella di Dirac composita

Risultato generale : 
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ A(\nu, Q^2) + B(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

Procedura :

- 2 vettori “adronici” indipendenti  $P, q$
- base tensoriale:  $b_1 = g^{\mu\nu}$ ,  $b_2 = q^\mu q^\nu$ ,  $b_3 = P^\mu P^\nu$ ,  
 $b_4 = (P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu)$ ,  $b_5 = (P^\mu q^\nu - P^\nu q^\mu)$ ,  
 $b_6 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho P^\sigma$
- tensore adronico  $W^{\mu\nu} = \sum_i c_i (q^2, P \cdot q) b_i$
- invarianza per parità e time-reversal,  
 conservazione della corrente  $q_\mu W^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} q_\nu = 0$
- sistema lineare con  $c_6$  indeterminato ( $=0$ ),  $c_5=0$ ,  
 $c_1$  e  $c_3$  dipendenti da  $c_2$  e  $c_4$
- Risultato finale :



$$W^{\mu\nu} = \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) q^2 c_2(q^2, P \cdot q) + \frac{\tilde{P}^\mu \tilde{P}^\nu}{M^2} \left( -\frac{M^2 q^2}{P \cdot q} \right) c_4(q^2, P \cdot q)$$

$$\tilde{P}^\mu = P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu$$

(continua)

- struttura  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho P^\sigma$  proibita da invarianza per parità
- struttura  $(P^\mu q^\nu - P^\nu q^\mu)$  proibita da invarianza per time-reversal
- strutture  $(P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu)$ ,  $q^\mu q^\nu$  trascurabili perché  $\sim m_e^2$ , ma non proibite (violazione della conservazione della corrente)
- hermiticity  $W^{\mu\nu} = (W^{\nu\mu})^* \Rightarrow c_{2,4}$  funzioni reali

$$L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = 4EE' \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \left( W_2 + 2W_1 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE' d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \\ &= \sigma_{\text{Mott}} \left[ W_2(\nu, Q^2) + 2W_1(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ W_2 + 2W_1 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$



# Riepilogo

Scattering inclusivo su particella di Dirac libera e composita

anelastico

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left[ W_2(\nu, Q^2) + 2W_1(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

elastico

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left[ (F_1^2 + \tau F_2^2) + 2\tau (F_1 + F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

$$W_2^{\text{el}} \leftrightarrow (F_1^2 + \tau F_2^2) \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

$$2W_1^{\text{el}} \leftrightarrow 2\tau (F_1 + F_2)^2 \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

elastico puntiforme

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left( 1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right) \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

$$W_2^{\text{el}} \leftrightarrow \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

$$W_1^{\text{el}} \leftrightarrow \tau \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

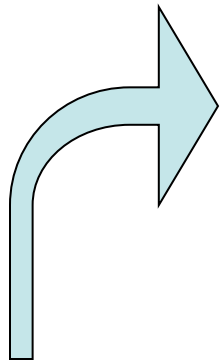
$F_1 \rightarrow 1$   
 $F_2 \rightarrow 0$

## DIS regime

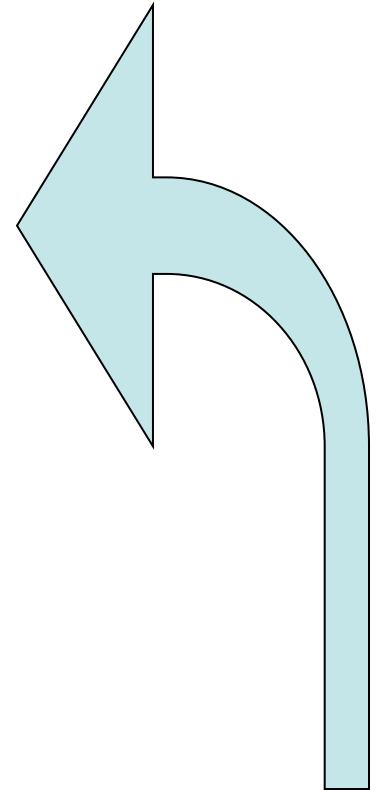
$$Q^2 \rightarrow \infty$$
$$x_B = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \quad \text{fissato}$$

