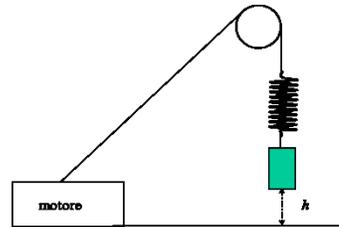


Meccanica 24 Aprile 2018

Problema 1 (1 punto)

Un blocco di massa $M=90$ kg è attaccato tramite una molla di costante elastica $K=2 \times 10^3$ N/m, massa trascurabile e lunghezza a riposo nulla, a una fune inestensibile e di massa trascurabile che scorre senza scivolare su un argano cilindrico attorno al quale la fune è arrotolata. L'argano è libero di ruotare senza attriti. Inizialmente il corpo poggia a terra. Un motore solleva il corpo tramite la fune fino a portarlo ad una altezza da terra pari a $h=50$ cm. Trovare a) il lavoro compiuto dal motore.



Soluzione

All'equilibrio la molla si allunga secondo l'equazione

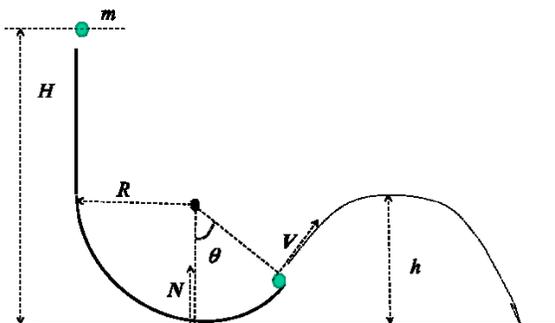
$$Kx = Mg \rightarrow x = \frac{Mg}{K} = 0.44 \text{ m.}$$

Poiché si conserva l'energia meccanica, il lavoro compiuto dal motore è pari alla energia potenziale accumulata all'equilibrio:

$$W = Mgh + \frac{1}{2}K\left(\frac{Mg}{K}\right)^2 = 441.45 + 193.6 = \mathbf{635.05 \text{ J}}$$

Problema 2 (2 punti)

Una pallina di massa $m=700$ g e di dimensioni trascurabili viene fatta cadere da ferma, sotto l'azione della forza peso, da una altezza $H=5R$. Cadendo finisce entro una guida circolare di raggio $R=2$ m priva di attrito. La guida circolare si interrompe a un angolo di $\theta=30^\circ$ rispetto alla verticale. Quando la pallina raggiunge il termine della guida viene proiettata in aria. Calcolare: a) la reazione normale N che la guida circolare esercita sulla pallina quando questa si trova nel punto più basso della traiettoria, b) l'altezza massima h che la pallina raggiunge dopo aver abbandonato la guida.



Soluzione

a) Dalla conservazione della energia meccanica abbiamo:

$$mgH = \frac{1}{2}mV^2 \rightarrow V = \sqrt{2gH} = \sqrt{10gR} = 14.0 \text{ m/s}$$

Nel punto più basso della traiettoria dalla seconda legge di Newton abbiamo:

$$N - mg = m\frac{V^2}{R} \rightarrow N = mg + m10g = 11mg = \mathbf{75.54 \text{ N}}.$$

b) Indicando con h_0 la quota di distacco dalla guida, si ha:

$$h_0 = R - R \cos \theta = 0.268 \text{ m}.$$

La velocità di uscita V_0 si può trovare con la conservazione dell'energia meccanica:

$$mg5R = \frac{1}{2}mV_0^2 + mR(1 - \cos \theta) \rightarrow V_0 = \sqrt{2gR(4 + \cos \theta)} = 13.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La componente lungo y vale:

$$V_{0y} = V_0 \sin \theta$$

Dalla relazione

$$g \int_{h_0}^h dx = \int_{V_{0y}}^0 V dV$$

si ottiene:

$$h = h_0 + \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \sin^2 \theta = \mathbf{2.7 \text{ m}}$$

Alternativamente, allo stesso risultato si perviene con la conservazione dell'energia meccanica, imponendo che nel punto più alto della traiettoria $V_{0y}=0$, calcolando

$V_{0x} = V_0 \cos \theta$:

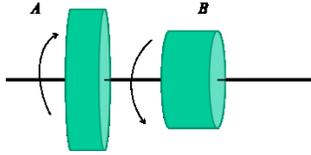
$$mgh_0 + \frac{1}{2}mV_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mV_0^2 \cos^2 \theta = mg5R$$

e risolvendo nell'incognita h .

