

# Riassunto della lezione precedente

- QCD = teoria di gauge non abeliana  $\rightarrow$  antiscreening ;  
comportamento asintotico bizzarro: alti  $Q^2 \rightarrow$  liberta` asintotica (pQCD)  
bassi  $Q^2 \rightarrow$  confinamento
- Correzioni perturbative (pQCD) hanno come punto di partenza all'ordine "0"  
il modello a partoni (QPM), dedotto da risultati di Deep Inelastic Scattering  
(DIS)
- Linee generali della teoria dello scattering con sonde elettromagnetiche:
  - sezione d'urto inclusiva
  - sezione d'urto inclusiva elastica: caso della particella scalare

## Scattering inclusivo elastico su particella scalare libera

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} E'^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \frac{E'}{E} |F_1(Q^2)|^2 \equiv \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} |F_1(Q^2)|^2$$

Coulomb scattering elastico da  
particella puntiforme



rinculo  
bersaglio

struttura  
bersaglio

## Breit frame $\rightarrow$ fattore di forma

$$\mathbf{P} = -\mathbf{q}/2$$



$$\mathbf{P}' = +\mathbf{q}/2$$

$$v = 0$$

$$R^\mu = (2E, \mathbf{0})$$

$$q^\mu = (0, \mathbf{q})$$

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{0}) \rightarrow 2E F_1(Q^2)$$



$$F_1(Q^2) \equiv F_1(|\mathbf{q}|^2) = \int d\mathbf{r} \, \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

↑  
fattore di forma di  
carica  
materia  
.....

↑  
distribuzione di  
carica  
materia  
.....

# Bersaglio = particella di Dirac libera puntiforme

Esempio:  $e^- + \mu^- \rightarrow e^{-'} + \mu^-$

$$J^\mu = \bar{u}(P') \gamma^\mu u(P)$$

$$H^{\mu\nu} \equiv L^{\mu\nu} \quad \text{with } k^{(\prime)} \leftrightarrow P^{(\prime)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (\not{P}' + M) \gamma^\mu (\not{P} + M) \gamma^\nu \right] \\ &= 2 \left[ P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - (P \cdot P' - M^2) g^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \stackrel{\text{TRF}}{=} 16EE' M^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \left( 1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left( 1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right)$$

interazione  
magnetica di  
spin con  $\gamma^*$

## Bersaglio = particella di Dirac libera con struttura

3 vettori indipendenti  $P^\mu, P'^\mu, \gamma^\mu$  (+ invarianza per time-reversal, parità)

$$J^\mu = \bar{u}(P') \Gamma^\mu u(P) = \bar{u}(P') \left[ \Gamma_1 P^\mu + \Gamma_2 P'^\mu + \Gamma_3 \gamma^\mu \right] u(P)$$

$$\Gamma_i(Q^2, P^2, P'^2) \equiv \Gamma_i(Q^2)$$

conservazione della corrente  $q_\mu J^\mu = 0$



$$\begin{aligned} q_\mu \bar{u}(P') \Gamma^\mu u(P) &= \\ &= \bar{u}(P') \left[ \Gamma_1 P \cdot (P' - P) + \Gamma_2 P' \cdot (P' - P) + \Gamma_3 \gamma \cdot (P' - P) \right] u(P) \\ &= \bar{u}(P') \left[ (P \cdot P' - M^2) (\Gamma_1 - \Gamma_2) + \Gamma_3 (\not{P}' - \not{P}) \right] u(P) = 0 \\ &\Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2 \end{aligned}$$

$$J^\mu = \bar{u}(P') \left[ \Gamma_1(Q^2) R^\mu + \Gamma_3(Q^2) \gamma^\mu \right] u(P)$$

**eq. di Dirac**  
 $\not{P} u = M u$   
 $\bar{u} \not{P} = \bar{u} M$

## Decomposizione di Gordon (on-shell)

$$J^\mu = \bar{u}(P') \left[ \Gamma_1(Q^2) R^\mu + \Gamma_3(Q^2) \gamma^\mu \right] u(P)$$

$$\bar{u} \gamma^\mu u = \bar{u} \left[ \frac{R^\mu}{2M} + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u \quad \text{with } \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

cioe'  $R^\mu \leftrightarrow 2M \gamma^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$

proof flow-chart

- da destra, inserire def. di  $\sigma^{\mu\nu}$
- usare eq. di Dirac
- usare  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu}$
- usare eq. Dirac  $\rightarrow$  sinistra