TRF :  $v \rightarrow \infty$  velocemente come  $Q^2$

poiché  $Q^2 = -v^2 + \mathbf{q}^2 \geq 0$  dunque  
 $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$  velocemente come  $Q^2$



dipendente dal frame



indipendente dal frame

# Scaling

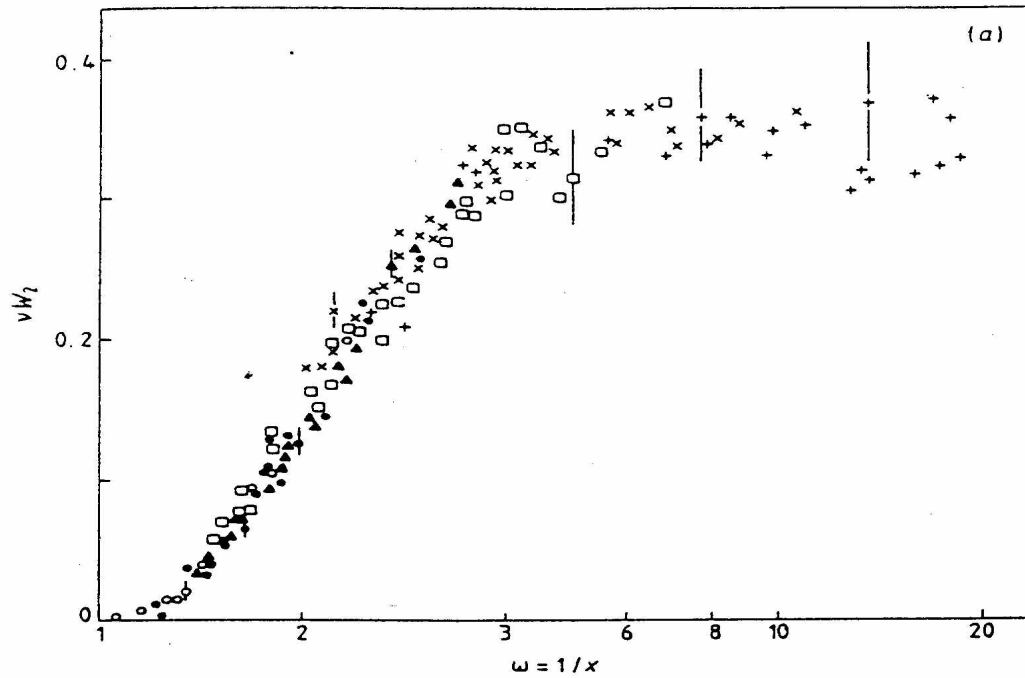
$$\begin{aligned} W_2^{\text{el}} &\leftrightarrow \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) & \nu W_2^{\text{el}} &\leftrightarrow \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) \equiv \delta(1 - x_B) \equiv F_2(x_B) \\ W_1^{\text{el}} &\leftrightarrow \tau \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) & 2MW_1^{\text{el}} &\leftrightarrow \frac{Q^2}{2M\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) \equiv x_B \delta(1 - x_B) \equiv 2F_1(x_B) \end{aligned}$$

regime DIS:  $x_B$  fissato, la risposta non dipende più da  $Q^2 \rightarrow$  scaling

Osservazione sperimentale dello scaling = segnale che nella cinematica DIS (cioè  $Q^2, \nu \rightarrow \infty$ ,  $x_B$  fissato) lo scattering si può rappresentare come la somma incoerente di scattering elastici da costituenti puntiformi del bersaglio con statistica di Dirac  $\Rightarrow$  origine del concetto di partone

