# Riassunto della lezione precedente

• vertice di Altarelli-Parisi $\rightarrow$ eq. di evoluzione DGLAP

• evoluzione e teoremi di fattorizzazione $\rightarrow$ coefficienti di Wilson
$\rightarrow$ fattorizzazione collineare

• schemi di fattorizzazione;
dimensione anomala e trasformate di Mellin di DGLAP kernel

• **O**perator **P**roduct **E**xpansion. Primo esempio: il teorema di Wick

• OPE su prodotto di correnti e.m. di quark liberi
$\rightarrow$ applicazione a DIS ed $e^+e^-$ inclusivi
$\rightarrow$ classificazione delle singolarità a corte distanze

(continua)

$$\mathcal{T}\left[J^\mu(\xi)J^\nu(0)\right] - \mathcal{T}\left[J^\mu(\xi)J^\nu(0)\right]^\dagger = \epsilon(\xi^0)\ \left[J^\mu(\xi), J^\nu(0)\right]$$

$$\epsilon(x^0) = \frac{x^0}{|x^0|} \qquad J^\mu \text{ hermitiana}$$

inoltre $\displaystyle \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} = PV\frac{1}{x^2} + i\pi\delta(x^2)$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^n} = PV\frac{1}{(x^2)^n} + i\pi\,\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\partial^{n-1}(x^2)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^n} - \frac{1}{(x^2 + i\epsilon)^n} = 2\pi i\,\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\partial^{n-1}(x^2)$$

con $\displaystyle \partial^n(x^2) = \frac{d^n}{d(x^2)^n}\,\delta(x^2)$

$$\epsilon(\xi^0)\left[J_\mu(\xi), J_\nu(0)\right] = \frac{i(2\xi_\mu\xi_\nu - \xi^2 g_{\mu\nu})}{3\pi^3}\,\partial^3(\xi^2) + \frac{\xi^\lambda}{\pi}\,\partial(\xi^2)\,\sigma_{\mu\lambda\nu\rho}\,\hat{O}^\rho_V(\xi,0)$$

$$+ \frac{i\xi^\lambda}{\pi}\,\partial(\xi^2)\,\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho}\,\hat{O}^\rho_A(\xi,0) + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi,0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0,\xi)$$

# Applicazione: $e^+e^-$ inclusivo

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{2}\,\frac{e^4}{2s^3}\,L^{\mu\nu}\,W_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} I_n(q) &= \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\epsilon(x^0)\,\partial^n(x^2) \\ &= \frac{i\pi^2}{4^{n-2}(n-1)!}\,(q^2)^{n-1}\,\epsilon(q^0)\,\theta(q^2) \end{aligned}$$

$$\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\langle 0|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|0\rangle$$

$$\sim \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\epsilon(x^0)\,\langle 0|\frac{i}{3\pi^3}\,\left(2x_\mu x_\nu - x^2\,g_{\mu\nu}\right)\,\partial^3(x^2)|0\rangle$$

$$= \frac{i}{3\pi^3}\left(g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial q}\cdot\frac{\partial}{\partial q} - 2\frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial q^\nu}\right)\underbrace{\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\epsilon(x^0)\,\partial^3(x^2)}_{I_3(q)}$$

$$= \frac{1}{6\pi}\,\epsilon(q^0)\,\theta(q^2)\,(4q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})$$

$$= \frac{e^4}{4\pi}\,\frac{1}{6s^3}\,L^{\mu\nu}\,(4q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\,\epsilon(q^0)\,\theta(q^2) \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

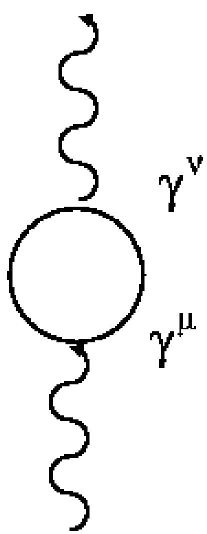
(continua)

partendo da corrente di quark $\sum_f e_f^2 \sum_c : \bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\psi_f(x) :$

$$\longrightarrow \; \sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum_f e_f^2$$ risultato di QPM !