Problema 3 (2 punti)

Due dischi A e B di massa uguale $M=2 \text{ kg}$ ma raggio diverso, $3R$ ed R rispettivamente, con $R=50 \text{ cm}$, ruotano senza attrito con uguale velocità angolare $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$ intorno ad un asse comune *ma in senso opposto*. I due dischi vengono portati in contatto da un impulso che agisce lungo l'asse. Le forze di attrito tra le superfici di contatto fanno in modo che entrambi i dischi raggiungano una comune velocità angolare ω .

Determinare; a) la velocità angolare finale ω ; b) il lavoro compiuto dalle forze di attrito.



Soluzione

I momenti di inerzia valgono

$$I_A = \frac{1}{2} m (3R)^2 = \frac{9}{2} m R^2$$

$$I_B = \frac{1}{2} m R^2$$

Lungo l'asse di rotazione non vi sono momenti di forze esterne, quindi la componente del momento angolare si conserva:

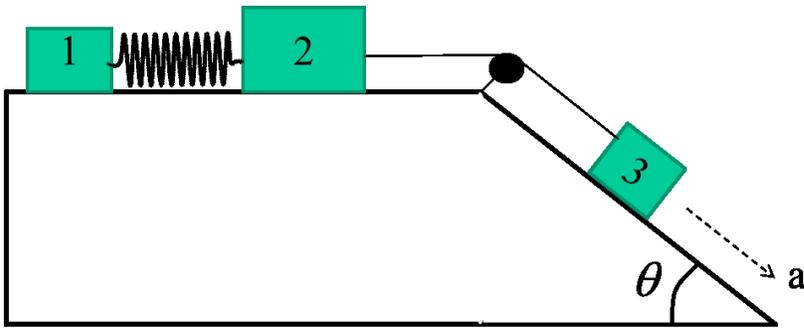
$$L = (I_A - I_B) \omega_0 = (I_A + I_B) \omega \rightarrow \omega = \frac{I_A - I_B}{I_A + I_B} \omega_0 = 0.8 \omega_0 = \mathbf{2.4 \text{ rad/s}}$$

Il lavoro delle forze di attrito si trova col teorema dell'energia cinetica:

$$W = \frac{1}{2} (I_A + I_B) \omega^2 - \frac{1}{2} (I_A + I_B) \omega_0^2 = \mathbf{-4.05 \text{ J}}$$

Problema 4 (2 punti)

Sono dati tre corpi con masse $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = 2m$ con $m = 1400\text{g}$ su un blocco fisso come in figura. Il tratto orizzontale sul quale poggiano i corpi 1 e 2 presenta un coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.16$. I corpi 1 e 2 sono collegati da una molla di costante elastica $K = 20 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo nulla, mentre i corpi 2 e 3 sono collegati da una fune inestensibile di massa trascurabile, connessa a una puleggia di massa trascurabile. Il piano inclinato ha un angolo $\theta = 45^\circ$ e non presenta attrito per il corpo 3. Sapendo che i corpi 1 e 2 rimangono sul piano orizzontale, il corpo 3 sul piano inclinato, sapendo che la lunghezza della molla rimane costante e la fune tesa, calcolare: a) il modulo della accelerazione a dei corpi e la lunghezza L della molla; b) l'angolo al di sotto del quale il sistema resta in quiete.



Soluzione

a) I diagrammi di corpo libero forniscono il sistema:

$$\begin{aligned} KL - \mu m_1 g &= m_1 a \\ -KL - \mu m_2 g + T &= m_2 a \\ -T + m_3 g \sin \theta &= m_3 a \end{aligned}$$

Dove l'accelerazione è la stessa per tutti e tre i corpi a causa della fune inestensibile e la molla in equilibrio.

