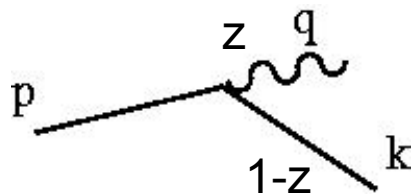


Riassunto della lezione precedente

- regola di somma GDH:
test di transizione da regime perturbativo a nonperturbativo
regola di somma di Bjorken polarizzata: rapporto g_A/g_V
- necessità di introdurre correzioni radiative a QPM
→ IQPM inglobato nella pQCD
- rinormalizzazione di teoria di gauge: cancellazione divergenze ultraviolette;
eq. di Callan-Symanzik; running coupling; β function
- teorie di gauge con quanti massless: divergenze infrarosse e collineari;
fattorizzazione collineare
- radiazione di quanti massless, vertice di Altarelli-Parisi in QED e QCD

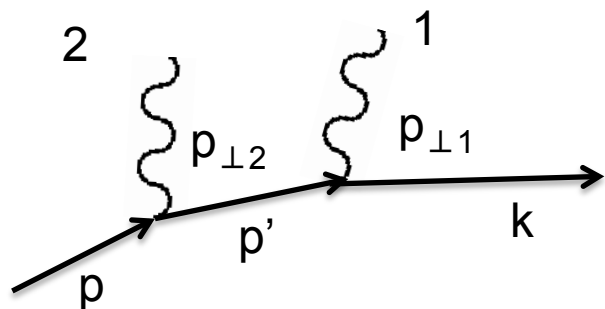


analogamente per $\gamma(q)$ reale e $e^-(k)$ virtuale \approx reale

$$\delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dp_{\perp}^2}{p_{\perp}^2} \left[\frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right]$$

$$x = 1-z$$

$P_{ee}(z)$ nel senso delle distribuzioni



$$p_{\perp 2} \ll p_{\perp 1} \Rightarrow p'^2 \sim m_e^2$$

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int_{m_e^2}^s \frac{dp_{\perp 1}^2}{p_{\perp 1}^2} \int_{m_e^2}^{p_{\perp 1}^2} \frac{dp_{\perp 2}^2}{p_{\perp 2}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \log^2 \frac{s}{m_e^2}$$

$$p^2 = m_e^2 \quad p'^2 \sim m_e^2 \quad \dots \quad k^2 \neq m_e^2$$

se $p_{\perp 2} \gg p_{\perp 1}$ non c'è il doppio log
generalizzabile ad emissione di n γ

elettrone sempre più virtuale

se allo step n si vede un e^- , allo step $n+1$ si risolve sua struttura interna e si vede il suo e^- costituente più virtuale + fotone γ , e così via...

allo step intermedio un e^- con $p^2 \sim p_{\perp}^2$ è il costituente dell' e^- fisico quando questo è sondato con risoluzione $1/p_{\perp}$

$\Rightarrow f_e(x, Q) =$ probabilità di trovare e^- con frazione x di energia di e^- fisico

inglobando tutti i γ collineari emessi con $p_{\perp} < Q$



DGLAP eqs. (continua)

$$\frac{d}{d\log Q} f_e(x, Q) = \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \underbrace{\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right]}_{P_{ee}(z) \text{ splitting function}} f_e\left(\frac{x}{z}, Q\right)$$

$P_{ee}(z)$ splitting function

DGLAP eqs. descrivono evoluzione della funz. di struttura f_e al cambiare della scala Q
 equazione integro-differenziale con condizione al contorno $f_e(x, m_e^2) = \delta(1-x)$

Analogamente



QCD

$$P_{ye}(z) = \frac{1 + (1-z)^2}{z}$$

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right]$$

$$P_{ey}(z) = z^2 + (1-z)^2$$

$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1 + (1-z)^2}{z} \right]$$

$$P_{yy}(z) = -\frac{2}{3} \delta(1-z)$$

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2]$$

$$P_{gg}(z) = 6 \left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) \left(\frac{11}{12} - \frac{n_f}{18} \right) \delta(1-z) \right]$$

evoluzione, fattorizzazione: DIS inclusivo

Teorema : (Collins, Soper, Sterman, '89)

$$F_{1/2/3}(x_B, Q^2) = \sum_{i=f, \bar{f}, a} \int_{x_B}^1 \frac{dx}{x} C_{1/2/3} \left(\frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}, \alpha_s(\mu_R^2) \right) \phi_i(x, \mu_F, \mu_R)$$