Morale : OPE per quark liberi a corte distanze è equivalente a QPM

perchè QPM assume che a corte distanze i quark si comportino come fermioni liberi $\rightarrow$ asymptotic freedom postulata in QPM si ritrova rigorosamente in OPE



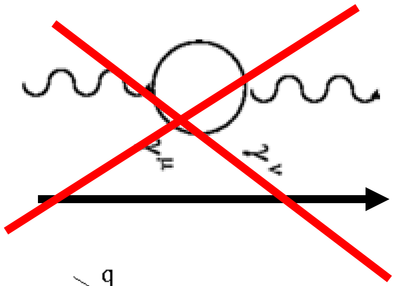

diagrammaticamente :

$$W_{\mu\nu} = \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, \langle 0|\frac{i}{3\pi^3}\left(2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}\right)\partial^3(x^2)|0\rangle$$
$$= \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, \langle 0|\mathrm{Tr}\left[S_F(x)\gamma^\mu S_F(-x)\gamma^\nu\right]|0\rangle$$

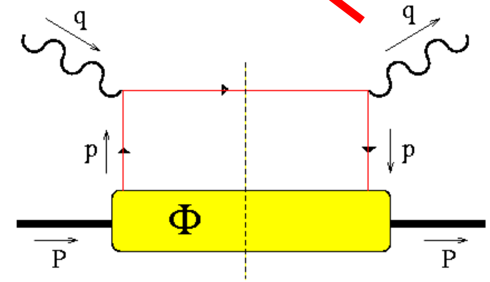
# Applicazione: DIS inclusivo

$$2MW_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\langle P|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|P\rangle$$

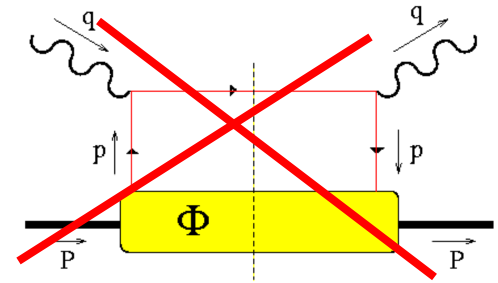
$$= \frac{i}{6\pi^4}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\left(2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}\right)\partial^3(x^2)\,\langle P|P\rangle$$



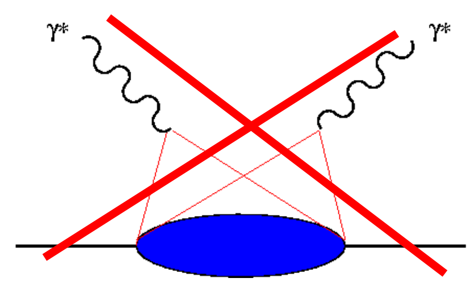
$$+\frac{1}{2\pi^2}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,x^\lambda\,\epsilon(x^0)\,\partial^1(x^2)\,\langle P|\sigma_{\mu\lambda\nu\rho}\,\hat{O}^\rho_V(x,0)|P\rangle$$




$$+\frac{1}{2\pi^2}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,x^\lambda\,\epsilon(x^0)\,\partial^1(x^2)\,\langle P|i\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho}\,\hat{O}^\rho_A(x,0)|P\rangle$$




$$+\frac{1}{2\pi}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\epsilon(x^0)\,\langle P|\hat{O}_{\mu\nu}(x,0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0,x)|P\rangle$$




no polarizzazione $\rightarrow W_S^{\mu\nu}$

(continua)

$[J^{\mu}(x),J^{\nu}(0)]$ dominante per $x^2 \to 0 \Rightarrow$ espandere $\hat{O}_V(x,0)$ intorno a x=0
operatore bilocale regolare $\to$ serie infinita di operatori locali regolari

$$\psi(x) = \psi(0) + x^{\mu}\,\partial_{\mu}\psi(x)|_{x=0} + \frac{1}{2!}\,x^{\mu_1}\,x^{\mu_2}\,\partial_{\mu_1}\,\partial_{\mu_2}\psi(x)|_{x=0} + \ldots$$

$$\hat{O}_V^{\rho}(x,0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}\;:\underbrace{(\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_n}\bar{\psi}(x))\Big|_{x=0}\gamma^{\rho}\psi(0) - \bar{\psi}(0)\gamma^{\rho}(\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_n}\psi(x))\Big|_{x=0}:}_{\hat{O}^{\rho}_{V\;\mu_1\ldots\mu_n}(0)}$$

poi

$$\sigma_{\mu\lambda\nu\rho}\int d^4x\,e^{iq\cdot x}\,x^{\lambda}\;\ldots\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_n}\,\langle P|\hat{O}^{\rho}_{V\;\mu_1\ldots\mu_n}(0)|P\rangle$$