Sommando le tre equazioni si ottiene immediatamente:

$$-\mu m_1 g - \mu m_2 g + m_3 g \sin \theta = (m_1 + m_2 + m_3) a$$

$$\mu m g (\sin \theta - 3) = 4 m a \rightarrow a = \frac{\sin \theta - 3\mu}{4} g = \mathbf{0.557 \text{ m/s}^2}$$

Il sistema fornisce anche i valori dell'allungamento L della molla:

$$x = m g \frac{\sin \theta + \mu}{4K} = \mathbf{0.15 \text{ m}}$$

e, anche se non espressamente richiesto, il valore della tensione T della fune:

$$T = \frac{3m g}{4} (\mu + \sin \theta) = 8.93 \text{ N}$$

b) Studiamo la situazione statica supponendo che i coefficienti di attrito statico e dinamico siano uguali. Ponendo $a=0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 3\mu \\ x &= \mu m g / K \\ T &= 3\mu m g \end{aligned}$$

Questa situazione corrisponde alla molla elongata che esercita una forza bilanciata esattamente dalla forza di attrito sul corpo 1 e dalla forza di attrito e dalla tensione sul corpo 2. Il sistema può muoversi con velocità costante o restare in quiete se inizialmente fermo. L'angolo limite vale:

$$\theta = \sin^{-1} 3\mu = \mathbf{28.7^\circ}$$

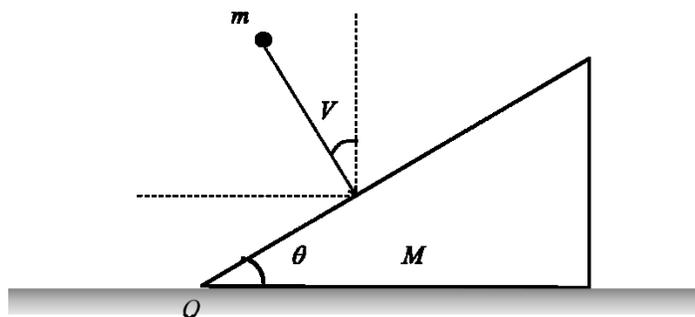
L'altro caso statico si ha quando la tensione è minore della forza di attrito sul corpo 2:

$$mg \sin \theta \leq \mu 2mg \rightarrow \theta \leq \sin^{-1} 2\mu = 18.7^\circ$$

che avviene però ad un angolo inferiore al precedente.

Problema 5 (3 punti)

Un cuneo di massa $M=1$ kg e di angolo $\theta=30^\circ$ può scorrere su un piano orizzontale liscio. Un proiettile di massa $m=50$ g urta la faccia inclinata del cuneo incidendo perpendicolarmente ad essa, con una velocità $V=100$ m/s. Il proiettile si ingloba nel cuneo in un urto completamente anelastico. Calcolare a) la velocità del sistema cuneo + proiettile dopo l'urto e b) il coefficiente di attrito statico tra cuneo e piano necessario per mantenere il cuneo fermo dopo l'urto, sapendo che il proiettile impiega 15 ms per conficcarsi nel cuneo (due punti).



Soluzione

a) Dalla conservazione della quantità di moto lungo l'asse x:

$$mV \sin \theta = (M + m)V_1 \rightarrow V_1 = \frac{mV \sin \theta}{M+m} = \mathbf{2.38 \text{ m/s}}$$

b) La forza media esercitata dall'impulso del proiettile è data da:

$$F = \frac{mV}{t} = 333 \text{ N}$$

Lungo l'asse orizzontale e verticale si ha

$$F \sin \theta - f = 0$$

$$F \cos \theta + Mg - N = 0$$

Dove la forza di attrito vale $f = \mu N$.

Si ha quindi:

$$F \sin \theta - \mu(F \cos \theta + Mg) \rightarrow \mu = \frac{F \sin \theta}{F \cos \theta + Mg} = \mathbf{0.56}$$

Ammessi all'orale

455730	3/10		
459380	9.5/10	459523	6.5/10
460852	9.5/10	458293	7/10
456052	7/10	459567	6/10
456102	6.5/10	454251	8/10
459134	9.5/10	457947	7/10
455808	7/10	458481	6/10
454996	4/10		
454062	3/10		
457565	5/10		
457936	6/10		
454049	3/10		
461768	8/10		
458603	9/10		
460411	4.5/10		
455996	3/10		
459038	5/10		
457858	7/10		
458957	7/10		
459105	5/10		
455322	6/10		
460721	9.5/10		
455990	6/10		
457952	8/10		
458214	3/10		
458338	8/10		
459223	5/10		
460044	8/10		
455241	8/10		
454975	3/10		
457780	4/10		
449060	4/10		
455233	5/10		
447462	7/10		
458877	8/10		
457843	9.5/10		

Non ammessi

445354	1/10
455891	--
457370	1/10
455789	1/10
448345	1/10
456115	1/10
456698	--
446409	2/10
458249	--
454233	1/10
454219	1/10
450266	--
456682	1/10
454150	--
446137	--
457896	1/10
456591	1/10
455381	1/10