somma su quark,
antiquark e gluoni

μ_R scala di rinormalizzazione

μ_F scala di fattorizzazione : definisce
ciò che è a brevi distanze $\rightarrow C$

da ciò che è a lunghe distanze $\rightarrow \phi$

N.B. può essere $\mu_F = \mu_R (=Q)$

$$\phi(x, \mu_F, \mu_R)$$

generalizzazione delle
distribuzioni partoniche in QPM

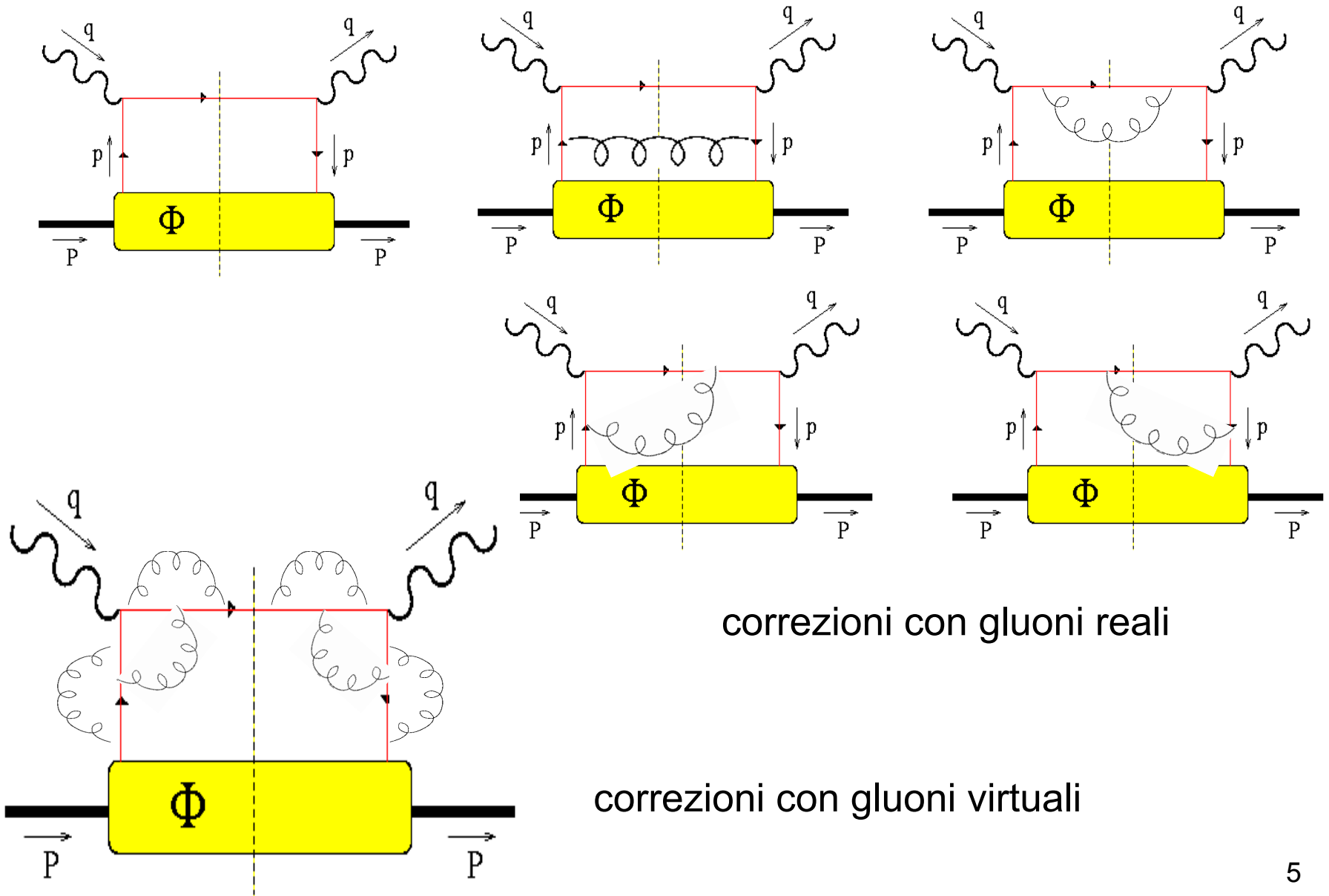
$$C = \left(\frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F}{\mu_R}, \alpha_s(\mu_R) \right)$$

coefficiente di Wilson

generalizzazione delle F^{el} in scattering elastico in QPM

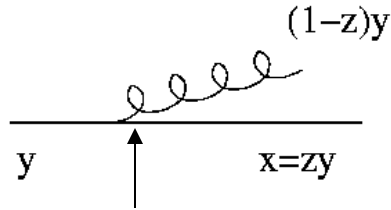
$$C_1^i = \frac{1}{2} \delta_{iq} e_q^2 \delta \left(1 - \frac{x_B}{x} \right) \rightarrow F_1(x_B) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \phi_q(x_B)$$

