Meccanica 15 luglio 2014

1. **Problema (1 punto)**

Un treno ha un semaforo verde a 600 m, della durata di 45 s. Se il treno ha una velocità di 30 km/h, che accelerazione costante dovrà assumere, per poter passare al semaforo appena prima che diventi rosso?. Quale sarà la sua velocità in km/h al momento di passaggio al semaforo?

Soluzione

Dalla equazione $x = vt + at^2/2$ si ottiene, con x=600 m, t=45 s e v= 8.33 m/s:

$a = \frac{2(x-vt)}{t^2} = \mathbf{0.22}$. m/s^2

La velocità di passaggio è allora: $v_1 = v + a\,t$ = 18.23 m/s = **65.6** km/h

2. **Problema (2 punti)**

Una cassa piena di sabbia, di massa M=50 kg, poggia su un piano orizzontale di coefficiente di attrito dinamico μ=0.7. Contro la cassa, inizialmente ferma, viene sparato orizzontalmente un proiettile di massa m=1 kg. Il proiettile entra nella cassa con velocità V_0=300 m/s e ne emerge dalla parete opposta con velocità V_1= 50 m/s. La cassa dopo l'urto si mette in moto . Determinare:

a) l'energia W dissipata nell'urto;
b) il tempo impiegato dalla cassa per fermarsi;
c) l'energia W_1 dissipata per attrito.

Soluzione

Conservazione della quantità di moto (V_c velocità della cassa): $mV_0 = mV_1 + MV_c$, quindi V_c=5 m/s. a) L'energia dissipata è

$$W = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{1}{2}MV_c^2 = \mathbf{43125}\ \text{J}$$

b) Il tempo impiegato dalla cassa per frenare è:

$$V_c - \mu g t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{V_c}{\mu g} = \mathbf{0.73}\ \text{s}$$

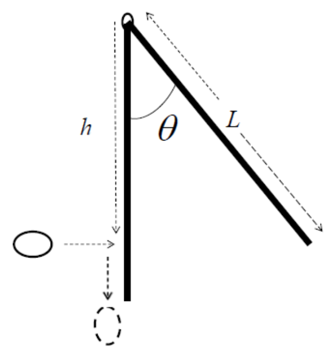
d) Dal teorema dell'energia cinetica:

$$W_1 = \frac{1}{2}\, M\, V_C^2 = \mathbf{625}\ \text{J}$$

3. **Problema (2 punti)**

Una sbarra di massa M=1.5 kg e lunghezza L= 60 cm è incernierata ad un estremo in modo che possa ruotare liberamente intorno ad un asse orizzontale. La sbarra si trova in posizione verticale in quiete, quando viene colpita orizzontalmente da un proiettile di massa m= 150 g con velocità V_0=15 m/s. La dinamica dell'urto è tale che, dopo l'urto, il proiettile cade verticalmente come in figura, e la sbarra raggiunge una deflessione massima di θ=30°.

Si determini la distanza h tra la cerniera e il punto di impatto del proiettile.
(*Momento di inerzia della sbarra rispetto al perno* $I = ML^2/3$).

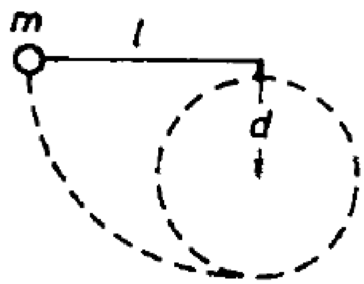


Soluzione
Nell'urto non si conserva né l'energia né la quantità di moto. Dato che le forze esterne si esercitano sulla cerniera, se si prende come polo la cerniera si conserva invece il momento della quantità di moto (momento angolare). Allora:
$m\,V_0\,h = I\omega$, dove $I = \frac{1}{3}ML^2 = 0.18\ \text{kg m}^2$.
Per trovare ω basta applicare la conservazione dell'energia alla sbarra dopo l'urto
$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}LMg(1-\cos\theta) \ \rightarrow\ \omega = \sqrt{\frac{LMg(1-\cos\theta)}{I}} = 2.56\ \text{rad/s}$.
Si ha quindi

$$h = \frac{I\omega}{mV_0} = \mathbf{20.5}\ \text{cm}$$

4. **Problema (2 punti)**

Un corpo di massa m è legato ad una corda di massa trascurabile e inestensibile lunga l=1 m. Il corpo viene lasciato cadere, soggetto alla forza peso, nella posizione indicata in figura. Un chiodo è fissato nella posizione indicata in figura e costringe il corpo a muoversi lungo la circonferenza tratteggiata. Determinare il valore minimo della distanza d in figura affinché il corpo compia un giro completo intorno al chiodo.



