

Riassunto della lezione precedente

- evoluzione DGLAP e teoremi di fattorizzazione; coefficienti di Wilson, scale di fattorizzazione e schemi di calcolo
- e^+e^- inclusivo: $W^{\mu\nu}$ come trasformata di Fourier di operatore bilocale; contributo dominante a corte distanze: operatore mal definito
- Operator Product Expansion (OPE): definizione (operativa) di prodotto di due operatori come serie di operatori locali regolari a corte distanze; dimostrazione rigorosa di fattorizzazione
- il teorema di Wick come esempio di OPE

Applicazione a e^+e^- inclusivo

$W^{\mu\nu} \Rightarrow [J^\mu(\xi) J^\nu(0)]$ con J^μ la corrente e.m. di quark

prodotto normale : : utile per definire un operatore composito per $\xi \rightarrow 0$

\Rightarrow studiare $T [J^\mu(\xi) J^\nu(0)]$ per $\xi \rightarrow 0$ con il teorema di Wick

$$\mathcal{T} [J^\mu(\xi) J^\nu(0)] =$$

$$\begin{aligned} & : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) : + : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \gamma^\nu \psi(0) : \psi(\xi) \bar{\psi}(0) + \\ & : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \gamma^\mu \psi(\xi) : \psi(0) \bar{\psi}(\xi) - \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \psi(0) \bar{\psi}(\xi) \end{aligned}$$

$$= \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] S_F(-\xi) S_F(\xi) - : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \gamma^\nu \psi(0) : i S_F(\xi)$$

$$- : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \gamma^\mu \psi(\xi) : i S_F(-\xi) + : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) :$$

$$\psi(\xi) \bar{\psi}(0) = \langle 0 | \mathcal{T} [\psi(\xi) \bar{\psi}(0)] | 0 \rangle = -i S_F(\xi) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot \xi}}{p - m + i\epsilon}$$

divergente per $\xi \rightarrow 0 \Rightarrow$ OPE



Singularità del propagatore fermionico libero

$$S_F(\xi) = (i \not{\partial} + m) \Delta(\xi)$$

$$\Delta(\xi) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot \xi}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = i \frac{m}{4\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K_1 \left(m \sqrt{-\xi^2 + i\epsilon} \right)}{\sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} + \frac{1}{4\pi} \delta(\xi^2)$$

$$\stackrel{\xi \rightarrow 0}{\sim} \frac{im}{4\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m \sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} + \text{termini meno singolari}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\xi^2 - i\epsilon} + \text{termini meno singolari}$$

↑
singolarità light-cone

↓
grado di singolarità proporzionale a potenza di q in trasformata di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{iq \cdot x}}{(x - i\epsilon)^\alpha} = \frac{2\pi e^{i\alpha\pi/2}}{\Gamma(\alpha)} \theta(q) q^{\alpha-1}$$

singularità più alta in
coefficienti di OPE

↓
contributo dominante di J^μ in $W^{\mu\nu}$

(continua)

$$S_F(\xi) = (i\gamma \cdot \partial + m) \Delta(\xi) \sim (i\gamma \cdot \partial + m) \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{\xi^2 - i\epsilon} + \dots$$
$$= \frac{-2\gamma \cdot \xi}{(\xi^2 - i\epsilon)^2} \frac{i}{4\pi^2 i} + \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{m}{\xi^2 - i\epsilon} + \text{termini meno singolari}$$



termine piu` singolare in T [J^μ(ξ) J^ν(0)]

$$\text{Tr} [S_F(-\xi) \gamma^\mu S_F(\xi) \gamma^\nu] \sim -\frac{4}{16\pi^4 (\xi^2 - i\epsilon)^4} \text{Tr} [\xi \gamma^\mu \xi \gamma^\nu] + \dots$$
$$= \frac{\xi^2 g^{\mu\nu} - 2\xi^\mu \xi^\nu}{\pi^4 (\xi^2 - i\epsilon)^4} + \dots$$



termine meno singolare in T [J^μ(ξ) J^ν(0)]

$$: \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) : = \hat{O}(\xi, 0) \quad \text{operatore bilocale regolare}$$

(continua)

termini intermedi

$$\begin{aligned} & - : \bar{\psi}(\xi) \gamma_\mu i S_F(\xi) \gamma_\nu \psi(0) : - : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu i S_F(-\xi) \gamma_\mu \psi(\xi) : \\ & \sim \frac{i \xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} : \bar{\psi}(\xi) \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu \psi(\xi) : + \dots \\ & = \frac{i \xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} \left(\sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) + i \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) \right) \end{aligned}$$



$$\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu = \left(\sigma_{\mu\lambda\nu\rho} + i \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \gamma_5 \right) \gamma^\rho$$

$$\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu = \left(\sigma_{\mu\lambda\nu\rho} - i \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \gamma_5 \right) \gamma^\rho$$

$$\sigma_{\mu\lambda\nu\rho} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) = : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\rho \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma^\rho \psi(\xi) :$$

$$\hat{O}_A^\rho(\xi, 0) = : \bar{\psi}(\xi) \gamma_5 \gamma^\rho \psi(0) + \bar{\psi}(0) \gamma_5 \gamma^\rho \psi(\xi) :$$

operatori bilocali regolari

(continua)

riassumendo :

$$\mathcal{T} [J_\mu(\xi) J_\nu(0)] = \frac{\xi^2 g_{\mu\nu} - 2\xi_\mu \xi_\nu}{\pi^4 (\xi^2 - i\epsilon)^4} + \frac{i\xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) - \frac{\xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0)$$

