

# Riassunto della lezione precedente

- momentum sum rule: legare momenti di Mellin di funzioni di struttura a coeff. di Wilson ed elementi di matrice adronici dello sviluppo OPE
- OPE dimostrabile rigorosamente solo per DIS ed  $e^+ e^-$  inclusivi
  - approccio diagrammatico: identificare diagrammi dominanti contando il loro grado di divergenza in  $S_F(x)$
  - risultati equivalenti ad OPE per processi inclusivi, ma vantaggio di poter studiare anche processi semi-inclusivi e il Drell-Yan
- quantizzazione della teoria di campo sul light-cone
  - per regime DIS, equivalenza con Infinite Momentum Frame (IMF)
  - algebra di Dirac sul light-cone

# Algebra di Dirac sul light-cone

rappresentazione usuale delle matrici di Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

↖ così (anti-)particelle hanno solo componenti upper (lower)  
nello spinore di Dirac

nuova rappresentazione per teoria di campo light-cone

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_{\perp} = \begin{pmatrix} i\sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & i\sigma_{\perp} \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad \text{ok}$$

definizioni :  $\gamma^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 \pm \gamma^3)$   $P_{\pm} = \frac{1}{2} \gamma^{\mp} \gamma^{\pm}$



proiettori  $(P_{\pm})^2 = P_{\pm}$  ;  $P_+ P_- = P_- P_+ = 0$  ,  $P_+ + P_- = \mathbf{1}$

$$P_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} , \quad P_+ |\psi\rangle = \phi , P_- |\psi\rangle = \chi$$

Proiettare eq. di Dirac

$$P_{\pm} (i\gamma \cdot D + m) \begin{vmatrix} \phi \\ \chi \end{vmatrix} = 0 \quad D_{\pm} = \partial_{\pm} - igA^{\mp}$$



$$\begin{cases} i\gamma^- D_- \chi = -i\gamma_{\perp} \mathbf{D}_{\perp} \phi - m\phi \\ i\gamma^+ D_+ \phi = -i\gamma_{\perp} \mathbf{D}_{\perp} \chi - m\chi \end{cases} \longleftarrow \begin{array}{l} \text{non contiene "tempo" } x^+ : \chi \text{ dipende} \\ \text{da } \phi \text{ e } \mathbf{A}_{\perp} \text{ a } x^+ \text{ fissato} \\ \phi, \mathbf{A}_{\perp} \text{ gradi di liberta' indipendenti} \end{array}$$

$$|\psi\rangle = \begin{vmatrix} \phi \\ \chi \end{vmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{"good"} \\ \longleftarrow \text{"bad"} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{componenti light-cone} \\ P_+ |\psi\rangle \\ P_- |\psi\rangle \end{array}$$

componenti "good"  $\rightarrow$  componenti indipendenti e leading  
 componenti "bad"  $\rightarrow$  dipendenti dall'interazione (quark-gluone)  
 e pertanto sopresse

# Stati di spin per quark

generatore delle rotazioni di spin lungo z  $\Sigma^3 = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2] = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

se momento  $\parallel$  z, misura l'elicità

$\gamma^1, \gamma^2, \gamma_5$  commutano con  $P_{\pm} \rightarrow 2$  possibili scelte :

- diagonalizzare  $\gamma_5$  e  $\Sigma^3 \rightarrow$  base di elicità
- diagonalizzare  $\gamma^1$  (o  $\gamma^2$ )  $\rightarrow$  base di "trasversità"

N.B. in base di elicità  $\gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$   $\Sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$



elicità = chiralità per componente "good"  $\phi$

elicità = - chiralità per componente "bad"  $\chi$

N.B. proiettore di polarizzazione trasversa  $P_{\uparrow/\downarrow} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5 \gamma^1)$   $[P_{\uparrow/\downarrow}, P_{\pm}] = 0$

definiamo  $P_{\uparrow/\downarrow} \phi = \phi_{\perp/\top} = f(\phi_{\pm})$

$\phi_{\perp/\top}$  non sono autostati dell'operatore di spin trasverso !



$$\Sigma^1 = \gamma_5 \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ -i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Teoria di campo sul light-cone: tensore adronico in DIS inclusivo

