

Riassunto della lezione precedente

- compatibilità tra funz. d'onda $SU(6)_S$ e statistica Fermi-Dirac per barioni; parastatistica fermionica dei quark; singoletto di $SU(3)_C$ di colore e confinamento dei quark; colore non è numero quantico misurabile
- vari motivi per introdurre nuovo numero quantico per i quark (colore), spettroscopici e dinamici: problemi e soluzioni
- ripercorriamo la stessa necessità di ipotizzare i quark con n. quantici di spin/sapore/colore seguendo la dinamica, cioè il Deep-Inelastic Scattering (DIS) e la nascita e il successo del modello a partoni di Feynman

Diffusione

leptone

–

adrone

(elettrone, neutrino, muone)

(nucleone, nucleo, fotone)

- Quantum ElectroDynamics (QED) nota ad ogni ordine

- sonda leptonica esplora tutto il volume del bersaglio

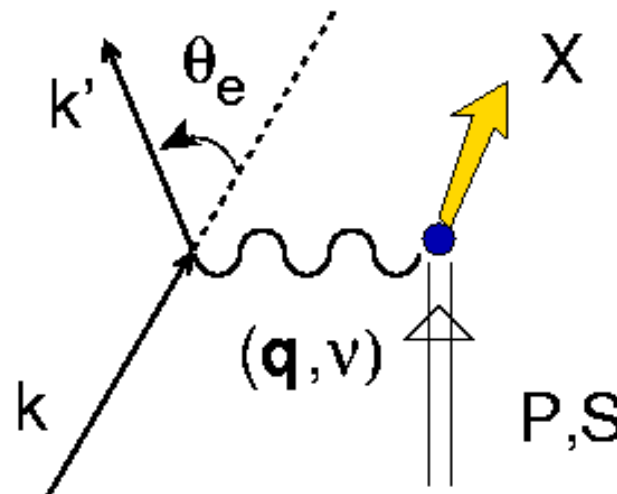
- $\alpha_{em} \sim$ costante struttura fine piccola \rightarrow sviluppo perturbativo possibile

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

- approssimazione di Born (scambio di un fotone solo) è accettabile

- fotone virtuale (γ^*): (\mathbf{q}, ν) indipendenti, risposta longitudinale e trasversa rispetto alla polarizzazione di γ^*

prototipo
 $e+p \rightarrow e'+X$



3 vettori indipendenti
 k, k', P
+ lo spin S
 θ_e angolo di diffusione

definizioni e cinematica

e^- ultrarelativistico $m_e \ll |\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|$
 Target Rest Frame (TRF)

$$\begin{aligned}
 P &= (M, \mathbf{0}) \\
 k &= (\sqrt{m_e^2 + |\mathbf{k}|^2}, 0, 0, |\mathbf{k}|) \\
 &\sim (E, 0, 0, E) \\
 k' &= (\sqrt{m_e^2 + |\mathbf{k}'|^2}, |\mathbf{k}'| \sin \theta_e, 0, |\mathbf{k}'| \cos \theta_e) \\
 &\sim (E', E' \sin \theta_e, 0, E' \cos \theta_e) \\
 q &= k - k' = (E - E', \mathbf{k} - \mathbf{k}')
 \end{aligned}$$

Invarianti cinematici

$$\begin{aligned}
 P^2 &= M^2 \quad ; \quad S^2 = 1 \quad ; \quad P \cdot S = 0 \\
 k^2 &= k'^2 = m_e^2 \sim 0 \\
 q^2 &\sim -2EE'(1 - \cos \theta_e) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \leq 0 \\
 \implies Q^2 &\equiv -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \geq 0
 \end{aligned}$$

Invarianti cinematici (continua)

$$\nu = \frac{P \cdot q}{M} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{M(E - E')}{M} = E - E' \quad \text{energia trasferita}$$