- $\hat{O}_{V/A}^\mu(\xi, 0)$ e $\hat{O}^{\mu\nu}(\xi, 0)$ sono operatori bilocali regolari per $\xi \rightarrow 0$;
contengono informazioni sul comportamento a lunghe distanze
- i coefficienti sono singolari per $\xi \rightarrow 0$ (ordinati per singolarità decrescente);
contengono informazioni sul comportamento a corte distanze
- fattorizzazione tra corte e lunghe distanze rigorosa ad ogni ordine

applicazione: e⁺e⁻ inclusivo

$$W^{\mu\nu} = \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle$$

$$J^\mu(x) = \sum_f e_f^2 \sum_c : \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \psi_f(x) :$$

$$\begin{aligned} \epsilon(\xi^0) [J_\mu(\xi), J_\nu(0)] &= \frac{i(2\xi_\mu\xi_\nu - \xi^2 g_{\mu\nu})}{3\pi^3} \partial^3(\xi^2) + \frac{\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) \\ &+ \frac{i\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, \xi) \end{aligned}$$



$$\int d^4x e^{iq\cdot x} \langle 0 | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | 0 \rangle$$

$$\sim \int d^4x e^{iq\cdot x} \epsilon(x^0) \langle 0 | \frac{i}{3\pi^3} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) | 0 \rangle$$

$$= \frac{i}{3\pi^3} \left(g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial q} - 2 \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right) \underbrace{\int d^4x e^{iq\cdot x} \epsilon(x^0) \partial^3(x^2)}$$

$$= \frac{1}{6\pi} \epsilon(q^0) \theta(q^2) (4q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_3(\mathbf{q}) \quad I_n(q) &= \int d^4x e^{iq\cdot x} \epsilon(x^0) \partial^n(x^2) \\ &= \frac{i\pi^2}{4^{n-2}(n-1)!} (q^2)^{n-1} \epsilon(q^0) \theta(q^2) \end{aligned}$$



(continua)

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{2} \frac{e^4}{2s^3} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$



$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | 0 \rangle$$
$$\sim \frac{1}{6\pi} \epsilon(q^0) \theta(q^2) (4q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})$$

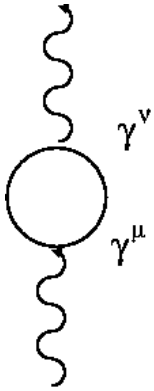


$$\sigma_{tot} = \frac{e^4}{4\pi} \frac{1}{6s^3} L^{\mu\nu} (4q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \epsilon(q^0) \theta(q^2) \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$



(continua)

partendo contributo dominante :



$$W_{\mu\nu} = \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \frac{i}{3\pi^3} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) | 0 \rangle$$
$$= \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \text{Tr} [S_F(x) \gamma^\mu S_F(-x) \gamma^\nu] | 0 \rangle$$

alla fine risulta $\longrightarrow \sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum_f e_f^2$

risultato di QPM !

Morale : OPE per quark liberi a corte distanze è equivalente a QPM

perchè QPM assume che a corte distanze i quark si comportino come fermioni liberi \rightarrow asymptotic freedom postulata in QPM si ritrova rigorosamente in OPE

applicazione: DIS inclusivo

$$2MW_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle$$

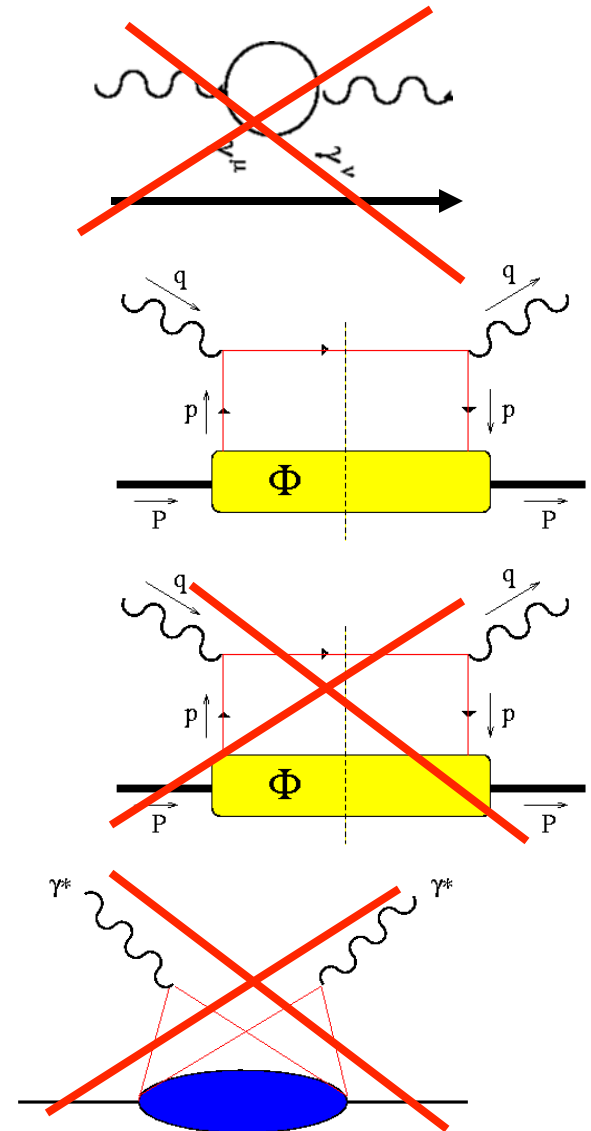
$$= \frac{i}{6\pi^4} \int d^4x e^{iq \cdot x} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) \langle P | P \rangle$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \epsilon(x^0) \partial^1(x^2) \langle P | \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(x, 0) | P \rangle$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \epsilon(x^0) \partial^1(x^2) \langle P | i\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(x, 0) | P \rangle$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \langle P | \hat{O}_{\mu\nu}(x, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, x) | P \rangle$$

no polarizzazione $\rightarrow W_S^{\mu\nu}$



(continua)

