

**Esperienze di  
Laboratorio II  
Circuiti elettrici**

## 1.1 Il condensatore

Il condensatore, come elemento circuitale, va considerato, come qualsiasi altro componente elettrico, in termini di corrente e differenza di potenziale.

La relazione tra queste due grandezze si trova facilmente dalla definizione di capacità  $C = Q/V_c$ :

$$V_c = \frac{1}{C}Q = \frac{1}{C} \int I(t) dt ; \quad I = C \frac{dV}{dt} , \quad (1.1)$$

dove  $Q$  è la carica presente all'istante  $t$  sui piatti del condensatore. In presenza di un segnale di corrente sinusoidale  $I = I_0 \cos \omega t$ , la relazione tra tensione e corrente diventa:

$$V_c = \frac{1}{\omega C} I_0 \sin \omega t = \frac{1}{\omega C} I_0 \cos(\omega t - \pi/2) \quad (1.2)$$

Ai capi di un condensatore la tensione è in ritardo di  $90^\circ$  rispetto alla corrente.

Vediamo ora come inserire il condensatore nella equazione di maglia. Considerando il circuito di fig. 1.1 (a) con un generatore di tensione continua  $E$ , percorrendo la maglia in senso orario e tenendo conto della polarità ai capi del condensatore, possiamo scrivere:

$$-E + IR + V_c = -E + IR + \frac{1}{C} \int I(t) dt = 0 \quad (1.3)$$

Derivando questa equazione otteniamo una equazione differenziale al primo ordine nella corrente

$$\frac{dI}{dt}R + \frac{I}{C} = 0 , \quad (1.4)$$

che ha la nota soluzione esponenziale

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC} = \frac{E}{R} e^{-t/RC} , \quad (1.5)$$

dove  $I_0 = E/R$  è la condizione all'istante iniziale col condensatore completamente scarico. La (1.5) mostra che la corrente decresce esponenzialmente con costante di tempo  $\tau \equiv RC$ , e che il processo di carica ha termine quando il condensatore raggiunge la tensione  $E$ .

Vediamo ora la scarica del condensatore tramite il circuito di fig 1.1 (b). La equazione di maglia sembra essere

$$IR - V_c = IR - \frac{1}{C} \int I(t) dt = 0 \quad ? , \quad (1.6)$$

perché il condensatore viene percorso dal  $-$  al  $+$ . Derivando questa equazione, a differenza della (1.4), otteniamo una equazione che ha come soluzione un esponenziale divergente privo di significato fisico. Cosa c'è di sbagliato? Il fatto è che, nella scarica, la (1.1) va riscritta cambiando il segno, perché la corrente è *data dalla carica che abbandona il condensatore*:

$$I(t) dt = Q(t) - Q(t + dt) = -dQ$$

e quindi:

$$V_c = \frac{1}{C}Q = -\frac{1}{C} \int I(t) dt \quad (\text{fase di scarica}). \quad (1.7)$$

## 1.2 La bobina

Consideriamo ora il campo magnetico entro un mezzo ferromagnetico (in genere un nucleo di ferrite) di lunghezza  $\mathcal{L}$  e sezione  $S$  intorno al quale si avvolge un solenoide percorso dalla corrente  $I$  (fig. 1.3). Nell'approssimazione di solenoide infinito, la lunghezza della bobina deve essere molto maggiore del raggio. Applicando la legge di Ampère al circuito di fig. 1.3 e tenendo presente

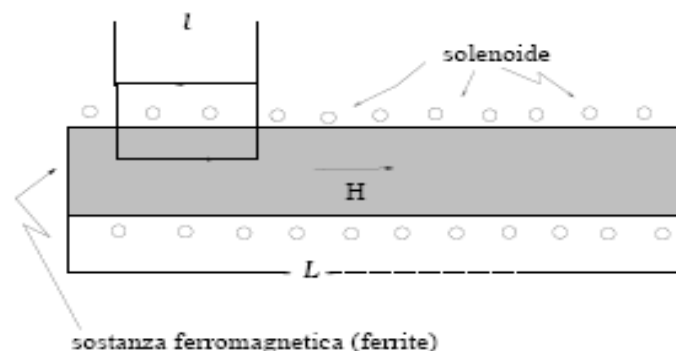


Figure 1.3: Schema di una bobina con ferrite

che, nell'approssimazione del solenoide infinito, il campo  $H$  è presente solo entro il mezzo ferromagnetico, otteniamo:

$$Hl = \frac{N}{\mathcal{L}}lI ,$$

dove  $\mathcal{L}$  è la lunghezza del solenoide,  $l$  il tratto indicato in fig. 1.3 ed  $N$  il numero totale di spire. Si ha pertanto:

$$H = \frac{N}{\mathcal{L}}I \quad [\text{amperespire/m}] . \quad (1.11)$$

Il coefficiente di autoinduzione della bobina si ricava facilmente dalla (1.11) tenendo conto che il flusso di  $B = \mu H$  vale  $\Phi(B) = NBS$ , dove  $N$  è il numero totale di spire ed  $S$  è la sezione della bobina:

$$L = \frac{\Phi(B)}{I} = \frac{\mu N H S}{I} = \mu \frac{S}{\mathcal{L}} N^2 . \quad (1.12)$$

