Riassunto lezione precedente

- Evidenza spettroscopica di molte particelle raggruppabili in multipletti quasi degeneri con stessa parità, massa, ma cariche diverse; ad un primo livello, evidenza di simmetria SU(2) di isospin, con lieve rottura di degenerazione dovuta a interazione elettromagnetica
- necessità di introdurre nuovo numero quantico, stranezza S, associato ad un'energia di ~ 150 MeV; gruppo di simmetria più appropriato è SU(3) flavour; mesoni organizzati in nonetti (=ottetti+singoletto) sia pseudoscalari (0-) sia vettori (1-); barioni organizzati in ottetto+decupletto a parità + (½+ e 3/2+) e singoletto a parità – (½-); nello spettro, ad alta energia livelli J^P associati di solito a partner $J^{(-P)}$, a bassa energia questi partner assenti: segnale di rottura di una simmetria legata a P (simmetria chirale?)
- Gell-Mann & Zweig ('63): ipotesi di simmetria a livello più basso, basata su struttura più elementare di mesoni e barioni in termini di quarks, cioè di particelle a spin ½, carica frazionaria, nr. quantico di sapore con $SU(3)_f$, etc..; si spiegano singoletti, ottetti, decupletti osservati, ma non si evidenzia mai la struttura a tripletto: i quark sono reali?
- cenni di teoria dei gruppi: il caso SU(2), le matrici di Pauli

Simmetrie SU(N): proprietà e rappresentazioni

SU(2)

gruppo delle trasformazioni unitarie U, rappresentate da matrici unitarie 2x2, che lasciano invariata la norma delle rappresentazioni del gruppo:

$$\chi' = U\chi \;\; ; \;\; \chi'^{+}\chi' = \chi^{+}U^{+}U\chi = \chi^{+}\chi$$

espressione generale per U corrispondente a rotazione θ intorno a $\hat{\mathbf{n}}$:

$$U = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\sigma}$$

generatori della trasformazione sono matrici 2x2 hermitiane a traccia nulla le matrici di Pauli σ

rappresentazione più comune per le 3 σ indipendenti:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

algebra dei generatori: $\left[\frac{1}{2}\sigma_i\,,\;\frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\,\frac{1}{2}\sigma_k \qquad \varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = 1$

SU(2) : classificazione multipletti e operatore di Casimir

σ_3 è diagonale ➔ gli stati di un multipletto di SU(2) sono caratterizzati da $< \frac{1}{2}\sigma_3 >$

operatori di innalzamento/abbassamento $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\,\sigma_2)$
soddisfano $[\frac{1}{2}\sigma_3 , \sigma_\pm] = \pm\, \sigma_\pm \quad [\sigma_+ , \sigma_-] = \sigma_3$

operatore di Casimir commuta con tutti i generatori

$$C = \tfrac{1}{2} (\sigma_+ \sigma_- + \sigma_- \sigma_+) + \tfrac{1}{4} (\sigma_3)^2 = (\tfrac{1}{2} \boldsymbol{\sigma})^2$$

per generica rappresentazione di SU(2) a dim. N : $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ (2x2) ➔ $\mathbf{S}$ (NxN)
stati identificati da S_3, $C = \mathbf{S}^2$
$[S_\pm , \mathbf{S}^2] = 0$ ➔ $S_\pm$ connettono stati con $\Delta<S_3>=\pm 1$ e stesso $<\mathbf{S}^2>$
➔ rappresentazione identificata da autovalore di S^2 e i suoi stati da autovalori di S_3

$S = \max$ {autovalori di S_3} ➔ $N = 2S+1$ ➔ autovalore di C è $S(S+1)$

Ex: $S=\frac{1}{2}$ rappresentazione fondamentale a dim.2; $C = \frac{3}{4}$

SU(2) : esempio isospin

rappresentazione fondamentale a dim. 2: I=½ C = ¾ doppietto p (I_3=+½)
n (I_3=-½)

rappresentazione regolare a dim. 2^2-1=3: I=1 C = 2 tripletto $\pi^{\pm}$ (I_3=±1)
π^0 (I_3=0)

Hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{str} + \mathcal{H}_{em}$

indipendenza della forza forte dalla carica ➔ invarianza per iso-rotazioni
$[\,\mathcal{H}_{str}\,,\,I_i\,] = 0$ i=1,2,3
degenerazione multipletti

operatore di carica Q = ½ B + I_3 ➔ $[\,\mathcal{H}_{em}\,,\,I_i\,] \neq 0$
rottura (piccola) della degenerazione
simmetria di isospin è approssimata

SU(2) : rappresentazione coniugata

rappresentazione fondamentale a dim. 2

$$\chi = \left|\begin{matrix} u \\ d \end{matrix}\right| = u(I_3 = +\tfrac{1}{2})\left|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right| + d(I_3 = -\tfrac{1}{2})\left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right|$$

Ex: isospin u = p , d = n

rappresentazione coniugata 2* $\quad \phi = \left|\begin{matrix} \overline{u} \\ \overline{d} \end{matrix}\right|$

Ex: $\overline{\text{p}}$, $\overline{\text{n}}$

trasformazione per iso-rotazione θ intorno a ŷ

$$\begin{aligned} \chi' &= U\,\chi \\ U &\equiv \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\theta\hat{\mathbf{y}}\cdot\boldsymbol{\tau}} \end{aligned}$$

N.B. matrici di Pauli **σ** = **τ** per isospin

se rappresentazione coniugata definita come $\phi = \left|\begin{matrix} \overline{d} \\ -\overline{u} \end{matrix}\right| \Rightarrow \phi' = U\,\phi$

cioè rappresentazioni 2 ⇔ 2*
in generale N $\cancel{\Leftrightarrow}$ N*

SU(2) : rappresentazione regolare

rappresentazione fondamentale dim. 2: generatori **σ**, algebra $\left[\frac{1}{2}\sigma_i \, , \, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\varepsilon_{ijk} \, \frac{1}{2}\sigma_k$

per SU(N) rappresentazione fondamentale ha dim. N e generatori matrici NxN

rappresentazione regolare ha dim. = nr. dei generatori = N^2-1

per N=2 dim. =3, generatori **S** sono matrici 3x3 con algebra $[S_i \, , \, S_j] = i\varepsilon_{ijk} \, S_k$

rappresentazione più comune

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

S_3 diagonale: base canonica $\quad |\pi^+ > \equiv \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \, , |\pi^0 > \equiv \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \, , |\pi^- > \equiv \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

base "iso-vettoriale" $\quad |\pi_1 >= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^+ > - |\pi^- > \right) \, , |\pi_2 >= \frac{i}{\sqrt{2}} \left(|\pi^+ > + |\pi^- > \right) \, , |\pi_3 > \equiv |\pi^0 >$

costruzione della rappresentazione attraverso costanti di struttura dell'algebra:

$$<\pi_j \mid S_i \mid \pi_k> = - i \, \varepsilon_{ijk}$$

vale in generale per SU(N) con M generatori

SU(3) : proprietà generali

gruppo delle trasformazioni unitarie U tali per cui χ' = Uχ

$$\chi = \left| \begin{matrix} u \\ d \\ s \end{matrix} \right|$$

U sono matrici unitarie 3x3 del tipo $U = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\lambda}$

8 generatori della trasformazione: 8 matrici 3x3 hermitiane a traccia nulla

le matrici di Gell-Mann λ

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sottogruppo SU(2) di isospin

"I – spin" su (u,d)

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sottogruppo "V – spin" su (u,s)