$[J^\mu(x), J^\nu(0)]$ dominante per $x^2 \rightarrow 0 \Rightarrow$ espandere $\hat{O}_V(x,0)$ intorno a $x=0$
 operatore bilocale regolare \rightarrow serie infinita di operatori locali regolari

$$\psi(x) = \psi(0) + x^\mu \partial_\mu \psi(x)|_{x=0} + \frac{1}{2!} x^{\mu_1} x^{\mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \psi(x)|_{x=0} + \dots$$

$$\hat{O}_V^\rho(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} : (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \bar{\psi}(x)) \Big|_{x=0} \gamma^\rho \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma^\rho (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi(x)) \Big|_{x=0} :$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\hat{O}_{V \mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0)}$$

poi

$$\sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \dots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \langle P | \hat{O}_{V \mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0) | P \rangle$$

$$\xrightarrow{\text{DIS}} \frac{F_1(x_B)}{M} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{F_2(x_B)}{\nu} \tilde{P}^\mu \tilde{P}^\nu \quad \text{risultato di QPM}$$

OPE procedura generale per campi (non) interagenti

$$J_\mu(x) J_\nu(0) = \sum_{\{\alpha\}} C_{\mu\nu\{\alpha\}}(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_{n_\alpha}} \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_{n_\alpha}}(0)$$

light-cone expansion valida per $x^2 \rightarrow 0$ $\Rightarrow C_{\{\alpha\}}(x^2) \sim \frac{1}{x^{6+n_\alpha-d}}$

$n_\alpha = \text{spin di } \hat{O}$

$d = \text{dimensione canonica di } \hat{O}$

$$W_{\mu\nu} \propto \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle \quad W_{\mu\nu} \text{ dimensionless}$$

$$[d^4x] = 4$$

$$[x^{\mu_1} \dots x^{\mu_{n_\alpha}}] = n_\alpha$$

$$\left[\langle P | P' \rangle = 2E (2\pi)^3 \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \right] = 2$$

$$\left[\langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_{n_\alpha}}(0) | P \rangle = P_{\mu_1} \dots P_{\mu_{n_\alpha}} M^{d-n_\alpha-2} c_{\hat{O}} + o\left(\frac{M^2}{Q^2}\right) \right] = -d+2$$

(continua)



$$\begin{aligned} 2MW_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle \\ &\sim \frac{1}{2\pi^2} \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \epsilon(x^0) \partial^1(x^2) \langle P | \hat{O}_V^\rho(x, 0) | P \rangle \\ &\sim \sum_{\{\alpha\}} \int d^4x e^{iq \cdot x} \left[C_{\mu\nu\{\alpha\}}(x^2) - \left(C_{\mu\nu\{\alpha\}}(x^2) \right)^\dagger \right] x^{\mu_1} \dots x^{\mu_{n_\alpha}} \langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_{n_\alpha}}(0) | P \rangle \\ &\sim c_{\hat{O}} \sum_{\{\alpha\}} c'_{\mu\nu, \{\alpha\}} \left(\frac{M}{\sqrt{q^2}} \right)^{d-n_\alpha-2} \left(\frac{1}{x_B} \right)^{n_\alpha} \sim \frac{1}{(x^2)^{3+\frac{n_\alpha-d}{2}}} \end{aligned}$$

Riassunto

procedura per il calcolo di $W^{\mu\nu}$:

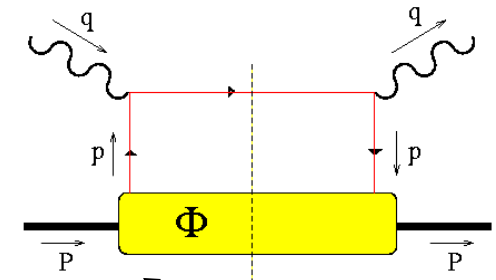
- espansione OPE per operatore bilocale in serie di operatori locali
- trasformata di Fourier di ciascun termine
- somma dei termini ottenuti

- risultato finale esprimibile in serie di potenze di M/Q attraverso il **twist $t (\geq 2) = d$** (dimensione canonica dell'operatore) **- spin**