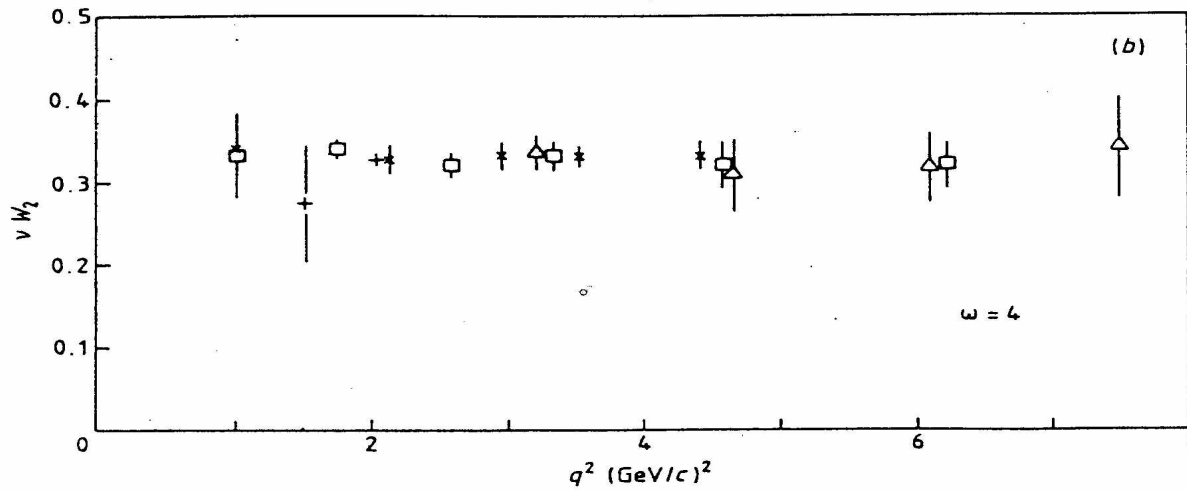
N.B. Analogo dell' esperimento di Rutherford sullo scattering di particelle  $\alpha$  da atomi

