

Fisica Nucleare II

Marco Radici

e-mail: marco.radici@pv.infn.it

Stanza 1-56, tel. 0382 987451

<http://www.pv.infn.it/~radici/>

Bibliografia

- **F.E. Close** *An Introduction to Quarks and Partons*
- **R.K. Bhaduri** *Models of the Nucleon – From Quarks to Solitons*
- **C.T.E.Q.** *Handbook of perturbative QCD*
<http://www.phys.psu.edu/~cteq#Handbook>
- **M.E. Peskin & D.V. Schroeder** *An Introduction to Quantum Field Theory*
- **R.L. Jaffe** *International School on Spin Structure of the Nucleon*
Erice, 3-10 Agosto 1995, hep-ph/9602236
- **R.G. Roberts** *The structure of the proton – Deep Inelastic Scattering*
- **M. Guidry** *Gauge Field Theories – An Introduction with Applications*

Introduzione storica

- Negli anni '50 la **QED** (Quantum ElectroDynamics) si assesta come una **teoria di gauge abeliana rinormalizzabile** che incorpora le eq. di Maxwell e descrive le evidenze sperimentali con notevole successo; i mediatori dell' interazione sono bosoni vettoriali di massa nulla, i fotoni; la costante di accoppiamento ($\alpha_{em} \sim 1/137$ costante di struttura fine) permette di calcolare qualsiasi osservabile con arbitraria precisione attraverso lo sviluppo perturbativo.
- Negli stessi anni, partendo dalla teoria di Fermi, si capisce che anche i fenomeni di decadimento radioattivo possono essere descritti come una interazione debole dovuta allo scambio di bosoni vettori "carichi" (W e Z); unificazione di QED e QFD (Quantum Flavor Dynamics) in doppietti di isospin e ipercarica deboli con simmetria $SU(2)_{wk} \times U(1)_Y$;
QED \times QFD = teoria di gauge non abeliana rinormalizzabile se massless; ma fenomenologia dice che W e Z sono massivi e pesanti (decine di GeV); dimostrazione che masse generate da rottura spontanea di una simmetria generale della teoria (\rightarrow meccanismo di Goldstone, Higgs..) mantengono la teoria di gauge non abeliana rinormalizzabile (Weinberg '67, 't Hooft '71); nasce il **settore elettrodebole del Modello Standard**.

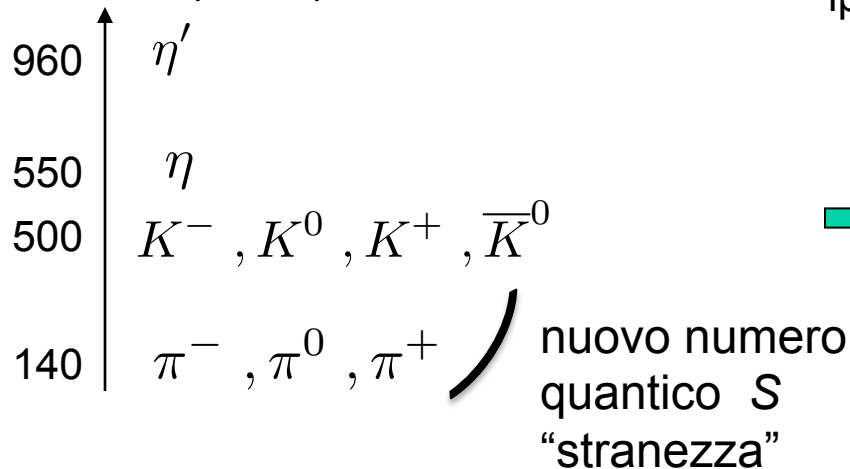
- Dopo gli studi di Yukawa, la teoria dell'interazione forte stenta ad assumere la veste completa di teoria di campo, perchè l'accoppiamento $g^2/4\pi \sim 1/10$ è troppo forte \rightarrow quale selezione di diagrammi di Feynman dominanti ? non si riesce a tradurre l'interazione come scambio di bosoni vettori.
- Fenomenologia di scattering (in)elastico e diffrattivo descritta da diversi approcci (teoria di Regge, algebra delle correnti, regole di dispersione, etc..) indipendenti dalle caratteristiche delle particelle interagenti, ma piuttosto legati alle proprietà generali dell'ampiezza di scattering (analiticità, unitarietà, crossing, etc..)
- A cavallo del '60 lo spettro dei barioni e dei mesoni è popolato da centinaia di particelle, organizzate in gruppi con stessa parità e all'incirca stessa massa, ma con carica elettrica diversa. Ex: p (938.3 MeV) n (939.5 MeV)
 π^-, π^+ (139.6 MeV) π^0 (135 MeV)
 multipletti di isospin $\rightarrow \mathcal{H}$ ha simmetria di isospin $SU(2)_I$
 degenerazione dei livelli rotta da interazione elettromagnetica, che introduce direzione privilegiata I_3
 Ex: $I=1/2$ p ($I_3=+1/2$) n ($I_3=-1/2$) ; $I=1$ π^+ ($I_3=+1$) π^0 ($I_3=0$) π^- ($I_3=-1$)