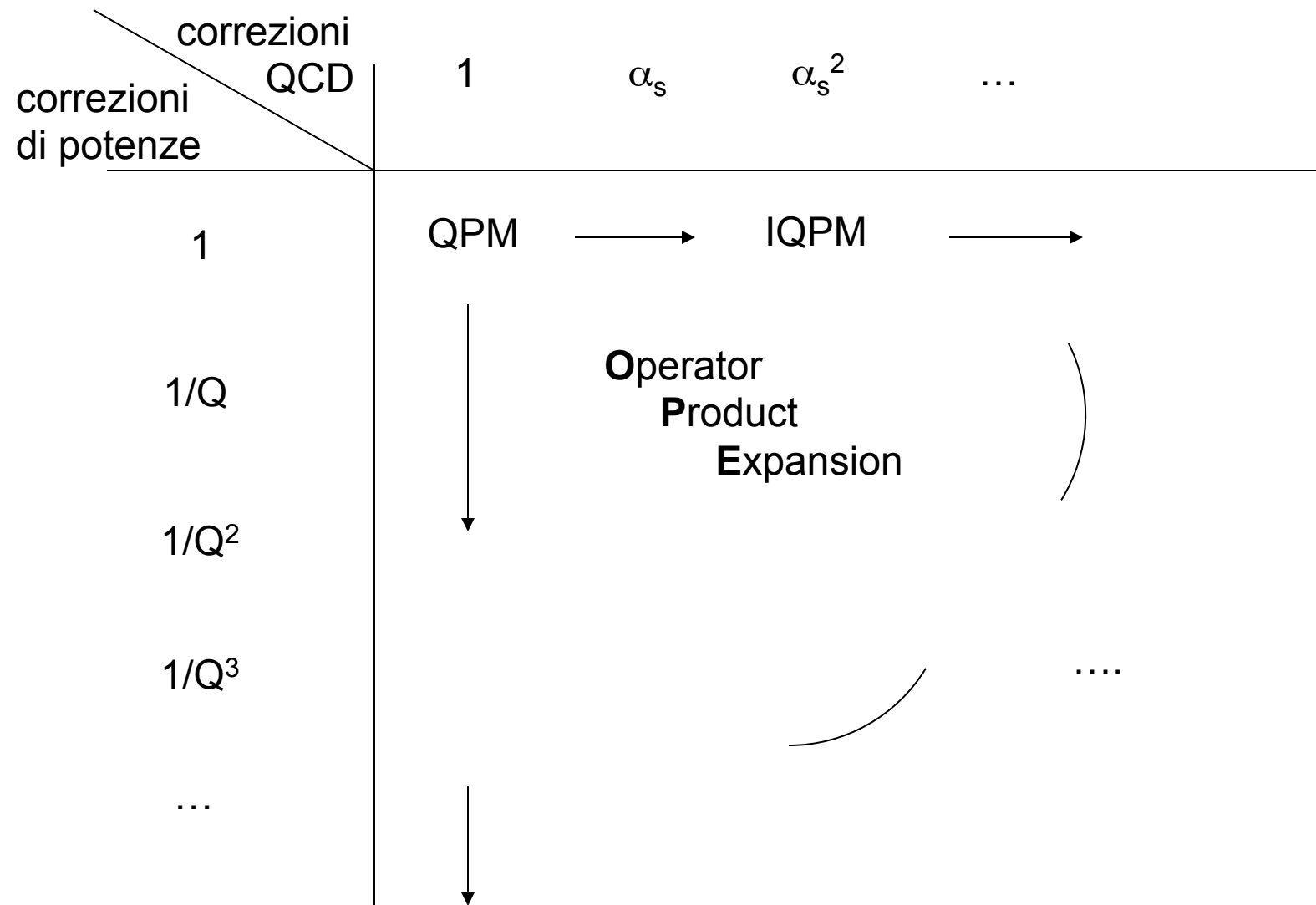
↓
dimensioni di $\langle P |$ operatore $| P \rangle - 2$

↓
 \sim n. indici dell'operatore

$$\left(\frac{M}{Q}\right)^{t-2}, \left(\frac{M}{Q}\right)^{t+2-2}, \dots, \quad t \geq 2$$



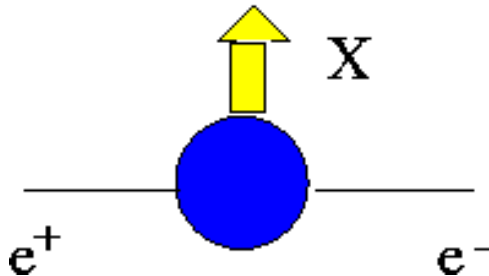
la serie di potenze è contenuta nell'operatore bilocale



N.B. per il momento solo
per e^+e^- e DIS inclusivo

OPE dimostrabile solo per e^+e^- e DIS inclusivi

e^+e^- inclusivo

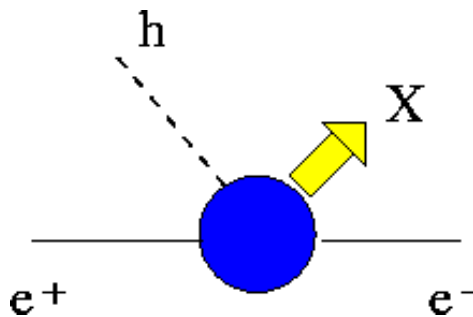


$$W^{\mu\nu} = \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle$$

$q^\mu \stackrel{c.m.}{=} (q^0, \mathbf{0})$ regime DIS: $Q^2 \rightarrow \infty \Rightarrow q^0 \rightarrow \infty$
 causalità \Rightarrow [...] definito su $\xi^2 \geq 0$
 contributo principale all'integrale da $q \cdot \xi$ finito
 $\Rightarrow \xi^0 \sim 0 \Rightarrow \xi \sim 0$

operatore composito a corte distanze \rightarrow OPE

e^+e^- semi-inclusivo



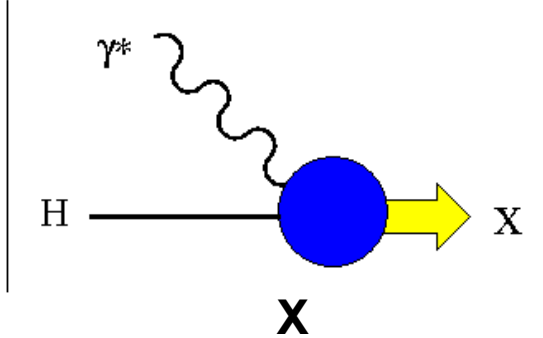
$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_X \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | 0 \rangle$$

sistema dell'adrone a riposo $P_h^\mu = (M_h, \mathbf{0})$

$q \cdot \xi$ finito $\rightarrow W^{\mu\nu}$ dominato da $\xi^2 \sim 0$

ma stato $|P_h\rangle$ impedisce chiusura \sum_X
 \rightarrow OPE non può essere applicata