$\nu W_2$



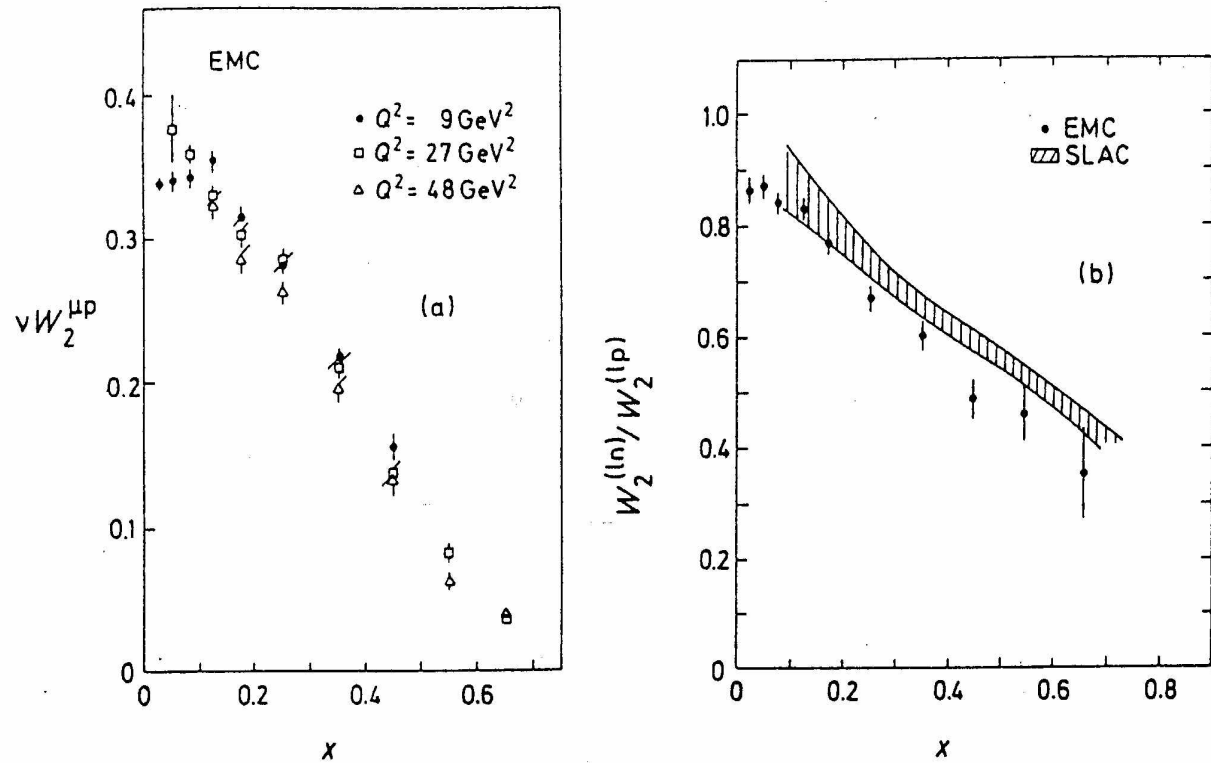
$1/x$

Aitchison  
& Hey



$Q^2$

**Figure 4.2** Bjorken scaling: the structure function  $\nu W_2$  (a) plotted against  $\omega = 1/x$  for different  $q^2$  values (Miller *et al* 1972) (b) plotted against  $q^2$  for a single value of  $x = 0.25$  ( $\omega = 4$ ) (Friedman and Kendall 1972).



**Figure 18.9** Data from the European Muon Collaboration (EMC) for the structure function  $\nu W_2^{\mu p}(\nu, Q^2)$  of the proton as a function of  $x = Q^2/(2M\nu)$  for various  $Q^2$  values. Exact Bjorken scale invariance would demand that the data points for the same  $x$  but different  $Q^2$  should lie on top of one another (a). Part (b) shows the ratio of the neutron and proton structure functions  $W_2^{(ln)}(\nu, Q^2)$  and  $W_2^{(lp)}(\nu, Q^2)$  ( $l = e, \mu$ ) as a function of  $x$ . The shaded band represents the SLAC data obtained from electron scattering in the interval  $2 \leq Q^2 \leq 20 \text{ GeV}^2$ . The points correspond to preliminary EMC data from muon scattering in the interval  $10 \leq Q^2 \leq 80 \text{ GeV}^2$  (after Drees 1983 and Dydak 1983).



## Bibliografia e un po' di storia

predizione teorica  
dello scaling

Bjorken, Proc. of 3<sup>rd</sup> Int. Symposium on  $e^-$  and  $\mu$  interactions  
SLAC ('67)

Bjorken, Phys. Rev. **179** ('69) 1547

Taylor

osservazione  
Sperimentale SLAC  
(DIS con  $e^-$  beam  
di 7-17 GeV e  
 $6^\circ < \theta_e < 10^\circ$ )

Bloom et al., Phys. Rev. Lett. **23** ('69) 930

Breidenbach et al., Phys. Rev. Lett. **23** ('69) 935

Miller et al., Phys. Rev. **D5** ('72) 528

parton model

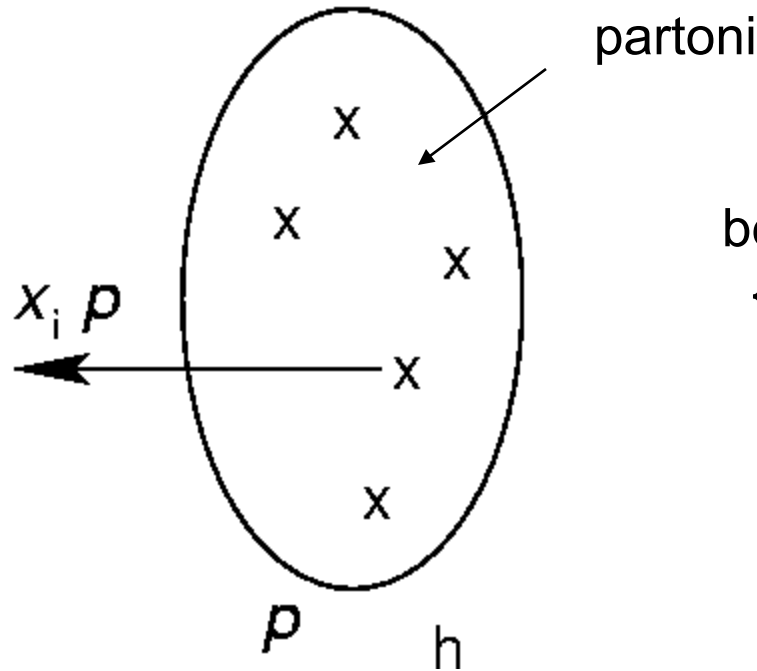
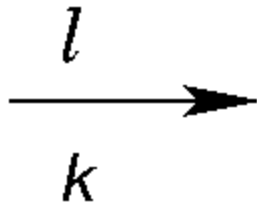
Feynman, Phys. Rev. Lett. **23** ('69) 1415