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{M(E - E')}{ME} = \frac{E - E'}{E} \quad \text{frazione di energia trasferita}$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$x_B = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{Q^2}{2M\nu}$$

$$0 \leq x_B \leq 1$$

limite elastico
 limite anelastico

massa invariante finale

$$W = (P + q)^2 = M^2 + Q^2 \left(\frac{1}{x_B} - 1 \right) \geq M^2$$

Scelta alternativa : 3 vettori indipendenti $P, (k+k'), (k-k') \equiv q$

Invarianti : $P^2 = M^2$; $(k-k')^2 = q^2 \equiv -Q^2$; $(k+k')^2 \sim Q^2$

$$P \cdot q \stackrel{\text{TRF}}{=} M\nu$$

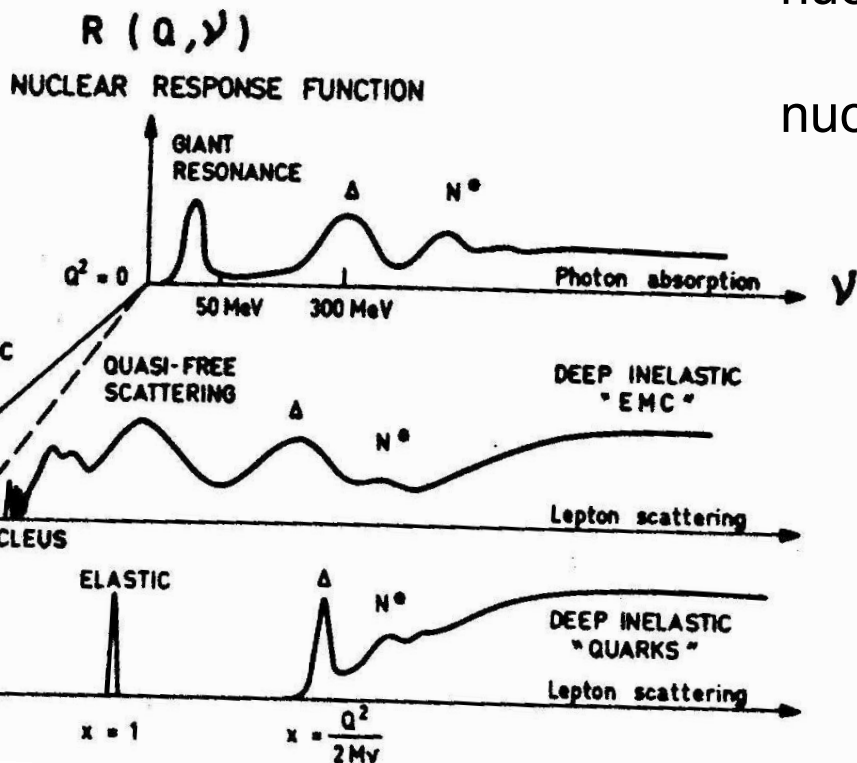
$$P \cdot (k+k') = 2P \cdot k - P \cdot q \stackrel{\text{TRF}}{=} \left(\frac{2}{y} - 1\right) M\nu$$

Q è la “lente di ingrandimento”

Q [GeV]	$\lambda \sim 1/Q$ [fm]	bersaglio
0.02	10	nuclei
0.1	2	
0.2	1	mesoni / barioni
1	0.2	partoni
.....	??

N.B. 1 fm = (200 MeV)⁻¹

Frois, Nucl. Phys. **A434** (' 85) 57c



nucleo M_A $x_A = \frac{Q^2}{2M_A \nu}$

nucleone M $x_B = \frac{Q^2}{2M \nu}$

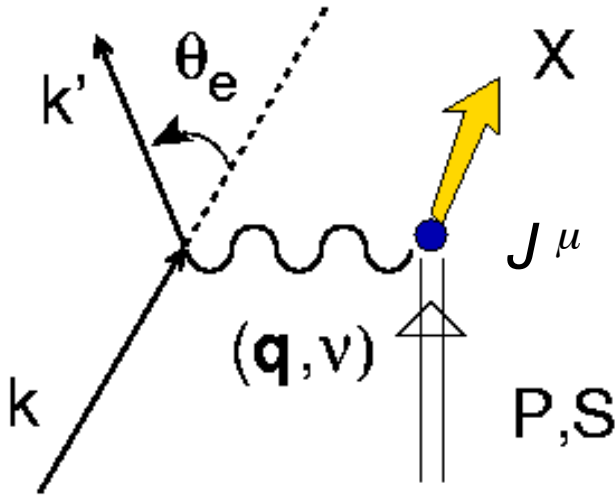
area proibita $\nu \leq \frac{Q^2}{2M_A}$