DIS inclusivo

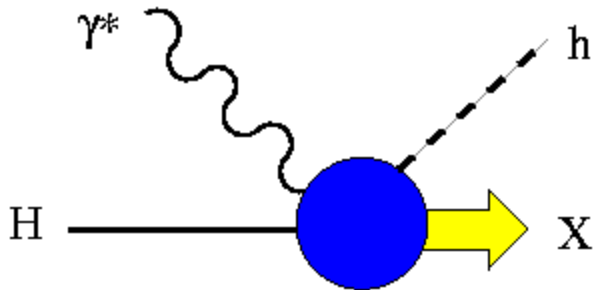


$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | P \rangle$$

in limite DIS \Rightarrow ($x_B = -q^2/2P\cdot q$ finito) \Leftrightarrow ($\nu \rightarrow \infty$)
 $q\cdot\xi$ finito in limite DIS $\rightarrow \xi^0 \sim 0 \rightarrow \xi^\mu \sim 0$

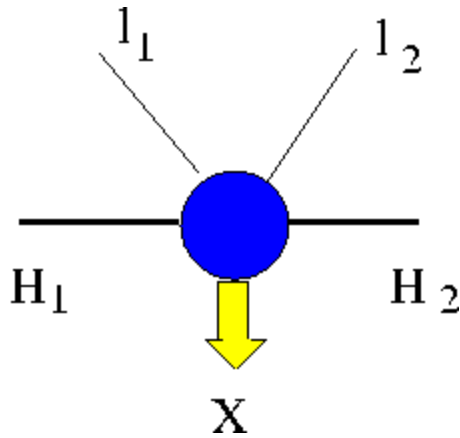
DIS semi-inclusivo

$$2MW^{\mu\nu} \propto \sum_X \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | P \rangle$$



stato $|P_h\rangle$ impedisce chiusura \sum_X
 \rightarrow OPE non può essere applicata

Drell-Yan



$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2} s \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P_1 P_2 | J^\mu(\xi) J^\nu(0) | P_1 P_2 \rangle$$

$q\cdot\xi$ finito \rightarrow dominanza per $\xi^2 \sim 0$

ma $\langle .. \rangle$ non è limitato in nessun sistema perché $s = (P_1 + P_2)^2 \sim 2P_1 \cdot P_2 \geq Q^2$ e nel limite $Q^2 \rightarrow \infty$ entrambe P_1, P_2 non limitati $W^{\mu\nu}$ riceve contributi fuori dal light-cone!

Quali sono i diagrammi dominanti per i processi in cui non si può applicare l'OPE ?

E' possibile applicare il concetto dell'OPE (fattorizzazione) anche a processi semi-inclusivi?

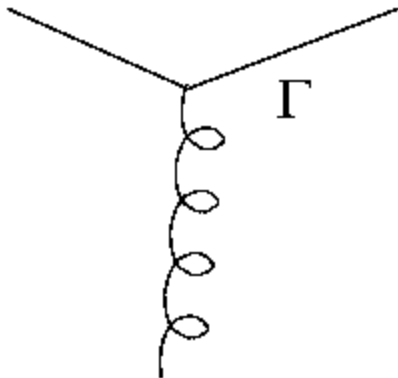
Classificazione dei contributi dominanti ai vari processi hard

Premessa :

- propagatore di quark libero a corte distanze $S_F(x)$

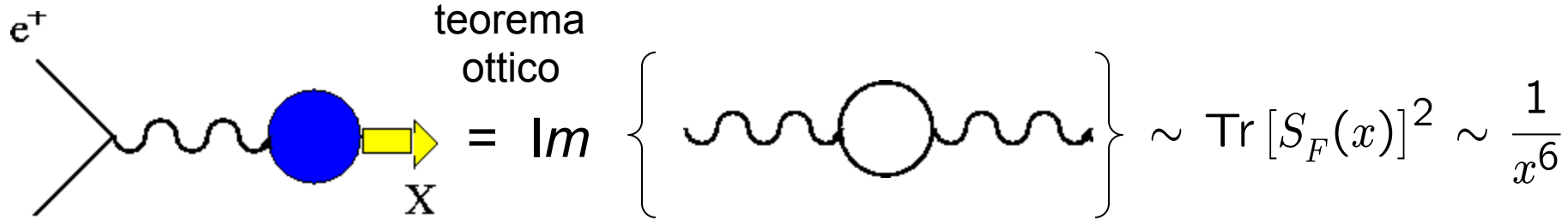
$$\begin{aligned} S_F(x) &= (i\gamma \cdot \partial + m) \Delta(x) \sim (i\gamma \cdot \partial + m) \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{-2\gamma \cdot x}{(x^2 - i\epsilon)^2} \frac{i}{4\pi^2 i} + \dots \sim \frac{1}{x^3} + \text{termini meno singolari} \end{aligned}$$

- interazione con gluone non incrementa la singolarità



$$\sim \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} S_F(x - y) \Gamma S_F(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