review

Friedmann & Kendall, Ann. Rev. Nucl. Sci. **22** ('72) 203

Nobel laureate

sonda leptonica



bersaglio =

{ partoni  $i=1..n$  in stato virtuale con momento  $x_i p$ ,  $0 \leq x_i \leq 1$  }

bersaglio adronico

ogni stato virtuale ha vita media  $\tau_i > 0$  nel rest frame di h

nel c.m. frame  
contrazione di Lorentz  
dilatazione dei tempi

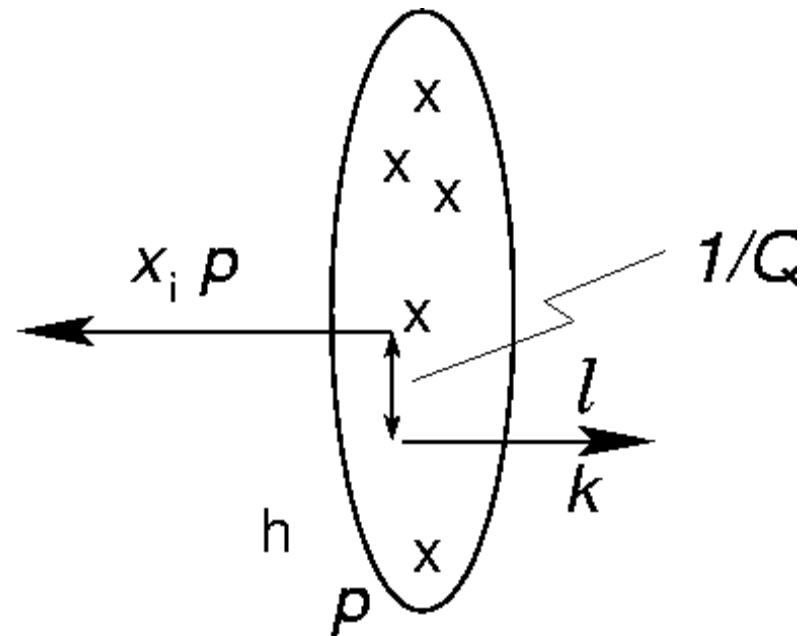
$$\tau_i \rightarrow \frac{\tau_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

il leptone  $l$  attraversa il bersaglio h in un tempo

$$t \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0$$

il leptone vede una configurazione “congelata” di partoni

per il principio di indeterminazione  
 lo scambio di  $\gamma^*$  tra  $l$  e partone  
 avviene solo se il parametro di  
 impatto (separazione trasversa tra  
 le due traiettorie) è  $< 1/Q$