Spettro dei mesoni

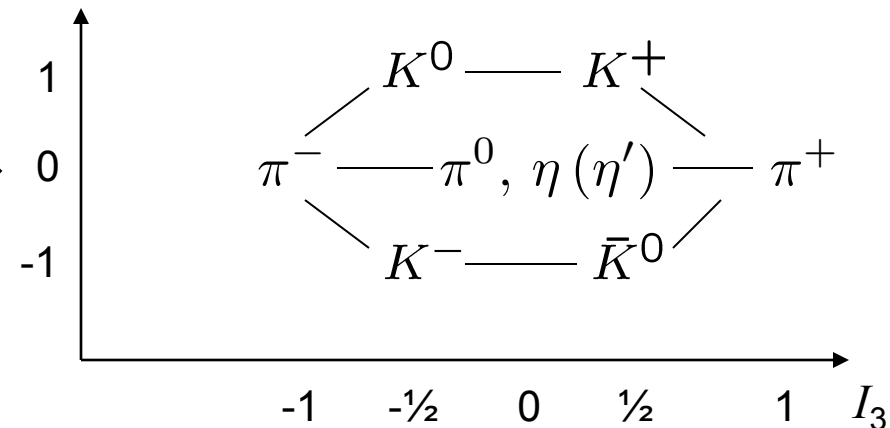
notazione spettroscopica
 J^P (P parity)

mesoni pseudoscalari $J^P=0^-$

Massa (MeV)



ipercarica $Y = B+S$ (B numero barionico)



Nonetto

interpretabile come

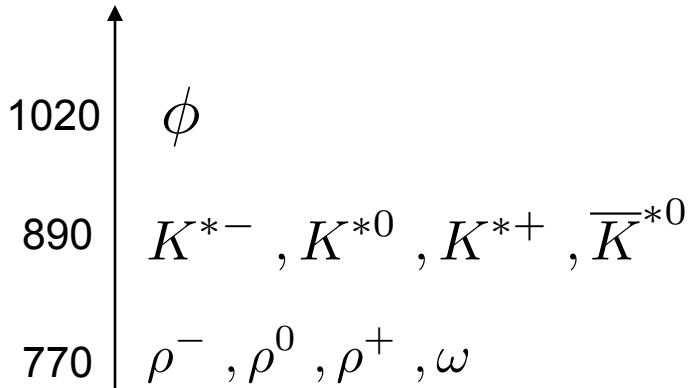
ottetto + singoletto (η')
 rappresentazioni di SU(3)
 (da $SU(2)_I$ a SU(3) con S)

Spettro dei mesoni

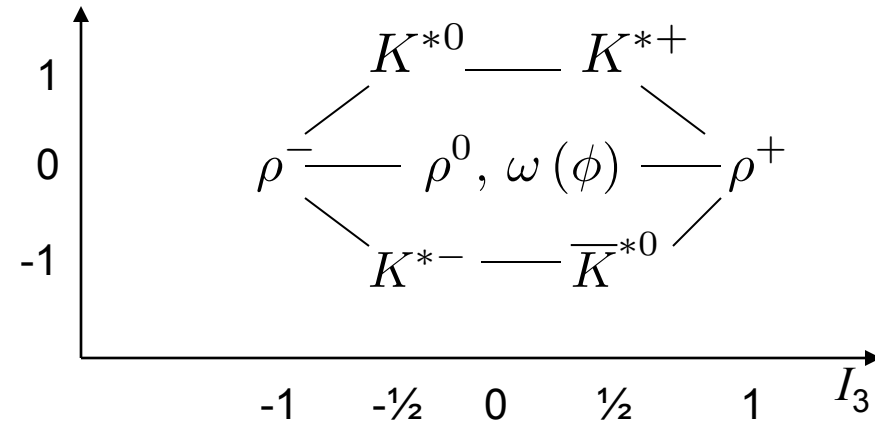
notazione spettroscopica
 J^P (P parity)