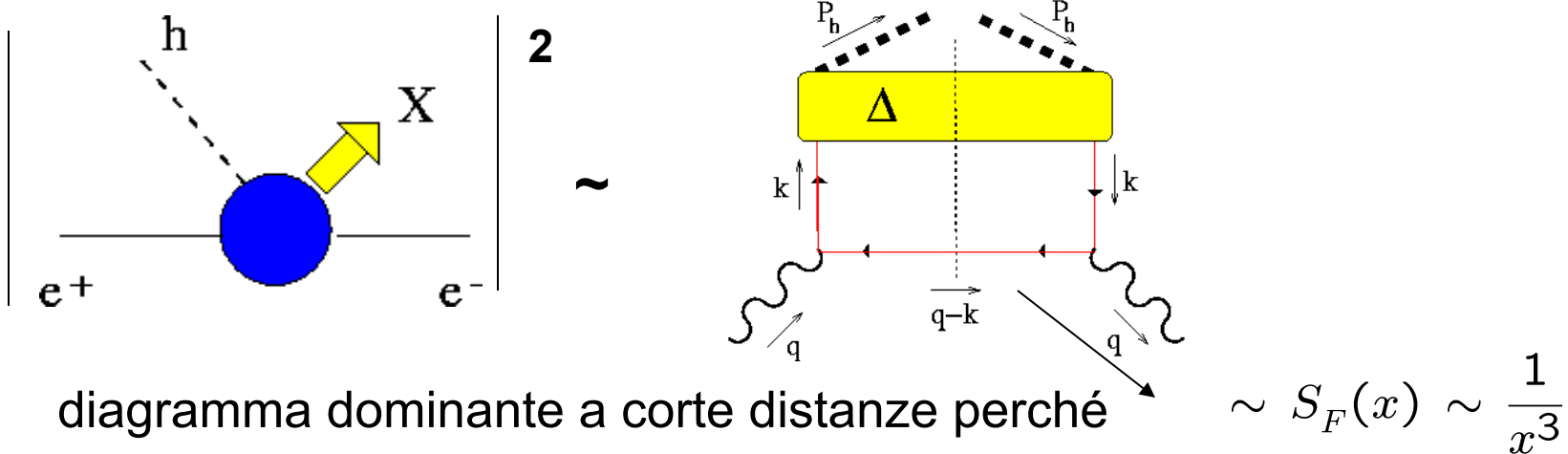
e^+e^- inclusivo



contributo dominante a corte distanze $\rightarrow \sigma_{\text{tot}}$ del QPM

correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n \rightarrow$ si ritrova risultato OPE

e^+e^- semi-inclusivo



correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$

fattorizzazione tra vertice hard e frammentazione soft

(continua)

DIS inclusivo

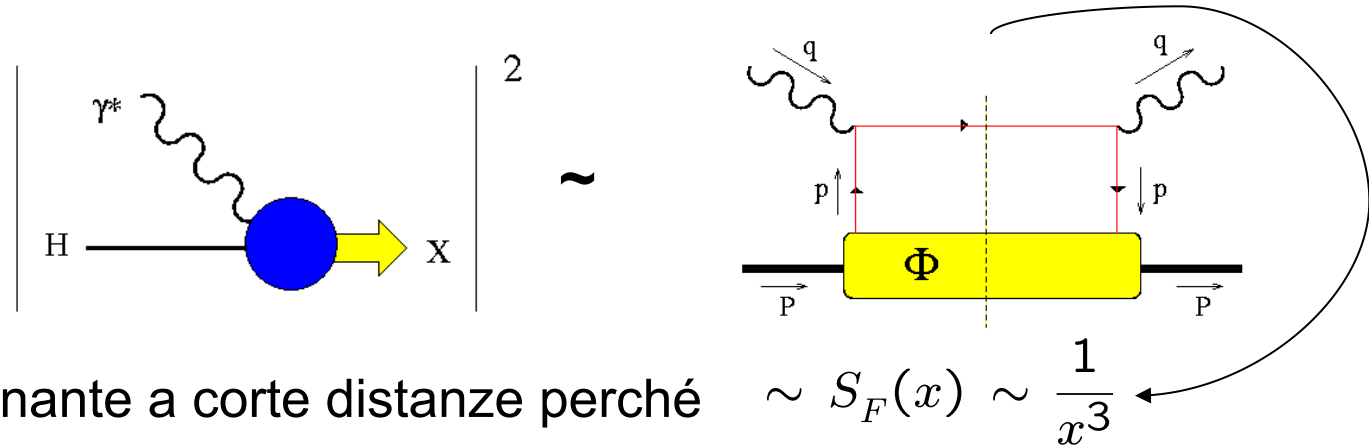
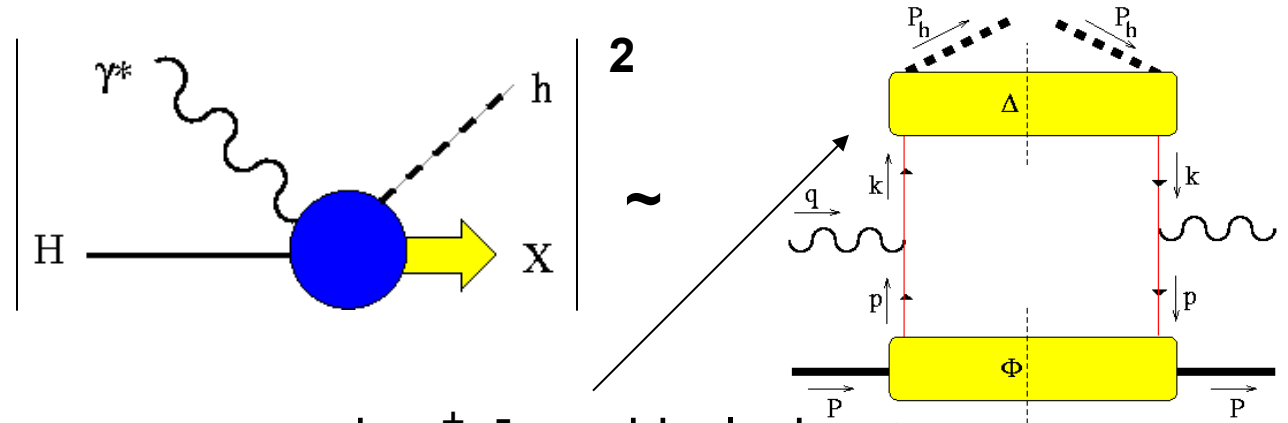