probabilità di trovare un altro partone  $j \neq i$  vicino

=

area dello scattering hard  $l$  - partone

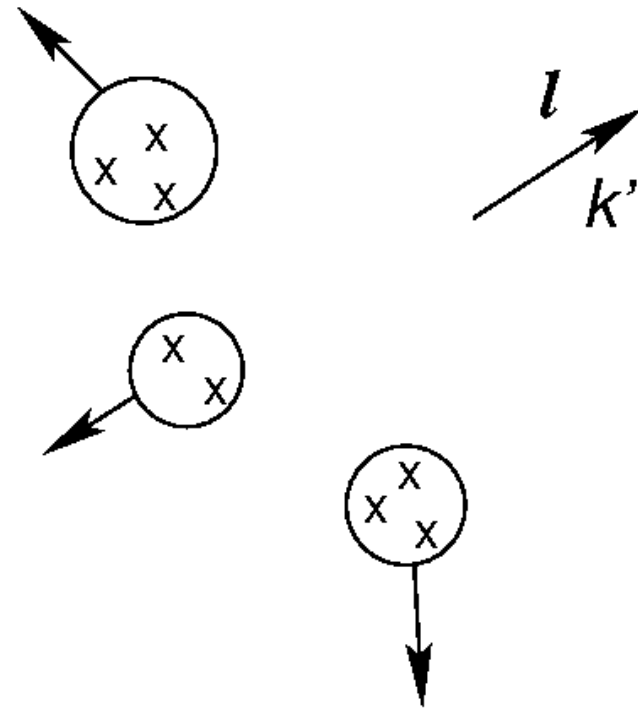
superficie di impatto del bersaglio

$$\sim \frac{1}{\pi R_h^2 Q^2} \quad \begin{matrix} Q^2 \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0 \end{matrix}$$

leptone  $l$  rivelato in stato finale

i residui del bersaglio  $h$  si ricombinano  
in adroni non osservati ( $\Sigma_X$ )

adronizzazione avviene su scala  
temporale più lunga dello scattering  
hard  $l$  – partone (vale anche per  
correlazioni iniziali tra partoni prima  
dello scattering hard)

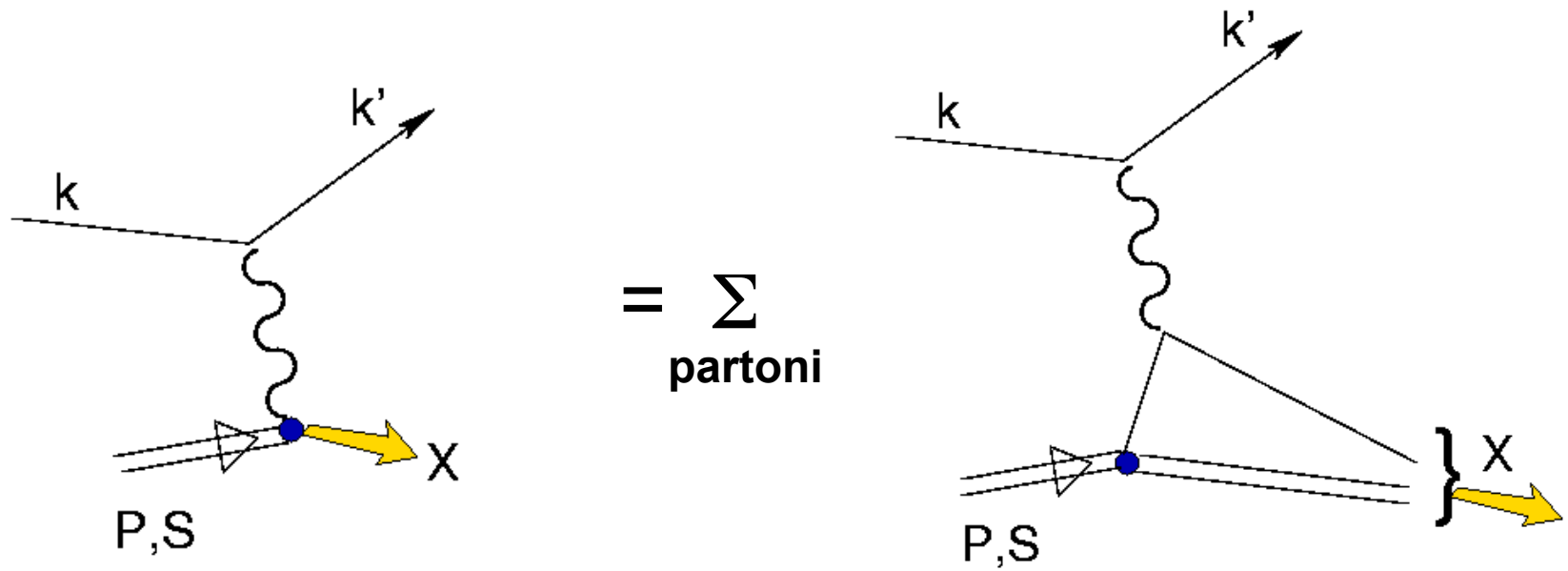


fattorizzazione tra processo di scattering hard  $l$  – partone e processi soft tra partoni, che portano alla ricombinazione degli stessi fino a formare adroni senza colore (incluso il bersaglio  $h$ )

alta energia:  $Q^2 \rightarrow \infty$ , regime DIS

il partone è quasi sulla mass-shell e vive più a lungo di  $1/Q$

approssimazione di Born per lo scattering hard  $l$  - partone



generalizzazione dell' Impulse Approximation (IA)