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

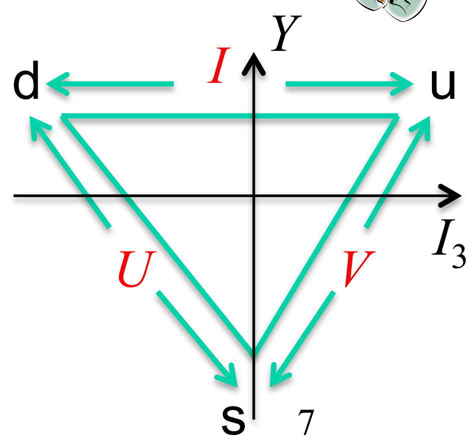
sottogruppo "U – spin" su (d,s)

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

operatore isospin ½ λ_3

operatore ipercarica

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \lambda_8$$



SU(3) : classificazione multipletti e operatore di Casimir

definiamo $F_i = ½\lambda_i$. Algebra: $[F_i, F_j] = i\, f_{ijk}\, F_k$, $\{F_i, F_j\} = 4/3\, \delta_{ij} + 4\, d_{ijk}\, F_k$

costanti di SU(3): $f_{123}=1$, $f_{458}=f_{678}= \sqrt{3}/2$

$f_{147}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{516}=f_{637}= ½$

$d_{118}=d_{228}=d_{338}=-d_{888}= 1/\sqrt{3}$

$d_{146}=d_{157}=d_{256}=d_{344}=d_{355}= ½$

$d_{247}=d_{366}=d_{377}= -½$

$d_{448}=d_{558}=d_{668}=d_{778}= -1/2\sqrt{3}$

operatore di Casimir

SU(2): $I_i = ½\, \sigma_i$ $\qquad C = (\boldsymbol{I})^2 = ½\, (I_+I_- + I_-I_+) + (I_3)^2 = ½\, \{I_+, I_-\} + (I_3)^2$

SU(3): $F_i = ½\, \lambda_i$ $\qquad C = (\mathbf{F})^2 = \Sigma_{i=1}^{8}\, F_iF_i = ½\, \{I_+, I_-\} + ½\, \{V_+, V_-\} + ½\, \{U_+, U_-\} + (F_3)^2 + (F_8)^2$

$I_\pm = F_1 \pm i\, F_2$
$V_\pm = F_4 \pm i\, F_5$
$U_\pm = F_6 \pm i\, F_7$

autovalore di C è $⅓\, (p^2+pq+q^2)+(p+q)$ p,q ε $\mathbf{N}_+$

dim.	(p,q)	F²
1	(0,0)	0
3	(1,0)	4/3
$\bar{3}$	(0,1)	4/3
8	(1,1)	3
6	(2,0)	10/3
10	(3,0)	6

$3 \not\Leftrightarrow 3^*$ because of Y

Quarks e rappresentazioni SU(N)

supponiamo barioni = {qqq} e mesoni = {$q\bar{q}$}

sapore	up u	down d	strange s
nr. barionico B	⅓	⅓	⅓
isospin I	½	½	0
I_3	+½	-½	0
ipercarica Y	⅓	⅓	-⅔
carica Q	+⅔	-⅓	-⅓
stranezza S	0	0	-1

Y = B+S

Q = I_3+½Y

servono almeno 2 flavors
u,d per distinguere p da n

gruppo $SU(2)_I$

servono almeno 3 flavors
u,d,s per distinguere p da Σ^+

gruppo $SU(3)_f$

Spettro barionico e simmetria degli stati

barioni = {qqq}   q = u,d,s (per ora non importa ordine: uds ⇔ dsu ⇔ sud…)

quark	simmetria	carica	stranezza	stati
uuu	S	2	0	Δ^{++}
uud	S M	1	0	Δ^{+} p
udd	S M	0	0	Δ^{0} n
ddd	S	-1	0	Δ^{-}
uus	S M	1	-1	Σ^{+} Σ^{*+}
uds	S M M A	0	-1	Σ^{0} Σ^{*0} Λ^{0} Λ
dds	S M	-1	-1	Σ^{-} Σ^{*-}
uss	S M	0	-2	Ξ^{0} Ξ^{*0}
dss	S M	-1	-2	Ξ^{-} Ξ^{*-}
sss	S	-1	-3	Ω^{-}

come distinguere ?