Mesoni vettori $J^P=1^-$

Massa (MeV)



ipercarica $Y = B+S$ (B numero barionico)



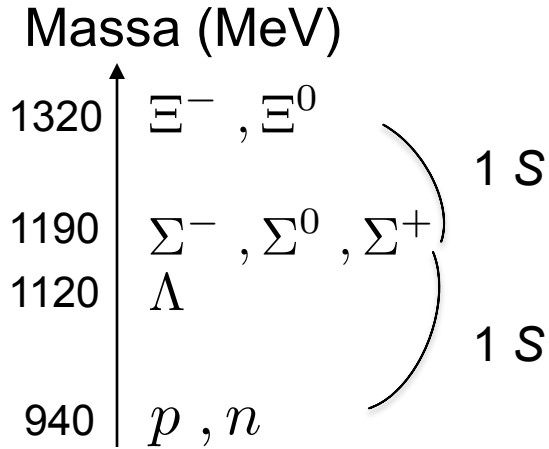
Nonetto

interpretabile come

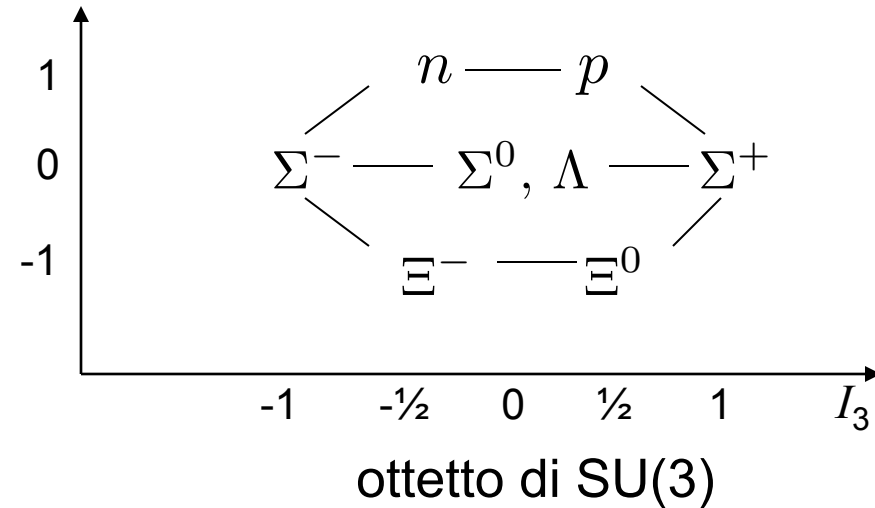
ottetto + singoletto (ϕ)
 rappresentazioni di SU(3)

Spettro dei barioni

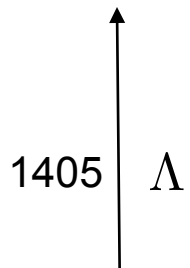
barioni $J^P=1/2^+$



ipercarica $Y = B+S$ (B numero barionico)



barioni $J^P=1/2^-$



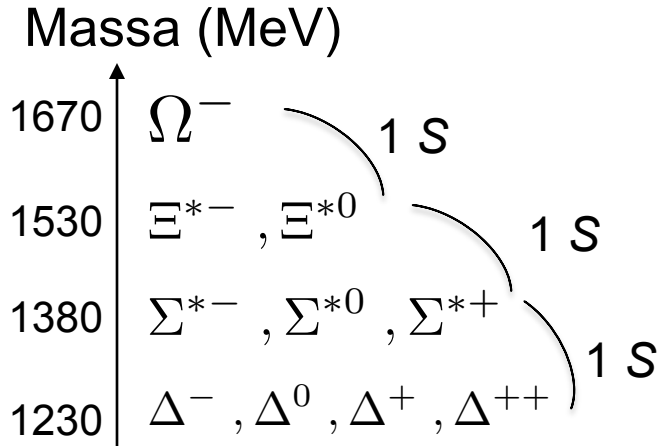
singoletto di SU(3)