Sezione d'urto

n° eventi per unita` di tempo, diffusore, angolo solido

n° particelle incidenti per unita` di tempo, superficie



$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{F}} |\mathcal{M}|^2 dR$$

flusso

$$\mathcal{F} = 4\sqrt{(P \cdot k)^2 - P^2 k^2} \stackrel{\text{TRF}}{=} 4ME$$

spazio fasi

$$dR = (2\pi)^4 \delta(P + q - P_X) \frac{dP_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \frac{dk'}{(2\pi)^3 2E'}$$

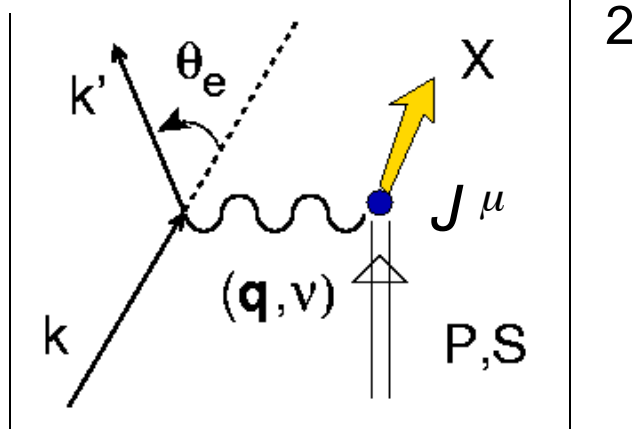
$$\frac{E' dE' d\Omega}{16\pi^3}$$

ampiezza scattering

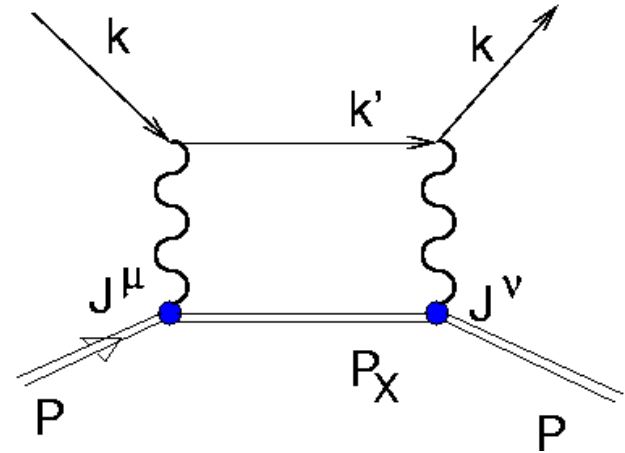
$$\mathcal{M} = \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \frac{e^2}{Q^2} \langle P_X | J^\mu(0) | P, S \rangle$$

Tensore adronico

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spin}}$$



=



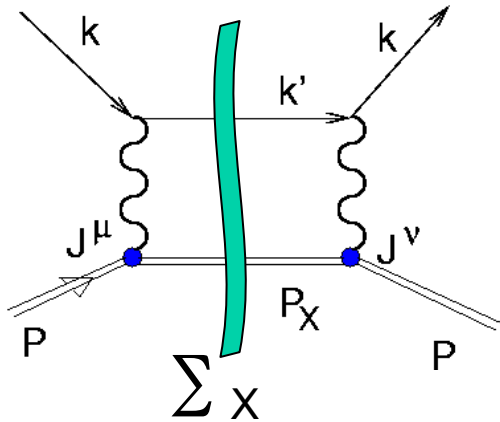
$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$$



tensore leptónico $L^{\mu\nu} = 2k^\mu k'^\nu + 2k^\nu k'^\mu - Q^2 g^{\mu\nu}$

tensore adronico $H^{\mu\nu} = \langle P | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | P \rangle$