$$J^\mu = \bar{u}(P') \left[ F_1(Q^2) \gamma^\mu + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(Q^2) \right] u(P)$$

$$F_1 = 2M\Gamma_1 + \Gamma_3 \quad \text{Dirac form factor} \quad F_1(0) = 1$$

$$F_2 = -2M\Gamma_1 \quad \text{Pauli form factor} \quad F_2(0) = \kappa$$

## Bersaglio = particella di Dirac libera e composita

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} H^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (\not{p}' + M) \Gamma^\mu (\not{p} + M) \Gamma^\nu \right]$$

$$\Gamma^\mu = F_1 \gamma^\mu + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2$$

.....

Sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left[ \left( F_1^2 + \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) + \frac{Q^2}{2M^2} (F_1 + F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ \underbrace{\left( F_1^2 + \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right)}_{\text{struttura interna}} + \underbrace{\frac{Q^2}{2M^2} (F_1 + F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2}}_{\text{struttura interna}} \right]$$

struttura interna  
(difficilmente separabile)

# Formula di Rosenbluth

Definizione fattori  
di forma di Sachs  
(Yennie, 1957)

$$\begin{aligned} G_E(Q^2) &= F_1(Q^2) - \tau F_2(Q^2) \\ G_M(Q^2) &= F_1(Q^2) + F_2(Q^2) \end{aligned} \quad \text{with } \tau = \frac{Q^2}{4M^2}$$

N.B.: infatti, in Breit frame + riduzione nonrel.  $\rightarrow$

$$\begin{aligned} J^0 &\sim G_E \\ \mathbf{J} &\sim \frac{G_M}{2M} \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q} \end{aligned}$$

distribuzione di carica/magnetica  
del bersaglio



$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \\ &\equiv \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \end{aligned}$$

separazione piu' facile



# Separazione di Rosenbluth

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

- larghi  $\theta_e$  (larghi  $Q^2$ )  $\rightarrow$  estrarre  $G_M$
- piccoli  $\theta_e$  (piccoli  $Q^2$ )  $\rightarrow$  estrarre  $G_E$  per differenza
- Rosenbluth plot



$$\epsilon (1 + \tau) \frac{E}{E'} \frac{1}{\sigma_{\text{Mott}}} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \epsilon G_E^2 + \tau G_M^2$$

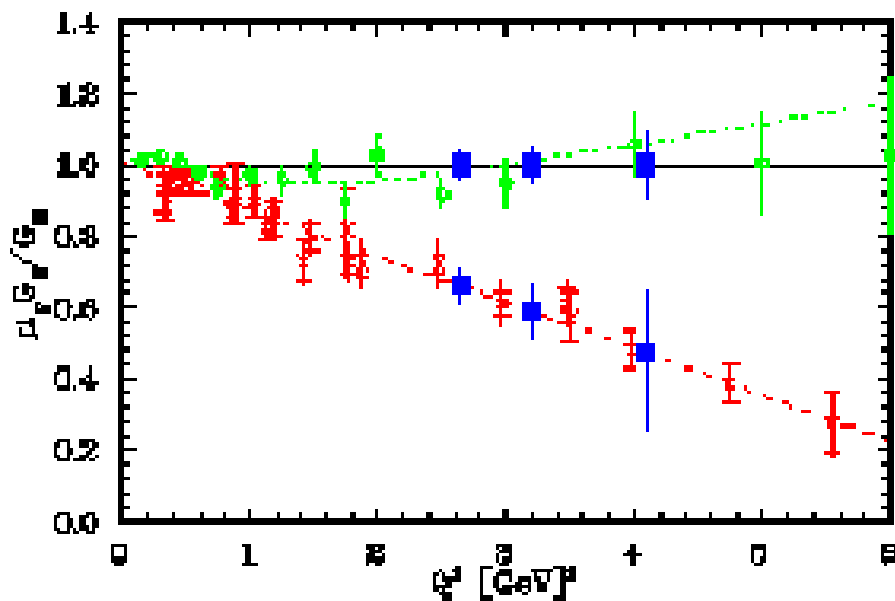
$$\epsilon = \left[ 1 + 2(1 + \tau) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]^{-1}$$

polarizz. trasversa lineare di  $\gamma^*$

misure con diverse  $(E, \theta_e) \rightarrow$  plot in  $\epsilon$  a fisso  $Q^2$