Spettro dei barioni

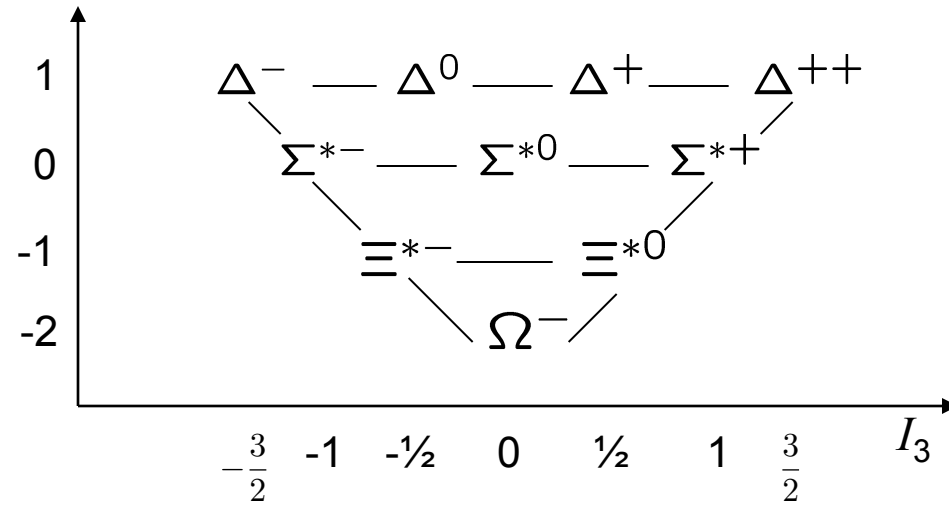
barioni $J^P=3/2^+$

notazione spettroscopica

J^P (P parity)

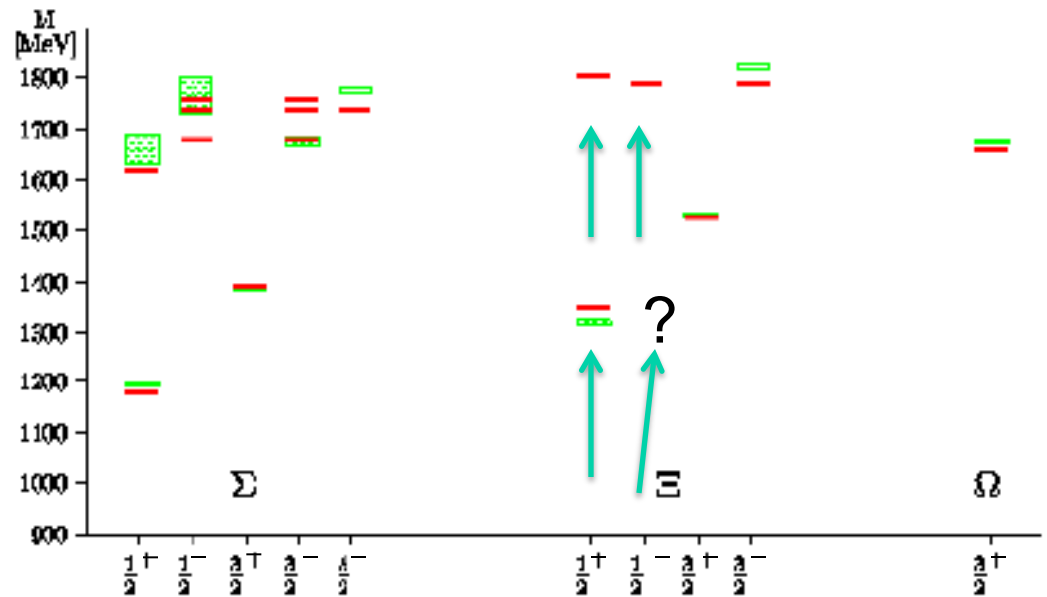
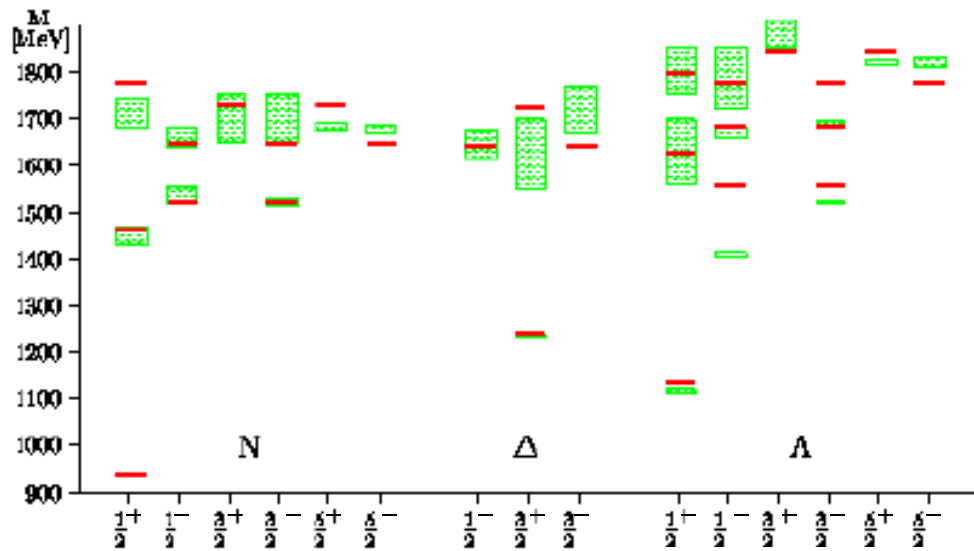