diagramma dominante a corte distanze perché

$$\sim S_F(x) \sim \frac{1}{x^3}$$

correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$ quindi si ritrova risultato di OPE

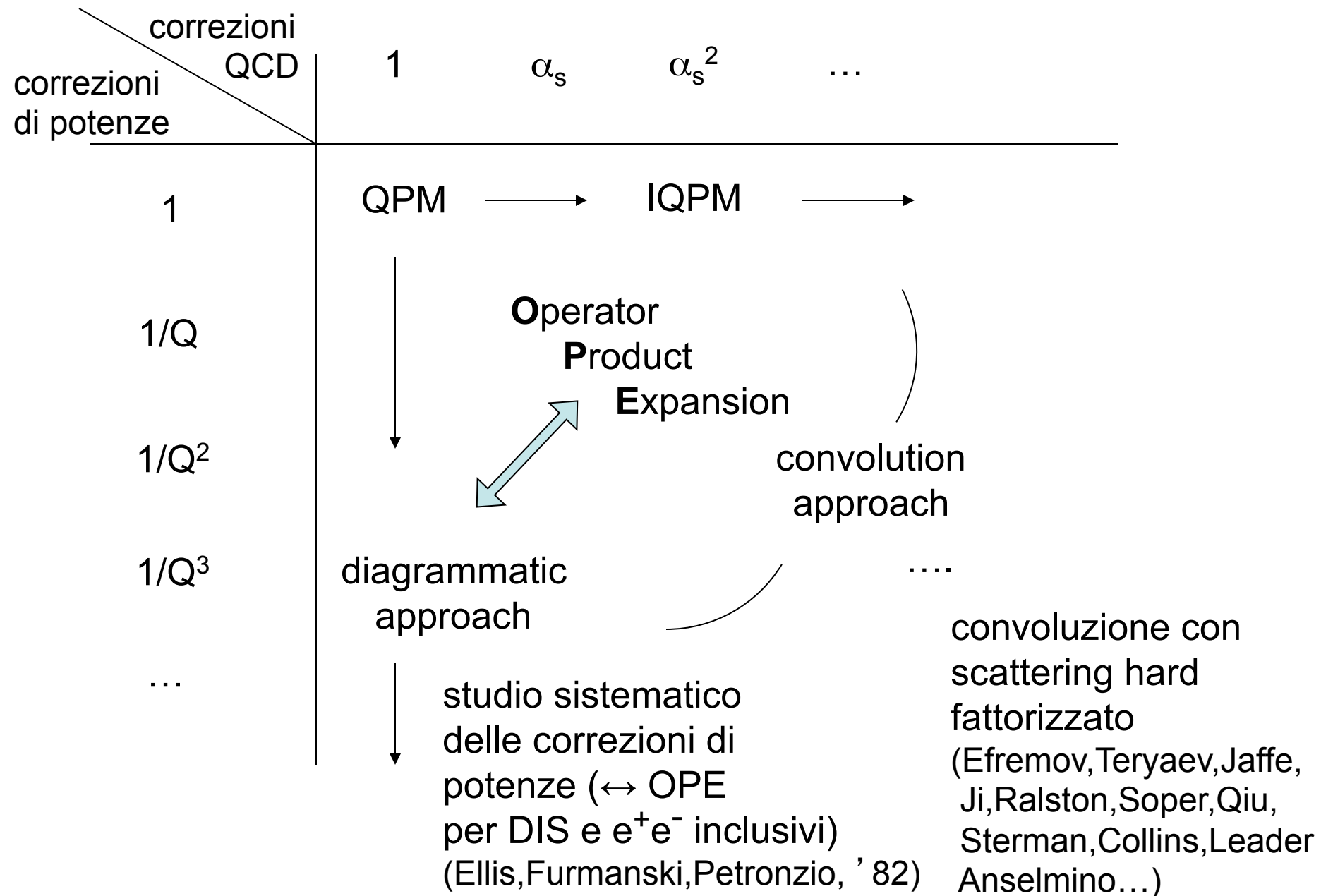
DIS semi-inclusivo



da e^+e^- semi-inclusivo

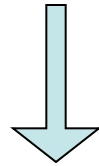
da DIS inclusivo

fattorizzazione tra vertice e.m.
hard e funzioni di distribuzione e
frammentazione (el. di matrice soft)



(continua)

Per tutti i processi di tipo DIS o e^+e^- (sia inclusivi che semi-inclusivi) il contributo dominante al tensore adronico viene dalla cinematica light-cone