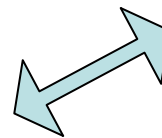
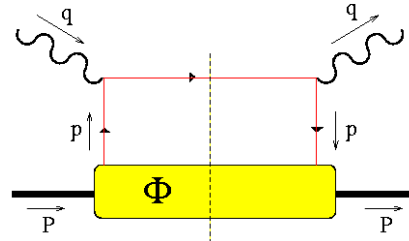
$$W_{\mu\nu} \propto \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \langle P | \hat{O}_V^\rho | P \rangle \rightarrow \dots \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(x) | P \rangle \dots$$

sul light-cone

$$\bar{\psi} \gamma^+ \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^+ \psi = \sqrt{2} \psi^\dagger P_+ \psi = \sqrt{2} (P_+ \psi)^\dagger (P_+ \psi) = \sqrt{2} \phi^\dagger \phi$$



$$P_\pm = \frac{1}{2} \gamma^\mp \gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^0 \gamma^\pm \quad (P_\pm)^\dagger = P_\pm$$



contano solo  
le componenti  
“good”

risultato di QPM

# Teoria di campo “standard” : boost all'Infinite Momentum Frame (IFM)

$$\left\{ \begin{array}{l} P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right) \xrightarrow{A=Q} P^\mu \sim \left( Q, \frac{1}{Q}, \mathbf{0}_\perp \right) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} (Q, 0, \mathbf{0}_\perp) \\ p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( xA, \frac{p^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{xA}, \mathbf{p}_\perp \right) \xrightarrow{A=Q} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( xQ, \frac{p^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{xQ}, \mathbf{p}_\perp \right) \sim (Q, 0, \mathbf{0}_\perp) \\ q^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -x_N A, \frac{Q^2}{x_N A}, \mathbf{0}_\perp \right) \xrightarrow{A=Q} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -x_N Q, \frac{Q}{x_N}, \mathbf{0}_\perp \right) \end{array} \right.$$

N.B.  $p^+ \sim Q \rightarrow (p+q)^- \sim Q$   
in DIS  $x \sim x_N$



tensore adronico in DIS inclusivo

quark liberi

$$J^\mu \sim \sum_f e_f^2 \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$$

$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle P | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | P \rangle \sim \quad (\text{tree level})$$

$$\sim \frac{(2\pi)^4}{2\pi} \sum_f e_f^2 \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \delta(P + q - k - P_X)$$

$$\times \left\{ \langle P | \bar{\psi}_f(0) \gamma^\mu (\not{k} + m) | P_X \rangle \langle P_X | \gamma^\nu \psi_f(0) | P \rangle \right. \\ \left. + \langle P | \psi_f(0) \gamma^\nu (\not{k} - m) | P_X \rangle \langle P_X | \gamma^\mu \bar{\psi}_f(0) | P \rangle \right\}$$

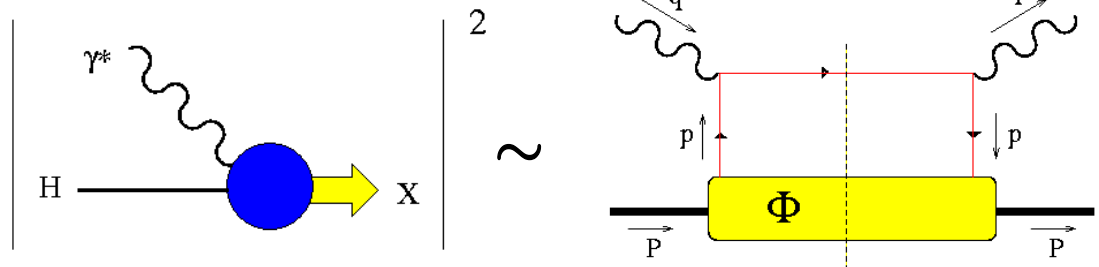
(continua)



$$\begin{aligned}
 2MW^{\mu\nu} &\sim \sum_f e_f^2 \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0 - m) \delta(P + q - k - P_X) \\
 &\quad \left\{ \langle P | \bar{\psi}_f \gamma^\mu (\not{k} + m) | P_X \rangle \langle P_X | \gamma^\nu \psi_f | P \rangle + \langle P | \psi_f \gamma^\nu (\not{k} - m) | P_X \rangle \langle P_X | \gamma^\mu \bar{\psi}_f | P \rangle \right\} \\
 &= \sum_f e_f^2 \int d^4p \delta((p+q)^2 - m^2) \theta(p^0 + q^0 - m) \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot \xi} \\
 &\quad \left\{ \langle P | \bar{\psi}_f(\xi) \gamma^\mu (\not{p} + \not{q} + m) \gamma^\nu \psi_f(0) | P \rangle + \langle P | \psi_f(\xi) \gamma^\nu (\not{p} + \not{q} - m) \gamma^\mu \bar{\psi}_f(0) | P \rangle \right\} \\
 &\equiv \sum_f e_f^2 \int d^4p \delta((p+q)^2 - m^2) \theta(p^0 + q^0 - m) \\
 &\quad \text{Tr} [\Phi(p, P) \gamma^\mu (\not{p} + \not{q} + m) \gamma^\nu + \bar{\Phi}(p, P) \gamma^\nu (\not{p} + \not{q} - m) \gamma^\mu]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(p, P) &= \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot \xi} \langle P | \bar{\psi}_f(\xi) \psi_f(0) | P \rangle \\
 &= \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \langle P | \bar{\psi}_f(0) | P_X \rangle \langle P_X | \psi_f(0) | P \rangle \delta(P - p - P_X)
 \end{aligned}$$