ipercarica $Y = B+S$ (B numero barionico)



decupletto di SU(3)

Lo spettro barionico



Puzzle

- Perché per i mesoni il nonetto di particelle è sempre interpretabile come un ottetto accompagnato da un singoletto con stessa J^P , mentre per i barioni l'ottetto e il singoletto di energia più bassa hanno P opposta ?
- Perché c'è il decupletto per i barioni, ma non per i mesoni ?
- Perché ad alta energia per ogni stato a $P=+$ compare un partner a $P=-$, mentre a bassa energia non succede ?
- Che significato ha il nuovo numero quantico ad hoc S , per cui le particelle sono raggruppate secondo rappresentazioni di $SU(3)$ (e non di $SU(2)$) ?
- Perché si vedono solo le rappresentazioni di singoletto, ottetto, e decupletto, di $SU(3)$, e non anche la rappresentazione fondamentale di tripletto ?

Il quark: particella o concetto astratto?

- Nel 1963 Gell-Mann & Zweig propongono il concetto di quark, cioè di particella elementare con spin $\frac{1}{2}$ e con
 - carica elettrica frazionaria
 - addizionale numero quantico di sapore: up (u), down (d), strange (s) con simmetria $SU(3)_f$
 - massa dipendente dal sapore, con ex. $m_s \sim 150$ MeV
- Lo spettro degli adroni si ricostruisce classificando i mesoni = $\{ q\bar{q} \}$ e i barioni = $\{ qqq \}$

J. Joyce *Finnegans Wake*
 “Three quarks for Muster Mark”

Gell-Mann, Phys. Rev. **92** 833 ('53); **125** 1067 ('62); Phys. Lett. **8** 214 ('64)
 Gell-Mann e Ne'eman, *The eightfold way* (Benjamin, New York, 1964)
 Zweig, CERN report N.8182/TH 401 ('64); N. 8419/TH 412 ('64)
 (Gell-Mann NOBEL 1969)

- Struttura $SU(3)_f$: $\{q\bar{q}\} = \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$
 $\{qqq\} = \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$

ma la rappresentazione **3** non compare mai: i quark sono particelle reali o solo un artificio matematico ?

Simmetrie SU(N): proprietà e rappresentazioni

SU(2)

gruppo delle trasformazioni unitarie U, rappresentate da matrici unitarie 2x2, che lasciano invariata la norma delle rappresentazioni del gruppo:

$$\chi' = U\chi ; \quad \chi'^+ \chi' = \chi^+ U^+ U\chi = \chi^+ \chi$$



espressione generale per U corrispondente a rotazione θ intorno a \hat{n} :

$$U = e^{\frac{1}{2}i\theta\hat{n}\cdot\sigma}$$

generatori della trasformazione sono matrici 2x2 hermitiane a traccia nulla
le matrici di Pauli σ



rappresentazione più comune per le 3 σ indipendenti:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

algebra dei generatori: $\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j \right] = i\varepsilon_{ijk} \frac{1}{2}\sigma_k \quad \varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = 1$