- definizione e proprietà delle variabili light-cone
- teoria di campo quantizzata sul light-cone
- algebra di Dirac sul light-cone

Variabili light-cone

dato 4-vettore a^μ $a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^0 \pm a^3)$, $\mathbf{a}_\perp = (a^1, a^2)$

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^+, a^-, \mathbf{a}_\perp)$$

prodotto scalare $a \cdot b = a^+ b^- + a^- b^+ - \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp$

$$a^2 = 2a^+ a^- - \mathbf{a}_\perp^2$$

metrica $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(0,1,2,3)} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$

“base” light-cone :

$$n_+^\mu = (1, 0, \mathbf{0}_\perp) \quad , \quad n_-^\mu = (0, 1, \mathbf{0}_\perp) \quad ; \quad n_\pm^2 = 0, \quad n_+ \cdot n_- = 1$$

$$a^\pm = a \cdot n_\mp \longrightarrow a^\mu = (a \cdot n_-) n_+^\mu + (a \cdot n_+) n_-^\mu + \mathbf{a}_\perp$$

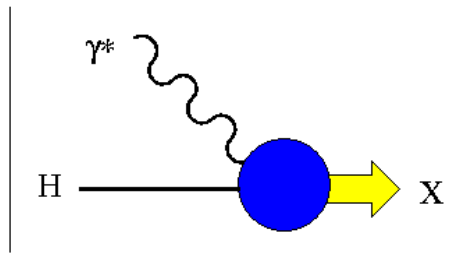
metrica “trasversa” $g_\perp^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n_+^\mu n_-^\nu - n_-^\mu n_+^\nu = g^{\mu\nu} - n_+^{\{\mu} n_-^{\nu\}}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$$

adrone-bersaglio a riposo $P^\mu \stackrel{rest\ frame}{=} (M, 0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (M, M, \mathbf{0}_\perp)$

DIS inclusivo

bersaglio assorbe momento trasferito di γ^* ; ad



2 esempio se $\mathbf{q} \parallel z$ $P_z=0 \rightarrow P'_z = q \gg M$ in regime DIS

$$P'^\mu = (\sqrt{M^2 + P_z'^2}, 0, 0, P_z') \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} (P'_z, 0, 0, P'_z) = (\sqrt{2} P'_z, 0, 0, P'_z)$$

regime DIS \Rightarrow direzione “+” dominante
 direzione “-” soppressa

boost di 4-vettore $a^\mu \rightarrow a'^\mu$ lungo asse z

$$a'^0 = \frac{a^0 + \beta a^3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad a'^3 = \frac{\beta a^0 + a^3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad a'_\perp = a_\perp$$

$$a'^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1 + \beta)(a^0 + a^3)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = a^+ \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = a^+ e^\psi$$

$$a'^- = a^- \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = a^- e^{-\psi}$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (M, M, \mathbf{0}_\perp)$$

boost lungo asse z

$$P'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

N.B. rapidity

$$\psi = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \Rightarrow \beta = \tanh \psi$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

$A = M \rightarrow$ rest frame dell' adrone

$A = Q \rightarrow$ Infinite **M**omentum **F**rame (IFM)

cinematica light-cone \Leftrightarrow boost all'IFM

definizioni :

$$q^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-x_N A, \frac{Q^2}{x_N A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

invariante di Nachtmann $x_N = -\frac{q^+}{P^+}$

$$q^2 = 2q^+q^- - \mathbf{q}_\perp^2 = -Q^2$$



$$2P \cdot q = \frac{Q^2}{x_N} - x_N M^2 \implies \frac{1}{x_B} = \frac{1}{x_N} - x_N \frac{M^2}{Q^2} \implies x_N x_B^2(\dots) = x_N x_B^2(\dots)$$

$$x_B^2 - x_N x_B + \frac{x_N^2}{4} = \frac{x_N^2}{4} \left(1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2} \right) \implies x_N = \frac{2x_B}{1 + \sqrt{1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2}}} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} x_B$$

miglior scaling in x_N quando $Q \sim M$

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_A, \frac{p^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{x_A}, \mathbf{p}_\perp \right)$$

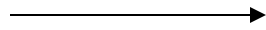
frazione light-cone (longitudinale)
di momento partonico

$$p^2 = 2p^+p^- - \mathbf{p}_\perp^2$$

$$x = \frac{p^+}{P^+}$$

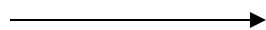
Quantizzazione di teoria di campo sul light-cone

regole di commutazione
al tempo $x^0=t=0$
evoluzione in x^0



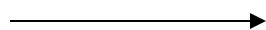
regole di commutazione
al tempo “light-cone” $x^+=0$
evoluzione in x^+

variabili cinematiche \mathbf{x}



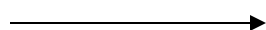
x^- , \mathbf{x}_\perp

momenti coniugati \mathbf{k}



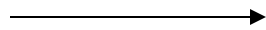
k^+ , \mathbf{k}_\perp

Hamiltoniana k^0



k^-

quanto di campo



$$\psi(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} b_\alpha(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

$$\psi_+(x) = \int \frac{dk^+ d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3 k^+} b_\alpha(\mathbf{k}) u_+(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) v_+(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

$$[b_\alpha(\mathbf{k}), b_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$[b_\alpha(\mathbf{k}), b_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 k^- \delta(k^+ - k'^+) \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta_{\alpha\alpha'}$$

.....

spazio di Fock

.....