DIS inclusivo : processi oltre il tree level



Calcolo di C

gluoni reali



quark con momento y può irraggiare un gluone e riscaldare il suo momento a x

divergenze collineari per $z \rightarrow 1$

da riassorbire in ϕ , perché connesse all'evoluzione del singolo q , indipendenti dall'interazione

vertice di Altarelli-Parisi

determina l'evoluzione in Q^2 di ϕ , determina cioè il suo contenuto partonico

$$s = (p + q)^2 \sim 2p \cdot q - Q^2 = Q^2 \frac{1 - x_B}{x_B} \quad \text{divergenze soft per } x_B \rightarrow 1 \text{ (s} \rightarrow 0 \text{)}$$

non riassorbibili in ϕ , perché riguardano gluone nello stato finale

non riassorbibili in C perché C è I.R.-safe e si romperebbe fattorizzazione

gluoni virtuali quark on-shell nel taglio $\rightarrow \delta((p+q)^2) \approx x_B/Q^2 \delta(x_B - 1)$

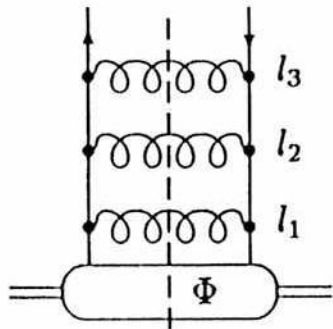
in approssimazione collineare, cancellazione sistematica delle divergenze soft con gluone reale = “fattorizzazione collineare”

calcolo dei diagrammi con regolarizzazione dimensionale $d = 4 - 2\varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$)

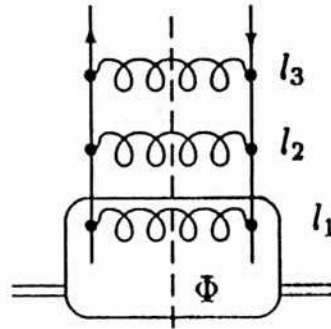
\rightarrow scala fittizia μ_d e compaiono poli $\sim 1/\varepsilon$

Evoluzione

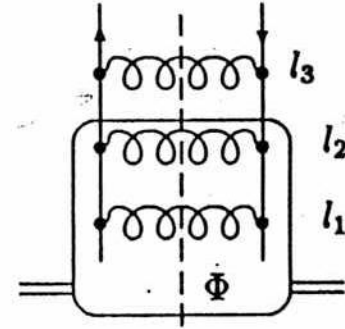
scala $Q^2 = \mu_F^2 \rightarrow$ al variare di μ_F la funzione di splitting determina il contenuto partonico della distribuzione ϕ , discrimina cioè ciò che va inglobato in ϕ (essendo off-shell $< \mu_F$) da ciò che va inglobato in C (essendo off-shell $> \mu_F$)



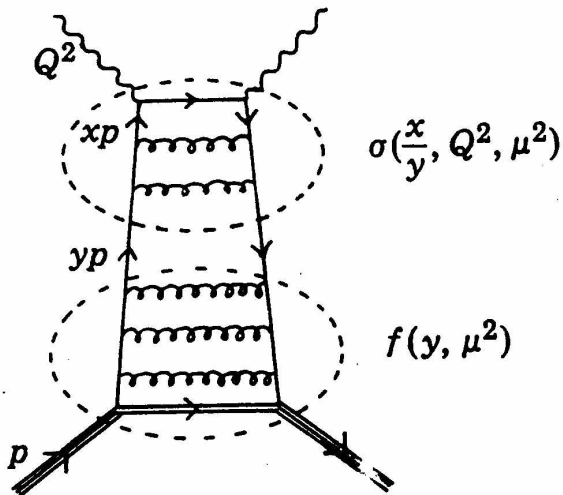
$$\boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{1T}^{-2} \leq \tilde{l}_{2T}^{-2} \leq \tilde{l}_{3T}^{-2}$$



$$\tilde{l}_{1T}^{-2} \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{2T}^{-2} \leq \tilde{l}_{3T}^{-2}$$