intercetta a  $\epsilon = 0 \rightarrow G_M$

pendenza in  $\epsilon \rightarrow G_E$



Rosenbluth plot

$$\mu_p \frac{G_E^p}{G_M^p} \rightarrow \text{cost}$$



$$F_2 \sim \frac{F_1}{Q^2}$$

pQCD scaling

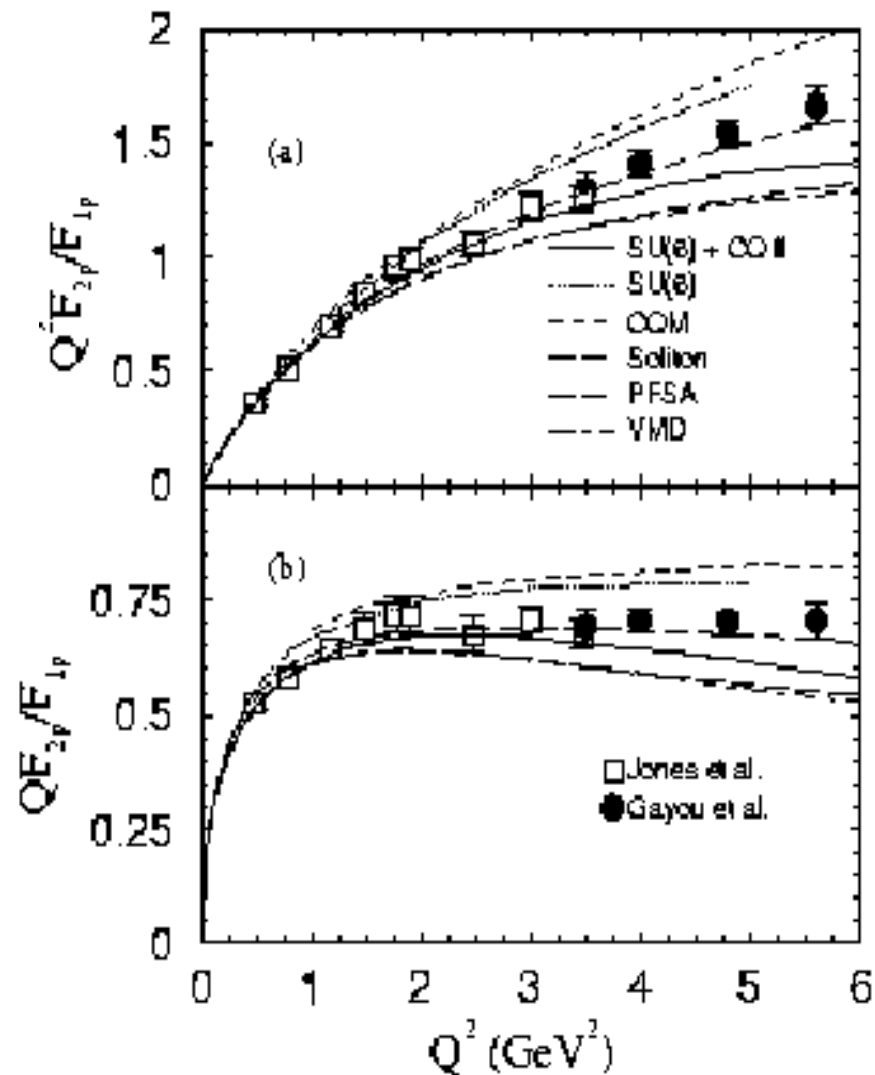
JLAB data

(ottenuti con  $e^-$  scattering  
e doppia polarizzazione  
→ piu' precisi)



$$F_2 \sim \frac{F_1}{Q}$$

$Q^2 \lesssim 10 \text{ (GeV/c)}^2$  ancora regime  
non perturbativo



## Sezione d'urto (an)elastica inclusiva per particella di Dirac composita

Risultato generale : 
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ A(\nu, Q^2) + B(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

Procedura :