# QPM

- per  $Q^2 \rightarrow \infty$  in DIS, scattering hard  $l$  – partone in approssimazione di Born
- i partoni vivono in stato virtuale congelato  $\rightarrow$  sono quasi on shell
- fattorizzazione tra scattering hard e processi soft tra partoni



Convoluzione tra processo elementare (scattering hard) e distribuzione di probabilità dei partoni con flavor  $f$  nell'adrone  $h$

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega}(P, q) = \sum_f \int_0^1 dx \frac{d\sigma^{\text{el}}}{dE' d\Omega}(xP, q) \phi_f(x)$$

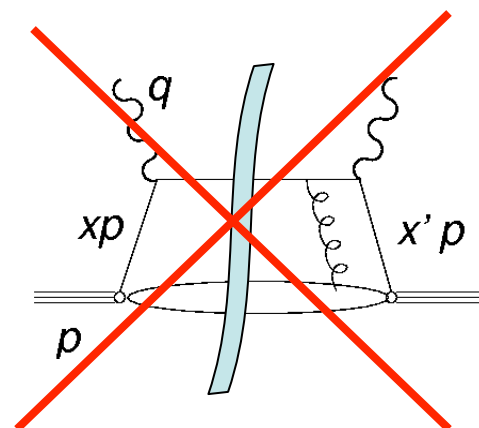
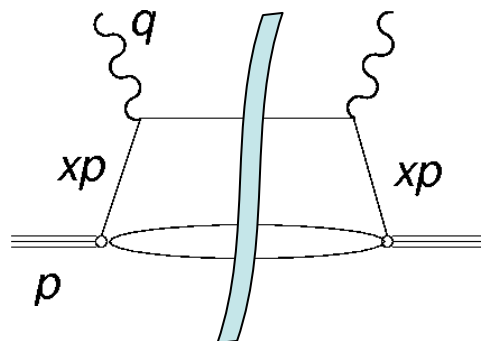
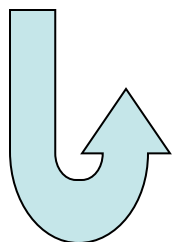
scattering elastico  $l$  – partone calcolabile da QED

probabilità incognita di trovare partone  $f$  con frazione  $x$  del momento dell'adrone  $h$

Note :

- fattorizzazione tra scattering hard e distribuzione di probabilità  
⇒ sezione d'urto proporzionale a densità dei partoni
- scattering hard calcolabile da QED;  
distribuzione di probabilità deducibile dal confronto con dati exp.
- in approssimazione di Born, scattering hard su partoni liberi  
⇒ asymptotic freedom  $\alpha_s \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0$  (contrario di QED)  
⇒ somma incoerente di scattering hard


$$\frac{d\sigma^{\text{el}}}{dE' d\Omega} \sim L_{\mu\nu} W^{\text{el} \mu\nu}$$




## Calcolo di $(W^{\text{el}})^{\mu\nu}$

scattering elastico da particella puntiforme (si suppone fermione di Dirac)

$$\frac{d\sigma^{\text{el}}}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\text{el}\ \mu\nu}$$


$$\begin{aligned} 2m W^{\text{el}\ \mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'^0} (2\pi)^4 \delta(p + q - p') H^{\text{el}\ \mu\nu} \\ &= \delta(2xP \cdot q - Q^2) H^{\text{el}\ \mu\nu} = \frac{1}{2M\nu} \delta(x - x_B) H^{\text{el}\ \mu\nu} \end{aligned}$$