approccio diagrammatico



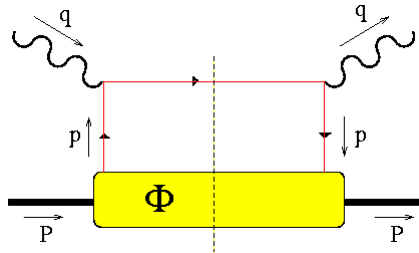
(similmente per antiquark)

# Morale

DIS inclusivo

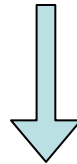
teoria di campo  
“standard”

approccio diagrammatico  
→ contributo dominante  
(quindi è  $\Leftrightarrow$  OPE)



teoria di campo  
“light-cone”

stesso risultato



boost all'IFM e quantizzazione sul light-cone sono equivalenti



## Contributo leading

$$\Phi(p, P, S) = \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot \xi} \langle P, S | \bar{\psi}(\xi) \psi(0) | P, S \rangle$$

operatore bilocale  
twist  $t=2$ , 4, 6...

IFM ( $Q^2 \rightarrow \infty$ )  $\rightarrow$  isolare contributo leading in  $1/Q$   
equivalentemente calcoliamo  $\Phi$  sul Light-Cone (L.C.)



$$\begin{aligned} 2MW^{\mu\nu} &= \sum_f e_f^2 \int d^4p \delta((p+q)^2 - m^2) \theta(p^0 + q^0 - m) \\ &\quad \times \text{Tr} [\Phi(p, P, S) \gamma^\mu (\gamma \cdot p + \gamma \cdot q + m) \gamma^\nu] \\ &\sim \sum_f e_f^2 \frac{1}{2} \int dp^- d\mathbf{p}_\perp \text{Tr} [\Phi(p, P, S) \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu] \Big|_{p^+ = xP^+} \end{aligned}$$

$$\delta(p^+ + q^+) = \delta(xP^+ - x_N P^+) \rightarrow x \sim x_N \sim x_B$$

(analogamente per antiquark)

(continua)

- decomposizione della matrice di Dirac  $\Phi(p, P, S)$  sulla base delle strutture di Dirac e dei 4-(pseudo)vettori  $p, P, S$  compatibilmente con Hermiticity e invarianza per parità

$$\Phi(p, P, S) = \gamma^0 \Phi^\dagger(p, P, S) \gamma^0$$

$$\Phi(p, P, S) = \gamma^0 \Phi(\tilde{p}, \tilde{P}, -\tilde{S}) \gamma^0$$

base di Dirac  $\mathbf{1}, \gamma^\mu, i\gamma_5, \gamma^\mu \gamma_5, i\sigma^{\mu\nu} \gamma_5$

$$\tilde{a}^\mu = (a_0, -\mathbf{a})$$

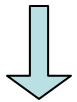
$$\begin{aligned} \Phi(p, P, S) = & A_1 M + A_2 \not{P} + A_3 \not{p} + \textcolor{red}{A_4} \sigma_{\mu\nu} P^\mu p^\nu + \textcolor{red}{iA_5} p \cdot S \gamma_5 + A_6 M \not{S} \gamma_5 \\ & + A_7 \frac{p \cdot S}{M} \not{P} \gamma_5 + A_8 \frac{p \cdot S}{M} \not{p} \gamma_5 + iA_9 \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 S^\mu P^\nu + iA_{10} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 S^\mu p^\nu \\ & + iA_{11} \frac{p \cdot S}{M^2} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 P^\mu p^\nu + \textcolor{red}{A_{12}} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\gamma^\mu P^\nu p^\rho S^\sigma}{M} \end{aligned}$$



time-reversal  $\rightarrow 0$

$$\Phi^*(p, P, S) = -i\gamma^1 \gamma^3 \Phi(\tilde{p}, \tilde{P}, \tilde{S}) i\gamma^1 \gamma^3$$

$$\text{Tr} \left[ \Phi(p, P, S) \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu \right] \Big|_{p^+ = xP^+} = -4g_\perp^{\mu\nu} \underbrace{(A_2 + A_3 x) P^+}_{\int dp^- d\mathbf{p}_\perp \dots \Big|_{p^+ = xP^+} \rightarrow q_f(x) \text{ idem per antiquark}}$$



$$2MW^{\mu\nu} \sim -g_\perp^{\mu\nu} \frac{1}{2} \sum_f e_f^2 [q_f(x) + \bar{q}_f(x)] + o\left(\frac{1}{Q}\right)$$