- 2 vettori indipendenti  $P, q$
- base tensoriale:  $b_1 = g^{\mu\nu}, b_2 = q^\mu q^\nu, b_3 = P^\mu P^\nu,$   
 $b_4 = (P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu), b_5 = (P^\mu q^\nu - P^\nu q^\mu),$   
 $b_6 = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho P^\sigma$
- tensore adronico  $W^{\mu\nu} = \sum_i c_i (q^2, P \cdot q) b_i$
- invarianza per parità e time-reversal,  
 conservazione della corrente  $q_\mu W^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} q_\nu = 0$
- sistema lineare con  $c_6$  indeterminato ( $=0$ ),  $c_5=0$  ,  
 $c_1$  e  $c_3$  dipendenti da  $c_2$  e  $c_4$
- Risultato finale :

$$W^{\mu\nu} = \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) q^2 c_2(q^2, P \cdot q) + \frac{\tilde{P}^\mu \tilde{P}^\nu}{M^2} \left( -\frac{M^2 q^2}{P \cdot q} \right) c_4(q^2, P \cdot q)$$

$$\tilde{P}^\mu = P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu$$



(continua)

- struttura  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} q^\rho P^\sigma$  proibita da invarianza per parita`
- struttura  $(P^\mu q^\nu - P^\nu q^\mu)$  proibita da invarianza per time-reversal
- strutture  $(P^\mu q^\nu + P^\nu q^\mu)$ ,  $q^\mu q^\nu$  trascurabili perche`  $\sim m_e^2$ , ma non proibite (violazione della conservazione della corrente)
- hermiticity  $W^{\mu\nu} = (W^{\nu\mu})^* \rightarrow c_{2,4}$  funzioni reali

$$L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} = 4EE' \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \left( W_2 + 2W_1 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right)$$



$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE' d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \\ &= \sigma_{\text{Mott}} \left[ W_2(\nu, Q^2) + 2W_1(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \end{aligned}$$

# Riepilogo

Scattering inclusivo su particella di Dirac libera e composita

anelastico

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left[ W_2(\nu, Q^2) + 2W_1(\nu, Q^2) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

elastico

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left[ (F_1^2 + \tau F_2^2) + 2\tau (F_1 + F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

$$W_2^{\text{el}} \leftrightarrow (F_1^2 + \tau F_2^2) \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

$$2W_1^{\text{el}} \leftrightarrow 2\tau (F_1 + F_2)^2 \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

elastico puntiforme

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left( 1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right) \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

$$W_2^{\text{el}} \leftrightarrow \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

$$W_1^{\text{el}} \leftrightarrow \tau \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$

$F_1 \rightarrow 1$   
 $F_2 \rightarrow 0$

## DIS regime

$$Q^2 \longrightarrow \infty$$
$$x_B = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \quad \text{fissato}$$