p da Δ^{+} ←

n da Δ^{0} ←

…. ←

…. ←

…. ←

…. ←

…. ←

ora ordine conta: dato {qqq} con q=u,d,s si può sempre costruire un S → 10

dato {qqq'} o {qq'q''} si può avere simm. mista M → 8 ({qq'q''} ha 2 "modi" diversi → M M)

dato {qq'q''} si può avere un A ({qq'q''}=-{q'qq''} per ogni coppia) → 1

Rappresentazioni di SU(2)

Rappresentazione fondamentale (dim. 2): $|\chi\rangle = \begin{vmatrix} u \\ d \end{vmatrix}$

2 oggetti : $|\chi_1>$, $|\chi_2>$

$\|\chi_1>$	$\|\chi_2>$	scambio 1 <-> 2	
u	u	uu	
u	d	1/√2 (ud+du)	1/√2 (ud-du)
d	u		
d	d	dd	
		S	A

$|S_1\ S_{1z}\ ;\ S_2\ S_{2z}> \ \Leftrightarrow\ |S\ S_z>$

$|\tfrac12\ \tfrac12\ ;\ \tfrac12\ \tfrac12> \ \Leftrightarrow\ |1\ 1>$

$1/\sqrt{2}\ [\ |\tfrac12\ \tfrac12\ ;\ \tfrac12\ -\tfrac12> + |\tfrac12\ -\tfrac12\ ;\ \tfrac12\ \tfrac12>\ ] \ \Leftrightarrow\ |1\ 0>$

$1/\sqrt{2}\ [\ |\tfrac12\ \tfrac12\ ;\ \tfrac12\ -\tfrac12> - |\tfrac12\ -\tfrac12\ ;\ \tfrac12\ \tfrac12>\ ] \ \Leftrightarrow\ |0\ 0>$

$|\tfrac12\ -\tfrac12\ ;\ \tfrac12\ -\tfrac12> \ \Leftrightarrow\ |1\ -1>$

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3}_S \oplus \mathbf{1}_A$$

notazione di teoria di gruppo

Ex: $S_1 = \tfrac12 \quad S_2 = \tfrac12 \rightarrow S = 1$ o 0

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \otimes \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}_S \oplus \mathbf{0}_A$$

3 oggetti : $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$, $|x_3\rangle$

$\lvert x_1\rangle\lvert x_2\rangle\lvert x_3\rangle$	scambio 1 ⇔ 2			S_z
uuu	uuu			3/2
uud, udu, duu	$1/\sqrt{3}$ (uud+udu+duu)	$1/\sqrt{2}$ (ud-du)u	$1/\sqrt{6}$ [(ud+du)u - 2 uud]	½
udd, dud, ddu	$1/\sqrt{3}$ (udd+dud+ddu)	$1/\sqrt{2}$ (ud-du)d	$-1/\sqrt{6}$ [(ud+du)d - 2 ddu]	-½
ddd	ddd			-3/2
	S	M_A	M_S	

antisimmetrico in 1⇔2   simmetrico

ma non definito negli altri

Ex: $S_1 = ½$ $S_2 = ½$ $S_3 = ½$ ➔ $S_{12} = 1$ $S_3 = ½$ + $S_{12} = 0$ $S_3 = ½$

➔ $S = 3/2$ o $½_S$ + $S = ½_A$

$$\left(\tfrac{1}{2} \otimes \tfrac{1}{2}\right) \otimes \tfrac{1}{2} = \mathbf{1} \otimes \tfrac{1}{2} + \mathbf{0} \otimes \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}{}_S \oplus \tfrac{1}{2}{}_S \oplus \tfrac{1}{2}{}_A$$

$$(\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) \otimes \mathbf{2} = (\mathbf{3} \otimes \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1} \otimes \mathbf{2}) = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M_S} \oplus \mathbf{2}_{M_A}$$