SU(2) : classificazione multipli e operatore di Casimir

σ_3 è diagonale \rightarrow gli stati di un multipletto di SU(2) sono caratterizzati da $\langle \frac{1}{2} \sigma_3 \rangle$



operatori di innalzamento/abbassamento $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm i \sigma_2)$
soddisfano $[\frac{1}{2} \sigma_3, \sigma_{\pm}] = \pm \sigma_{\pm}$ $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3$



operatore di Casimir commuta con tutti i generatori

$$C = \frac{1}{2} (\sigma_+ \sigma_- + \sigma_- \sigma_+) + \frac{1}{4} (\sigma_3)^2 = (\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma})^2$$



per generica rappresentazione di SU(2) a dim. N : $\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ (2x2) \rightarrow \mathbf{S} (NxN)
stati identificati da S_3 , $C = \mathbf{S}^2$

$[S_{\pm}, \mathbf{S}^2] = 0 \rightarrow S_{\pm}$ connettono stati con $\Delta \langle S_3 \rangle = \pm 1$ e stesso $\langle \mathbf{S}^2 \rangle$
 \rightarrow rappresentazione identificata da autovalore di S^2 e i suoi stati da autovalori di S_3

$S = \max \{ \text{autovalori di } S_3 \} \rightarrow N = 2S+1 \rightarrow$ autovalore di C è $S(S+1)$

Ex: $S = \frac{1}{2}$ rappresentazione fondamentale a dim.2; $C = \frac{3}{4}$



SU(2) : esempio isospin

rappresentazione fondamentale a dim. 2: $I=1/2$ $C = 3/4$ doppietto p ($I_3=+1/2$)
 n ($I_3=-1/2$)
rappresentazione regolare a dim. $2^2-1=3$: $I=1$ $C = 2$ tripletto π^\pm ($I_3=\pm 1$)
 π^0 ($I_3=0$)

$$\text{Hamiltoniana } \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{str}} + \mathcal{H}_{\text{em}}$$

indipendenza della forza forte dalla carica \rightarrow invarianza per iso-rotazioni

$$[\mathcal{H}_{\text{str}}, I_i] = 0 \quad i=1,2,3$$

degenerazione multipletti

operatore di carica $Q = 1/2 B + I_3 \rightarrow [\mathcal{H}_{\text{em}}, I_i] \neq 0$



rottura (piccola) della degenerazione
simmetria di isospin è approssimata

SU(2) : rappresentazione coniugata

rappresentazione fondamentale a dim. 2

$$\chi = \begin{vmatrix} u \\ d \end{vmatrix} = u(I_3 = +\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + d(I_3 = -\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Ex: isospin $u = p$, $d = n$

rappresentazione coniugata 2^* $\phi = \begin{vmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{vmatrix}$

Ex: \bar{p} , \bar{n}

trasformazione per iso-rotazione θ intorno a \hat{y}

$$\chi' = U \chi$$

$$U \equiv e^{\frac{1}{2}i\theta\hat{y}\cdot\tau}$$



N.B. matrici di Pauli $\sigma = \tau$ per isospin

se rappresentazione coniugata definita come $\phi = \begin{vmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{vmatrix} \rightarrow \phi' = U \phi$

cioè rappresentazioni $2 \Leftrightarrow 2^*$

in generale $N \not\Leftrightarrow N^*$



SU(2) : rappresentazione regolare

rappresentazione fondamentale dim. 2: generatori σ , algebra $\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\varepsilon_{ijk} \frac{1}{2}\sigma_k$
 per SU(N) rappresentazione fondamentale ha dim. N e generatori matrici NxN

rappresentazione regolare ha dim. = nr. dei generatori = N²-1
 per N=2 dim. =3, generatori **S** sono matrici 3x3 con algebra $[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk} S_k$
 rappresentazione più comune

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

S_3 diagonale: base canonica $|\pi^+ \rangle \equiv \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, |\pi^0 \rangle \equiv \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, |\pi^- \rangle \equiv \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

base "iso-vettoriale" $|\pi_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^+ \rangle - |\pi^- \rangle), |\pi_2 \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|\pi^+ \rangle + |\pi^- \rangle), |\pi_3 \rangle \equiv |\pi^0 \rangle$

costruzione della rappresentazione attraverso costanti di struttura dell'algebra:

$$\langle \pi_j | S_i | \pi_k \rangle = -i \varepsilon_{ijk}$$



vale in generale per SU(N) con M generatori