$$\tilde{l}_{1T}^{-2} \leq \tilde{l}_{2T}^{-2} \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{3T}^{-2}$$



al variare di μ_F la situazione cambia
 \rightarrow Evoluzione DGLAP

assorbiti in $\phi < \mu_F <$ assorbiti in C



$$F_1(x, Q^2) \sim \int_x^1 \frac{dz}{z} f_1^{bare} \otimes \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \log \left(\frac{Q^2}{\mu_d^2} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F P_{qq} \left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) + \dots \right\} \otimes \phi$$



cancellazione singolarità e dipendenza da μ_d

$$f_1 \equiv f_1^{bare} \otimes \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \log \left(\frac{\mu_F^2}{\mu_d^2} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F P_{qq} \left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) + \dots \right\}$$

DIS

MS

la scala di partenza dell'evoluzione (ad es. Q_0^2) è arbitraria

→ assegnare contributi a ϕ o a C è arbitrario

→ necessità di definire uno schema in cui calcolare l'evoluzione e confrontarsi con i dati consistentemente

diverse scelte: **schema DIS** (Altarelli, Ellis, Martinelli, '79) QPM esatto a Q_0^2

schema MS (Bardeen *et al.*, '78 ; Furmanski & Petronzio, '82 ; Collins & Soper, '82)

potere predittivo di DGLAP:

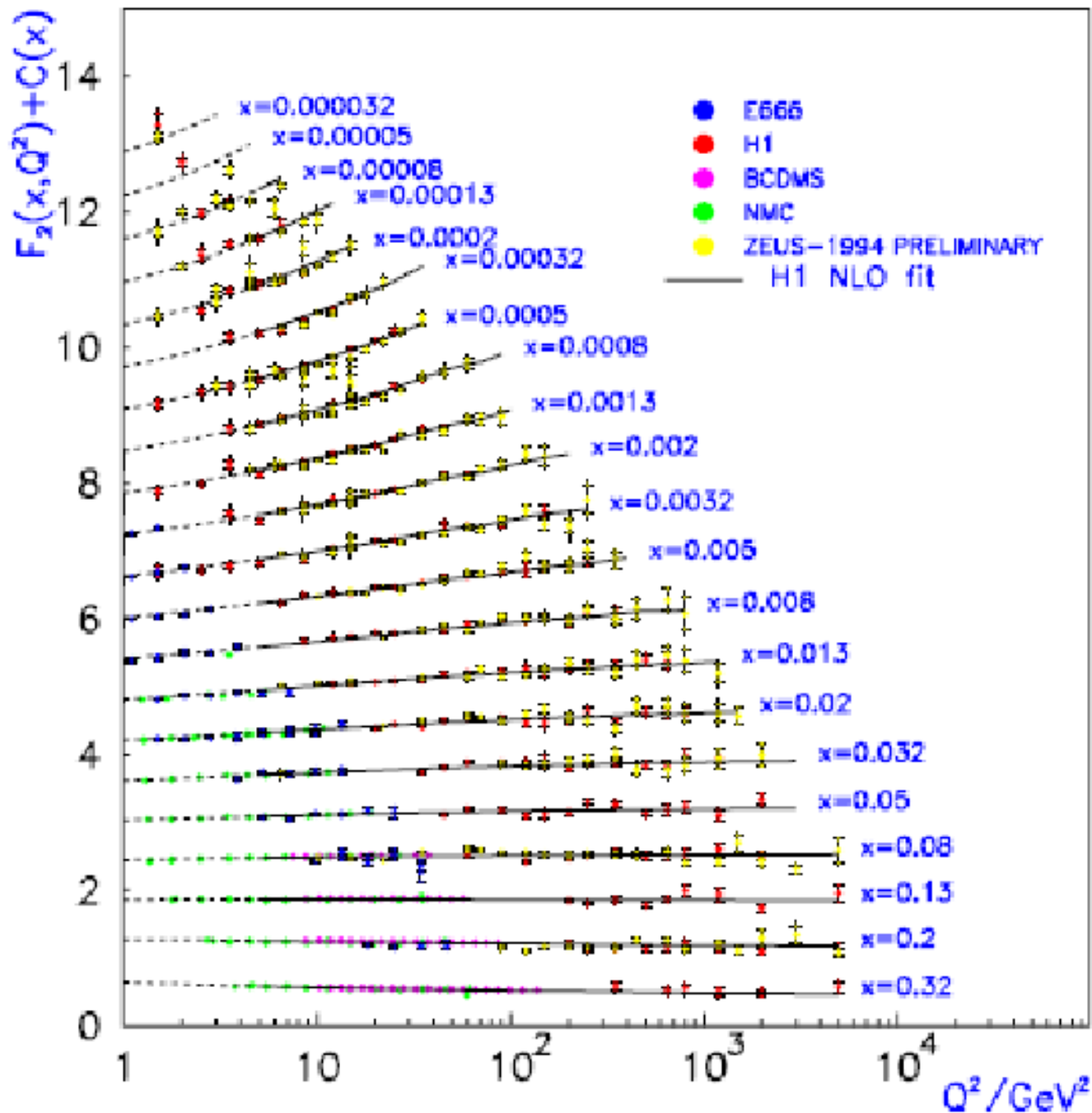
noto il risultato a Q_0^2 → DGLAP danno risultato alla scala $Q^2 \neq Q_0^2$