$$\xrightarrow{\text{DIS}}\;\frac{F_1(x_B)}{M}\left(-g_{\mu\nu}+\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2}\right)+\frac{F_2(x_B)}{\nu}\,\tilde{P}^{\mu}\,\tilde{P}^{\nu}$$

risultato di QPM

# OPE procedura generale per campi (non) interagenti

$$J_\mu(x) J_\nu(0) = \sum_{\{\alpha\}} C_{\mu\nu\,\{\alpha\}}(x^2)\, x^{\mu_1} \ldots x^{\mu_{n_\alpha}}\, \hat{O}_{\mu_1 \ldots \mu_{n_\alpha}}(0)$$

light-cone expansion valida per $x^2 \sim 0$ $\quad \Rightarrow C_{\{\alpha\}}(x^2) \sim \dfrac{1}{x^{6+n_\alpha-d}}$

$n_\alpha$ = spin di $\hat{O}$
$d$ = dimensione canonica di $\hat{O}$

$$W_{\mu\nu} \propto \int d^4x\, e^{iq\cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle$$ $W_{\mu\nu}$ dimensionless

$$[d^4 x] = 4$$

$$[x^{\mu_1} \ldots x^{\mu_{n_\alpha}}] = n_\alpha$$

$$\left[ \langle P | P' \rangle = 2E\, (2\pi)^3\, \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \right] = 2$$

$$\left[ \langle P | \hat{O}_{\mu_1 \ldots . \mu_{n_\alpha}}(0) | P \rangle = P_{\mu_1} \ldots P_{\mu_{n_\alpha}}\, M^{d-n_\alpha-2}\, c_{\hat{O}} + o\left( \frac{M^2}{Q^2} \right) \right] = -d+2$$

(continua)

Teoria di campo interagente:
correzioni radiative $\rightarrow$ struttura delle singolarita` da eq. del gruppo di rinormalizzazione per *C*

$$C_{\{\alpha\}}(x^2) \overset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{6+n_\alpha-d}} \left(\log^{\gamma_{\hat{O}}}(\mu_F x) + ....\right)$$

$\gamma_{\hat{O}}$ dimensione anomala di $\hat{O}$

N.B. dipendenza da $\mu_F$ si cancella con dipendenza simile in $\hat{O}\,(0,\mu_F)$

(continua)

$$W_{\mu\nu} \propto \lim_{\epsilon\to 0} \int d^4x\, e^{iq\cdot x} \quad g_{\mu\nu}$$

$$\times \sum_{\{\alpha\}} \left( \frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^{3+\frac{n_\alpha - d}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + i\epsilon)^{3+\frac{n_\alpha - d}{2}}} \right)$$

$$\times x^{\mu_1} \ldots . x^{\mu_{n_\alpha}} \, P_{\mu_1} \ldots P_{\mu_{n_\alpha}} \, M^{d-n_\alpha-2} \, c_{\hat{O}}$$

$$\sim \quad g_{\mu\nu}\, c_{\hat{O}} \sum_{\{\alpha\}} c'_{\{\alpha\}} \left( \frac{M}{\sqrt{q^2}} \right)^{d-n_\alpha-2} \left( \frac{1}{x_B} \right)^{n_\alpha}$$

per $x \to 0$ (i.e., $q^2 \to \infty$ ) importanza di $\hat{O}$ determinata da twist $t = d - n_\alpha$

$t \geq 2$ ($t=2 \to$ scaling in regime DIS)

# Ricapitolando

procedura per il calcolo di $W_{\mu\nu}$ :

- espansione OPE per operatore bilocale in serie di operatori locali
- trasformata di Fourier di ciascun termine
- somma dei termini ottenuti
- risultato finale esprimibile in serie di potenze di M/Q attraverso il twist
  $t = d$ (dimensione canonica) - $n_\alpha$ (spin) $\geq 2$

$$2MW_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\,\langle P|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|P\rangle$$

$$\sim \frac{1}{2\pi^2}\,\sigma_{\mu\lambda\nu\rho}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\, x^\lambda\, \epsilon(x^0)\, \partial^1(x^2)\,\langle P|\hat{O}^\rho_V(x,0)|P\rangle$$