Scattering inclusivo



tensore adronico

$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \sum_X \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(P+q-P_X) H^{\mu\nu}$$

sezione d'urto per scattering inclusivo (formula generale)



$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{E'}{E} \frac{\alpha^2}{Q^4} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

$$Q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \quad \text{grandi angoli soppressi !}$$

Scattering inclusivo elastico

$$\sum_X \dots |P_X\rangle \langle P_X| \dots = \dots |P'\rangle \langle P'| \dots \quad W' = (P+q)^2 = M^2$$

tensore
 adronico

$$\begin{aligned}
 2MW^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \sum_X \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(P+q-P_X) H^{\mu\nu} \\
 &= \delta\left((P+q)^2 - M^2\right) H^{\mu\nu} = \delta(2P \cdot q - Q^2) H^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$



$$\stackrel{\text{TRF}}{=} \delta(2M\nu - Q^2) H^{\mu\nu} = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) H^{\mu\nu}$$

$\nu \leftrightarrow Q$: concetto di scaling

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{E'}{E} \frac{\alpha^2}{4M^2 Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

vari
casi

$$\int dE' \frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \frac{\alpha^2}{4M^2 Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$$

Bersaglio = particella scalare libera

$$H^{\mu\nu} = \langle P | J^\mu | P' \rangle \langle P' | J^\nu | P \rangle$$

2 vettori indipendenti : $R = P + P'$, $q = P - P'$ $\Rightarrow J^\mu \approx F_1 R^\mu + F_2 q^\mu$
 $F_{1,2}(q^2, P^2, P'^2) = F_{1,2}(q^2)$

conservazione della corrente $q_\mu J^\mu = 0 \rightarrow F_2(q^2) = -\frac{R \cdot q}{q^2} F_1(q^2)$

definizione : $\tilde{P}^\mu = R^\mu - \frac{R \cdot q}{q^2} q^\mu \rightarrow J^\mu = \tilde{P}^\mu F_1(Q^2)$

N.B. per particella on-shell $q \cdot R = 0$; ma in generale per off-shell $q \cdot \tilde{P} = 0$

$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} = \left(2k \cdot \tilde{P} k' \cdot \tilde{P} - \tilde{P}^2 k \cdot k' \right) 2 |F_1(Q^2)|^2$$

$$\stackrel{\text{TRF}}{\sim} 16EE' M^2 |F_1(Q^2)|^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2}$$



Scattering inclusivo elastico su particella scalare libera

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} E'^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \frac{E'}{E} |F_1(Q^2)|^2 \equiv \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} |F_1(Q^2)|^2$$



Coulomb scattering elastico da
particella puntiforme

rinculo
bersaglio

struttura
bersaglio

Breit frame \Rightarrow fattore di forma

$$P = -q/2$$



$$P' = +q/2$$

$$v = 0$$

$$R^\mu = (2E, \mathbf{0})$$

$$q^\mu = (0, \mathbf{q})$$

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{0}) \approx 2E F_1(Q^2)$$



$$F_1(Q^2) \rightarrow F_1(|\mathbf{q}|^2) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

↑
fattore di forma di
carica
materia
.....

↑
distribuzione di
carica
materia
.....

Bersaglio = particella di Dirac libera puntiforme

Esempio: $e^- + \mu^- \rightarrow e'^- + \mu^-$

$$J^\mu = \bar{u}(P') \gamma^\mu u(P)$$

$$H^{\mu\nu} \equiv L^{\mu\nu} \quad \text{with } k^{(l)} \leftrightarrow P^{(l)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\not{P}' + M) \gamma^\mu (\not{P} + M) \gamma^\nu \right] \\ &= 2 \left[P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - (P \cdot P' - M^2) g^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$



$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \stackrel{\text{TRF}}{=} 16EE'M^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right)$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left(1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right)$$

interazione
magnetica di
spin con γ^*