DGLAP + fattorizzazione

→ universalità delle distribuzioni partoniche

(definite ad una stessa scala μ_F e nello stesso schema)

⇒ ampio potere predittivo della pQCD !



evoluzione & fattorizzazione: teorema

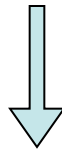
fattorizzazione in DIS inclusivo \rightarrow convoluzione:

$$F_1(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} C\left(\frac{x}{z}, \dots\right) \phi(z, \dots) \equiv C \otimes \phi$$

trasformata di Mellin di ordine N $f_N = \int_0^1 dx x^{N-1} f(x)$

risulta $(f \otimes g)_N = f_N \cdot g_N$

invarianza della fisica dalla scala di fattorizzazione μ_F : $\frac{dF_1}{d \log \mu_F^2} = 0$



$$\gamma_N[\alpha_s(Q^2)] = (P_+)_N$$

dimensioni anomale sono trasformate di Mellin di ordine N delle splitting functions (kernel delle eq. DGLAP di evoluzione)



DIS semi-inclusivo

vale un teorema analogo a DIS inclusivo purché per i partoni $\mathbf{p}_T \ll Q$

e^+e^- inclusivo

Teorema : la sezione d'urto totale è finita nel limite di particelle senza massa, cioè è libera da divergenze “infrarosse” (IR)

(Sterman, '76, '78)

[generalizzazione del teorema KLN (Kinoshita-Lee-Nauenberg)]

$$\sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \sum_f e_f^2 \sum_n s_n \alpha_s^n(Q^2) \quad s_0 = 1$$



QPM

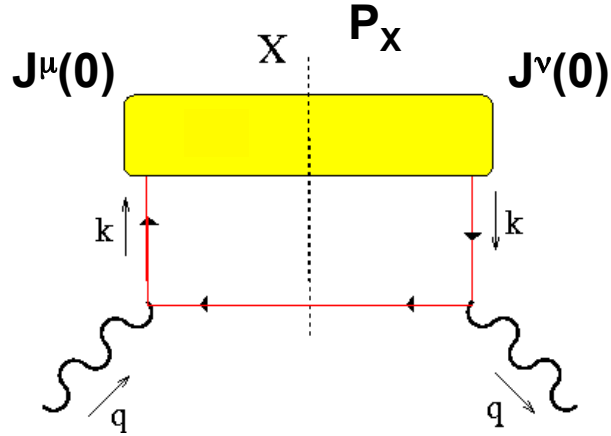
correzioni di pQCD

Drell-Yan

Teorema di fattorizzazione

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dy d\Omega} = \sum_{f_1, f_2} \int_{x_1}^1 d\xi_1 \int_{x_2}^1 d\xi_2 \phi_{f_1}(\xi_1, \mu_F) \frac{d\sigma^{el}}{dQ^2 dy d\Omega} \left(\frac{x_1}{\xi_1}, \frac{x_2}{\xi_2}, \Omega, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_F) \right) \phi_{f_2}(\xi_2, \mu_F) + o\left(\frac{1}{Q^2}\right)$$

e^+e^- inclusivo



$$\begin{aligned}
 W^{\mu\nu} &= \int \frac{dP_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(q - P_X) \\
 &\quad \langle 0 | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle \\
 &= \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle
 \end{aligned}$$



Teorema: contributo dominante nel limite di Bjorken viene da corte distanze



$$\xi \rightarrow 0$$

ma prodotto di operatori nello stesso punto spazio-temporale non è sempre ben definito in teoria di campo!