Soluzione

La velocità posseduta dalla massa quando la fune tocca il chiodo vale $v = \sqrt{2gl} = 4.43 \ \ \mathrm{m/s}$. Perché la massa compia un giro occorre l'uguaglianza fra la forza peso e quella centripeta:

$\frac{mv_1^2}{l-d} = mg \ \ \rightarrow \ \ v_1 = \sqrt{g(l-d)}$

Dalla conservazione dell'energia abbiamo:

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} + 2mg(l-d) \ \rightarrow \ 2gl = g(l-d) + 4g(l-d) = 5g(l-d) \ \rightarrow$

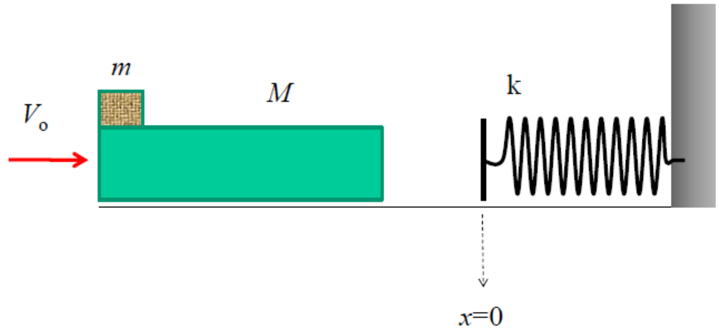
$$d = \frac{3}{5}l = \mathbf{0.6}\ \mathrm{m}$$

5. **Problema (3 punti)**

Un corpo puntiforme di massa m=1.0 kg è poggiato su una lastra di massa M=3.0 kg. La lastra scivola senza attrito su un piano orizzontale . L'appoggio tra corpo e lastra presenta un attrito di coefficienti statico e dinamico $\mu_s =$ 0.5 e μ_d=0.3, rispettivamente. Inizialmente la lastra si muove verso destra con velocità V_0=2 m/s e il corpo è in quiete rispetto ad essa. Nel suo moto, alla coordinata x=0, la lastra incontra una molla (a riposo e di massa trascurabile) di costante elastica k= 100 N/m, disposta come in figura, con un estremo ancorato a una parete. L'urto tra lastra e molla è perfettamente elastico.

Determinare:

a) La velocità V_1 e la distanza percorsa x_1 dal sistema lastra+ corpo fino al momento in cui il corpo inizia a scivolare sulla lastra;
b) La massima compressione raggiunta dalla molla x_2, quando la velocità della lastra si annulla e il corpo sta scivolando sulla lastra.



Soluzione
Dalla conservazione dell'energia e dall'equazione della molla:

$$\frac{1}{2}(m+M)V_0^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(m+M)V_1^2$$

$$(m+M)a = -kx_1$$

da cui

$$a = \left|\frac{k}{m+M}x_1\right| = \mu_s g \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{m+M}{k}\mu_s g \quad = \mathbf{19.6}\ \text{cm}$$

$$V_1 = \sqrt{V_0^2 - \frac{M+m}{k}(\mu_s g)^2} \quad = \mathbf{1.74}\ \text{m/s}$$

Se x_2 è la compressione finale della molla, applichiamo ora la conservazione dell'energia totale alla lastra soltanto. Su di essa, oltre alla forza elastica, agirà la forza di attrito che compie un lavoro $\mu mg\,(x_2-x_1)$, che tende a comprimere la molla. Tenendo conto che in x_2 la velocità della lastra è nulla, otteniamo una equazione di secondo grado in x_2:

$$\frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \mu mg(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$x_2 = \frac{\mu mg + \sqrt{(\mu mg)^2 + k(MV_1^2 + kx_1^2 - 2\,\mu mgx_1)}}{k} = \mathbf{37.3}\ \text{cm}$$

Risultati

AMMESSI

418483	9.5
420172	8
424890	3
400957	3
418260	3.5

NON AMMESSI

417860	2
419292	1
419779	1.5
418540	1.5
421451	1
419072	--