TRF :  $v \rightarrow \infty$  velocemente come  $Q^2$

poiche'  $Q^2 = -(q^0)^2 + \mathbf{q}^2 = -v^2 + \mathbf{q}^2$

dunque

$$|\mathbf{q}| \rightarrow \infty \quad \text{velocemente come } Q^2$$

dipendente dal frame

indipendente dal frame

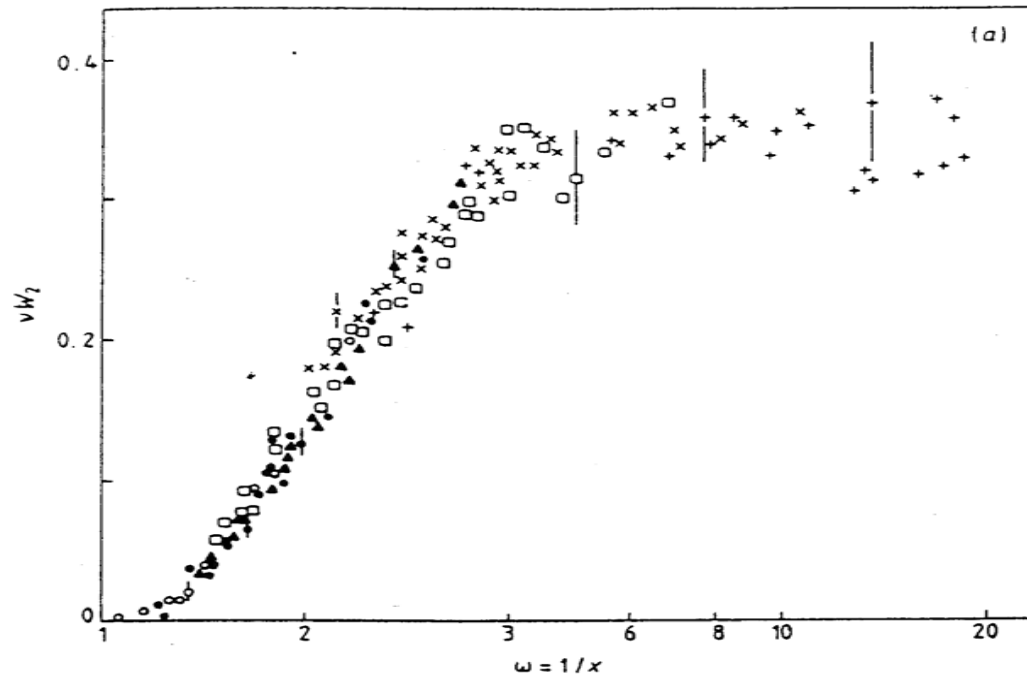
## Scaling

$$\begin{aligned} W_2^{\text{el}} &\leftrightarrow \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) & \nu W_2^{\text{el}} &\leftrightarrow \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) \equiv \delta(1 - x_B) \equiv F_2(x_B) \\ W_1^{\text{el}} &\leftrightarrow \tau \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) & 2MW_1^{\text{el}} &\leftrightarrow \frac{Q^2}{2M\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) \equiv x_B \delta(1 - x_B) \equiv 2F_1(x_B) \end{aligned}$$

Osservazione sperimentale dello scaling = segnale che nella cinematica DIS (cioe'  $Q^2, \nu \rightarrow \infty$ ,  $x_B$  fissato) lo scattering si puo' rappresentare come la somma incoerente di scattering elastici da costituenti puntiformi del bersaglio con statistica di Dirac  $\rightarrow$  origine del concetto di partone

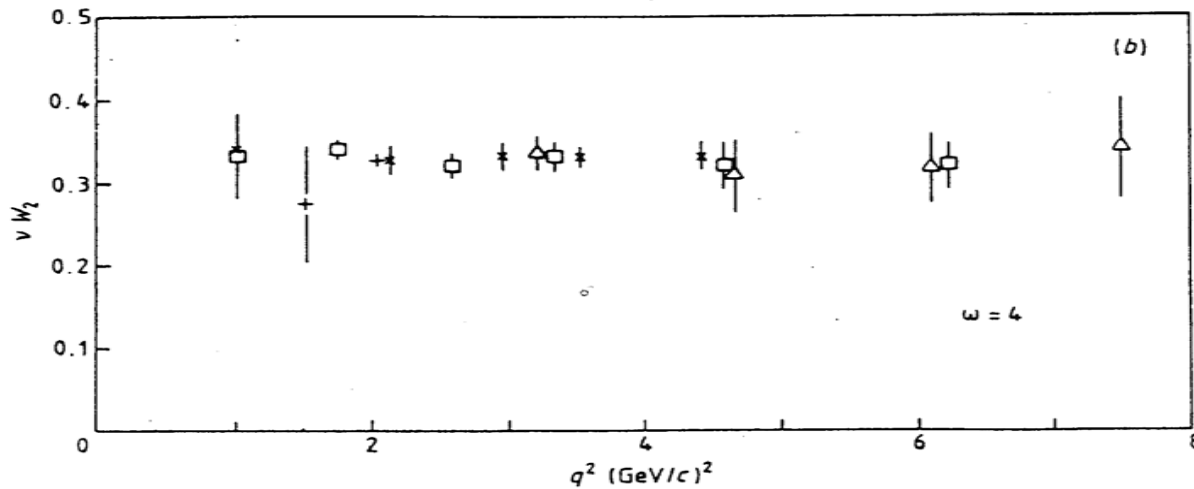
N.B. Analogo dell'esperimento di Rutherford sullo scattering di particelle  $\alpha$  da atomi