(continua)

Esempio: campo scalare neutro libero $\phi(x) \rightarrow$ propagatore libero $\Delta(x-y)$

$$\begin{aligned}\langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle &= -i\Delta(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{m}{4\pi^2} \frac{K_1 \left(m \sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon} \right)}{\sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon}} - \frac{i}{4\pi} \delta((x-y)^2) \xrightarrow{x \rightarrow y} \infty\end{aligned}$$

K_1 funz. Bessel modificata
del 2° tipo

Operator Product Expansion

(Wilson, '69 prima congettura; Zimmermann, '73 dimostrazione in teoria perturbazioni;
Collins, '84 dimostrazione diagrammatica)

definizione (anche operativa) di operatore composito:

$$\hat{A}(x) \hat{B}(y) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y) \hat{O}_i\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

- gli operatori locali \hat{O}_i sono regolari nell' argomento per ogni $i=0,1,2,\dots$
- la divergenza per $x \rightarrow y$ è assorbita nei coefficienti C_i
- i termini sono ordinati per singolarità decrescenti in C_i , $i=0,1,2,\dots$
- di solito $\hat{O}_0 = \mathbf{I}$, ma espressione esplicita dell' espansione va trovata separatamente per ogni tipo di processo
- OPE è anche una definizione operativa perché può essere usata per definire un operatore composito regolare.

Esempio : teoria ϕ^4 , l' operatore composito $\phi(x)^2$ può essere costruito come

$$\phi(x)^2 \equiv \lim_{x \rightarrow y} \frac{\phi(x) \phi(y) - C_0(x-y)}{C_1(x-y)} = \hat{O}_1(x)$$

Esempio di OPE: il teorema di Wick

campo scalare $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} [a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}]$

ordine “normale” : : = spostare a^\dagger a sinistra, a a destra \rightarrow annichilano su $|0\rangle$
 ordine “temporale” \mathcal{T} = ordinare campi a tempi crescenti verso sinistra

Step 1 $\mathcal{T}\phi(x) = : \phi(x) :$

Step 2 $[\mathcal{T}\phi(x_1)]\phi(x_2) = \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] = : \phi(x_1) : \phi(x_2)$

$t_2 < t_1$ $= \phi(x_1)\phi^+(x_2) + \phi(x_1)\phi^-(x_2) = \phi(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^-(x_2)$
 $+ \phi^+(x_1)\phi^-(x_2)$

analogo per $t_2 > t_1$

$+ \phi^-(x_2)\phi^+(x_1) + [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)]$

Quindi

$\mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] = : \phi(x)\phi(y) : + \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)] | 0 \rangle$
 $= \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle$

$\lim_{x \rightarrow y}$

$\lim_{x \rightarrow y}$

$= 1 \cdot \hat{O}_1(x) + C_0(x - y) \cdot \mathbb{I}$



generalizzazione
ricorsiva

analogamente per campi fermionici non interagenti

$$\mathcal{T} [\psi(x)\bar{\psi}(y)] = : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \langle 0 | \mathcal{T} [\psi(x)\bar{\psi}(y)] | 0 \rangle$$

formula generale del teorema di Wick: $\phi_i \overset{\square}{\phi}_j \equiv \langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x_i)\phi(x_j)] | 0 \rangle$

$$\mathcal{T} [\phi_1\phi_2\dots\phi_n] = : \phi_1\phi_2\dots\phi_n :$$

$$+ \sum_{i \neq j=1}^n P_{ij} : \phi_1 \dots \phi_{i-1} \phi_{i+1} \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_n : \overset{\square}{\phi}_i \phi_j$$

$$+ \sum_{i \neq j \neq k \neq l=1}^n : \phi_1 \dots \phi_{i-1} \phi_{i+1} \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_{k-1} \phi_{k+1} \dots \phi_{l-1} \phi_{l+1} \dots \phi_n :$$

$$\left(P_{ijkl} \overset{\square}{\phi}_i \overset{\square}{\phi}_j \phi_k \phi_l + P_{ikjl} \overset{\square}{\phi}_i \phi_k \overset{\square}{\phi}_j \phi_l + P_{iljk} \overset{\square}{\phi}_i \phi_l \overset{\square}{\phi}_j \phi_k \right)$$

+....

$$P_{ij} = (-1)^m$$

$m = n^0$ di permutazioni per riportare gli indici nell'ordine naturale $1, \dots, i-1, i, \dots, j-1, j, \dots, n$

Applicazione a e^+e^- inclusivo

$W^{\mu\nu} \Rightarrow [J^\mu(\xi) J^\nu(0)]$ con J^μ la corrente e.m. di quark