(continua)

$$2MW^{\mu\nu} \sim -g_{\perp}^{\mu\nu} \underbrace{\frac{1}{2} \sum_f e_f^2 [q_f(x) + \bar{q}_f(x)]}_{F_1(x_B)} + o\left(\frac{1}{Q}\right)$$

$x \sim x_B$   $F_1(x_B) \leftarrow$  risultato di QPM

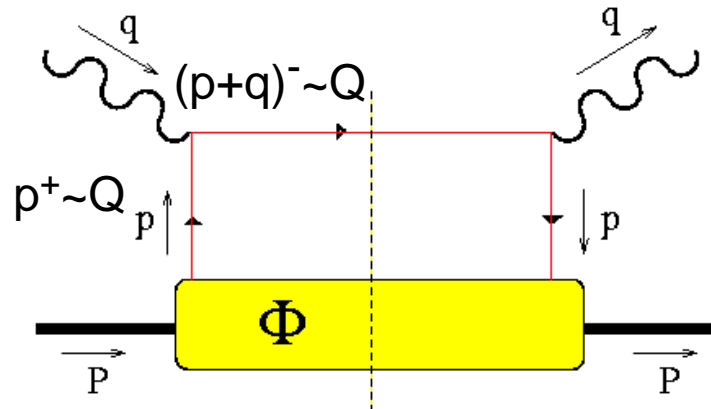
$$W^{\mu\nu} = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) W_1 + \frac{\tilde{P}^\mu \tilde{P}^\nu}{M^2} W_2$$

$W_1$  risposta a polarizzazione trasversa di  $\gamma^*$   $\longrightarrow -g_{\perp}^{\mu\nu} F_1$

**Morale :**

operatore bilocale  $\Phi$  ha twist  $\geq 2$  ; il contributo a leading twist si ottiene in IFM selezionando il termine dominante in  $1/Q$  ( $Q^2 \rightarrow \infty$ ), equivalentemente sul L.C.

al leading twist (t=2) si ritrova risultato di QPM per  $W^{\mu\nu}$  non polarizzato. Ma qual è il risultato generale a t=2 ?



# Decomposizione di $\Phi$ al leading twist

Base di matrici di Dirac  $\{\mathbf{1}, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5, i\gamma_5, i\sigma^{\mu\nu} \gamma_5\}$

$$\Phi(p, P, S) = \frac{1}{2} [S \mathbf{1} + V_\mu \gamma^\mu + A_\mu \gamma^\mu \gamma_5 + iP \gamma_5 + iT_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \gamma_5]$$

$$S = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Phi) = C_1(p^2, p \cdot P)$$

$$V^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \Phi) = C_2 P^\mu + C_3 p^\mu$$

$$A^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma_5 \Phi) = C_4 S^\mu + C_5 p \cdot S P^\mu + C_6 P \cdot S p^\mu$$

$$P_5 = \frac{1}{2i} \text{Tr}(\gamma_5 \Phi) = 0$$

$$T^\mu = \frac{1}{2i} \text{Tr}(\sigma^{\mu\nu} \Phi) = C_7 P^{[\mu} S^{\nu]} + C_8 p^{[\mu} S^{\nu]} + C_9 p \cdot S P^{[\mu} p^{\nu]}$$



$$\text{Tr} [\dots] \rightarrow q_f(x) = \Phi[\gamma^+] = \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixP^+\xi^-} \langle P | \bar{\psi}_f(\xi^-) \gamma^+ \psi_f(0) | P \rangle$$

$$\text{Tr} [\dots \gamma_5] \rightarrow \lambda \Delta q_f(x) = \Phi[\gamma^+ \gamma_5] = \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixP^+\xi^-} \langle P | \bar{\psi}_f(\xi^-) \gamma^+ \gamma_5 \psi_f(0) | P \rangle$$

$$\text{Tr} [\dots \gamma^i \gamma_5] \rightarrow S_T^i \delta q_f(x) = \Phi[i\sigma^{i+} \gamma_5] = \int \frac{d\xi^-}{2\pi} e^{-ixP^+\xi^-} \langle P | \bar{\psi}_f(\xi^-) i\sigma^{i+} \gamma_5 \psi_f(0) | P \rangle$$