$$\sim \sum_{\{\alpha\}}\int d^4x\, e^{iq\cdot x}\left[C_{\mu\nu\,\{\alpha\}}(x^2) - \left(C_{\mu\nu\,\{\alpha\}}(x^2)\right)^\dagger\right] x^{\mu_1}\ldots x^{\mu_{n_\alpha}}\,\langle P|\hat{O}_{\mu_1\ldots\mu_{n_\alpha}}(0)|P\rangle$$

$$\sim c_{\hat{O}}\sum_{\{\alpha\}} c'_{\mu\nu,\{\alpha\}}\left(\frac{M}{\sqrt{q^2}}\right)^{d-n_\alpha-2}\left(\frac{1}{x_B}\right)^{n_\alpha}$$

$$\sim \frac{1}{(x^2)^{3+\frac{n_\alpha-d}{2}}}$$

(continua)

è possibile lavorare direttamente con operatori bilocali evitando gli step di cui sopra ? Qual è il twist *t* di un operatore bilocale ?

Esempio :

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}(0)\,\gamma^{\mu}\,\psi(x) &= \bar{\psi}(0)\,\gamma^{\mu}\,\psi(0) + x_{\nu}\,\bar{\psi}(0)\,\gamma^{\mu}\,\partial^{\nu}\,\psi(0) + \ldots. \\
&\equiv J^{\mu}(0) + x_{\nu}\,\theta^{\mu\nu}(0) + \ldots.
\end{aligned}
$$

se locale $\rightarrow$ *t* =2

*t* =2

$$
\theta^{\mu\nu} = \underbrace{\left(\theta^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}\,\theta^{\lambda}_{\lambda}\right)}_{t\,=2} + \underbrace{\frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}\,\theta^{\lambda}_{\lambda}}_{t\,=4}
$$

quindi se versione locale di operatore bilocale ha twist *t*=2
$\rightarrow$ operatore bilocale ha twist *t* $\geq$ 2

# Definizione operativa di twist (Jaffe, 1995)

poichè operatore bilocale di twist $t$ contribuisce a potenze del tipo

$$\left(\frac{M}{Q}\right)^{t-2}, \left(\frac{M}{Q}\right)^{t+2-2} \ldots., \quad t \geq 2$$

definizione operativa di twist per un operatore bilocale regolare

=

la potenza leading in *M/Q* a cui l'elemento di matrice dell'operatore contribuisce al processo deep-inelastic considerato nel limite di corte distanze ($\leftrightarrow$ nel regime DIS)

N.B. - le potenze di *M* necessarie si determinano decomponendo l'elemento di matrice in tensori di Lorentz e facendo un'analisi dimensionale

- definizione non coincide con $t = d$ – spin , ma questa è più comoda e permette di stimare direttamente il grado di soppressione *1/Q*

| correzioni QCD / correzioni di potenze | 1 | $\alpha_s$ | $\alpha_s^2$ | … |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | QPM $\longrightarrow$ | | IQPM $\longrightarrow$ | |
| 1/Q | $\downarrow$ | **O**perator **P**roduct **E**xpansion | | |
| $1/Q^2$ | | | | |
| $1/Q^3$ | | | | …. |
| … | $\downarrow$ | | | |

N.B. per il momento solo
per $e^+e^-$ e DIS inclusivo

# Preludio…

$$4\pi M W_{\mu\nu} = \int d^4x\, e^{iq\cdot x} \langle P|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|P\rangle \sim c_{\hat{O}} \sum_{\{\alpha\}} c'_{\mu\nu,\{\alpha\}} \left(\frac{M}{\sqrt{q^2}}\right)^{d-n_\alpha-2} \left(\frac{1}{x_B}\right)^{n_\alpha}$$

teorema ottico : $2\pi\, W^{\mu\nu} = \mathcal{I}m\, T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = i \int d^4x\, e^{iq\cdot x} \langle P|\mathcal{T}\left[J^\mu(x)\, J^\nu(0)\right]|P\rangle \sim \sum_n \frac{1}{\left(\sqrt{q^2}\right)^{t-2}} \underbrace{\tilde{c}_n^{\mu\nu}\, M^{d-n-2} \left(\frac{1}{x_B}\right)^n}_{\text{memoria di}}$$

$$C_n^{\mu\nu}(q^2, \mu_F)\, \langle P|\hat{O}_{\mu_1\ldots\mu_n}(0, \mu_F)|P\rangle$$

ma $x_B \leq 1 \rightarrow$ serie converge in regione non fisica $x_B > 1$ !