$\nu W_2$



$1/x$

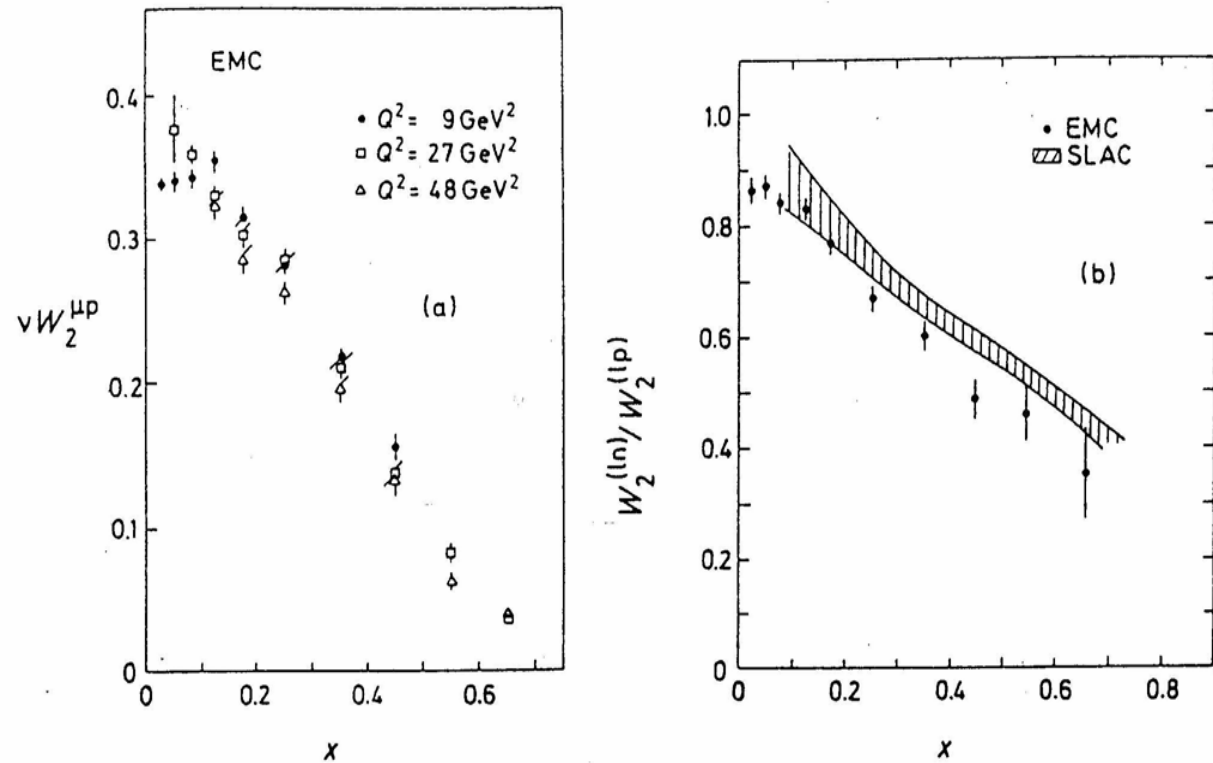
Aitchison  
& Hey



$Q^2$

**Figure 4.2** Bjorken scaling: the structure function  $\nu W_2$  (a) plotted against  $\omega = 1/x$  for different  $q^2$  values (Miller *et al* 1972) (b) plotted against  $q^2$  for a single value of  $x = 0.25$  ( $\omega = 4$ ) (Friedman and Kendall 1972).





**Figure 18.9** Data from the European Muon Collaboration (EMC) for the structure function  $\nu W_2^{\mu p}(\nu, Q^2)$  of the proton as a function of  $x = Q^2/(2M\nu)$  for various  $Q^2$  values. Exact Bjorken scale invariance would demand that the data points for the same  $x$  but different  $Q^2$  should lie on top of one another (a). Part (b) shows the ratio of the neutron and proton structure functions  $W_2^{(ln)}(\nu, Q^2)$  and  $W_2^{(lp)}(\nu, Q^2)$  ( $l = e, \mu$ ) as a function of  $x$ . The shaded band represents the SLAC data obtained from electron scattering in the interval  $2 \leq Q^2 \leq 20 \text{ GeV}^2$ . The points correspond to preliminary EMC data from muon scattering in the interval  $10 \leq Q^2 \leq 80 \text{ GeV}^2$  (after Drees 1983 and Dydak 1983).

## Bibliografia e un po' di storia

predizione teorica  
dello scaling

Bjorken, Proc. of 3<sup>rd</sup> Int. Symp. on  $e^-$  and  $\mu$  interact., SLAC ('67)

Bjorken, Phys. Rev. **179** ('69) 1547

Taylor

osservazione  
sperimentale  
(DIS con  $e^-$  beam  
di 7-17 GeV e  
 $6^\circ < \theta_e < 10^\circ$ )

Bloom et al., Phys. Rev. Lett. **23** ('69) 930

Breidenbach et al., Phys. Rev. Lett. **23** ('69) 935

Miller et al., Phys. Rev. **D5** ('72) 528

parton model

Feynman, Phys. Rev. Lett. **23** ('69) 1415

review

Friedmann & Kendall, Ann. Rev. Nucl. Sci. **22** ('72) 203

Nobel laureate