$H^{\text{el}\ \mu\nu}$  per particella di Dirac puntiforme  $\leftrightarrow L^{\mu\nu}$ , ma ....


$$\begin{aligned} H^{\text{el}\ \mu\nu} &= e_f^2 \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (\not{p}' + m) \gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu \right] \\ &= e_f^2 2 \left[ p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu + g^{\mu\nu} (m^2 - p' \cdot p) \right] \end{aligned}$$



## Ampiezza di scattering elementare

$$L_{\mu\nu} = 2 (k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - k \cdot k' g_{\mu\nu})$$

$$L_{\mu\nu} H^{\text{el} \mu\nu} = e_f^2 8 \left[ p' \cdot k' p \cdot k + p' \cdot k p \cdot k' - m^2 k \cdot k' \right]$$

$$\stackrel{\text{TRF}}{=} e_f^2 8 \left[ 2x^2 M^2 E E' + x M E k' \cdot q + x M E' k \cdot q - m^2 k \cdot k' \right]$$

$$= e_f^2 16 E E' m^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \left[ 1 + \frac{Q^2}{2m^2} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$



$$p' = p + q$$

$$p = x P$$

$$m^2 = x^2 M^2$$

$$q = k - k'$$

$$k^2 = k'^2 \sim 0$$

## Sezione d' urto elastica elementare



$$\frac{d\sigma^{\text{el}}}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2 E'}{Q^4 E} L_{\mu\nu} W^{\text{el} \mu\nu}$$

$$= \frac{\alpha^2 E'}{Q^4 E} \frac{1}{2m} \frac{1}{2M\nu} \delta(x - x_B) L_{\mu\nu} H^{\text{el} \mu\nu}$$

$$x_B = \frac{Q^2}{2P \cdot q}$$

$$\frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{x_B}{x}$$

$$= \frac{4\alpha^2}{Q^4} E'^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} e_f^2 \frac{2mx_B}{Q^2} \delta(x - x_B) \left[ 1 + \frac{Q^2}{2m^2} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

$$= \sigma_{\text{Mott}} \left[ e_f^2 \delta(x - x_B) \frac{x}{\nu} + e_f^2 \delta(x - x_B) \frac{x_B}{m} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

Ricorda :

scattering elastico su fermione puntiforme

scattering inclusivo (an)elastico



$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left( 1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right) \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$



$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left\{ W_2 + 2W_1 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right\}$$

$$W_2^{\text{el}} \leftrightarrow \frac{1}{\nu} \delta \left( 1 - \frac{Q^2}{2M\nu} \right) = \frac{\delta(1 - x_B)}{\nu} \equiv \frac{F_2(x_B)}{\nu}$$

$$2W_1^{\text{el}} \leftrightarrow \frac{Q^2}{2M^2\nu} \delta \left( 1 - \frac{Q^2}{2M\nu} \right) = \frac{x_B}{M} \delta(1 - x_B) \equiv \frac{2}{M} F_1(x_B)$$



$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left\{ \frac{F_2}{\nu} + \frac{2F_1}{M} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right\} = \sum_f \int_0^1 dx \frac{d\sigma^{\text{el}}}{dE' d\Omega} \phi_f(x)$$

# Funzioni di struttura



$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} &= \sum_f \int_0^1 dx \frac{d\sigma^{\text{el}}}{dE' d\Omega} \phi_f(x) \\ &= \sigma_{\text{Mott}} \sum_f e_f^2 \int_0^1 dx \delta(x - x_B) \phi_f(x) \left[ \frac{x}{\nu} + \frac{x_B}{m} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \\ &= \sigma_{\text{Mott}} \left[ \frac{1}{\nu} F_2 + \frac{2}{M} F_1 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]\end{aligned}$$

$$F_1(x_B) = \frac{1}{2} \sum_f e_f^2 \phi_f(x_B) \quad F_2(x_B) = x_B \sum_f e_f^2 \phi_f(x_B)$$

Relazione di Callan-Gross

Callan e Gross, P.R.L. **22** 156 ('69)

$$2x_B F_1(x_B) = F_2(x_B)$$