Lo studio della bobina come elemento circuitale è basato sulla legge di induzione e sulla legge di Laplace che lega il flusso magnetico di un circuito rigido alla corrente:

$$V = -\frac{d\Phi(B)}{dt}, \quad \Phi(B) = LI, \quad (1.13)$$

le quali danno luogo alla legge:

$$V_l = \pm L \frac{dI}{dt}, \quad I(t) = \frac{1}{L} \int V(t) dt. \quad (1.14)$$

Per determinare quale segno usare nella equazione di maglia, consideriamo il circuito di fig. 1.4 e lasciamo per ora indeterminato il segno della tensione

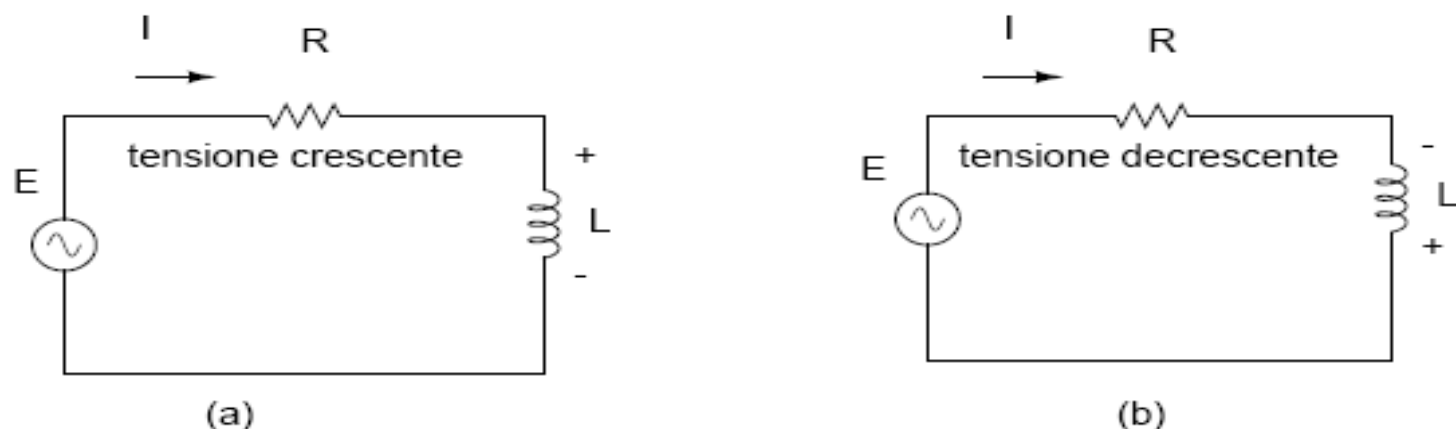


Figure 1.4: Partitore induttivo con segnale sinusoidale

ai capi della bobina:

$$-E(t) + IR \pm L \frac{dI}{dt} = 0.$$

$$-E(t) + IR + L\frac{dI}{dt} = 0 . \quad (1.15)$$

Come nel caso del condensatore, vediamo ora la risposta del circuito ad un gradino di tensione, cioè troviamo la soluzione della (1.15) quando  $E$  è una tensione continua  $E(t) = E$ . Con facili passaggi otteniamo:

$$L\frac{dI}{E - RI} = dt , \quad \rightarrow \quad I = \frac{E}{R}(1 - e^{-tR/L}) . \quad (1.16)$$

Dopo un certo tempo, nel circuito fluisce una corrente costante  $I = E/R$ .

Quando si stacca il generatore, la corrente decresce secondo la legge:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I , \quad \rightarrow \quad I = I(0)e^{-tR/L} . \quad (1.17)$$

$$x = x_f + x_l \equiv \text{risposta forzata con segnale} + \text{risposta libera senza segnale} \quad (1.20)$$

Il partitore capacitivo  $RC$  e quello induttivo  $RL$ , quando sono collegati a una sorgente di tensione continua  $E$ , soddisfano rispettivamente alle equazioni:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V(t)}{RC} = \frac{E}{RC}, \quad \text{partitore } RC \quad (1.21)$$

$$(1.22)$$

$$\frac{dI}{dt} + I(t)\frac{R}{L} = \frac{E}{L}, \quad \text{partitore } RL, \quad (1.23)$$

dove nella prima si è sfruttata la relazione  $RI = RCdV/dt$ . Queste due equazioni sono entrambe del tipo:

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)}{\tau} = F, \quad (1.24)$$

dove  $F$  è una costante. Come è facile verificare a posteriori, la (1.24) ha per soluzione:

$$x(t) = F\tau + [x(0) - F\tau] e^{-t/\tau}. \quad (1.25)$$

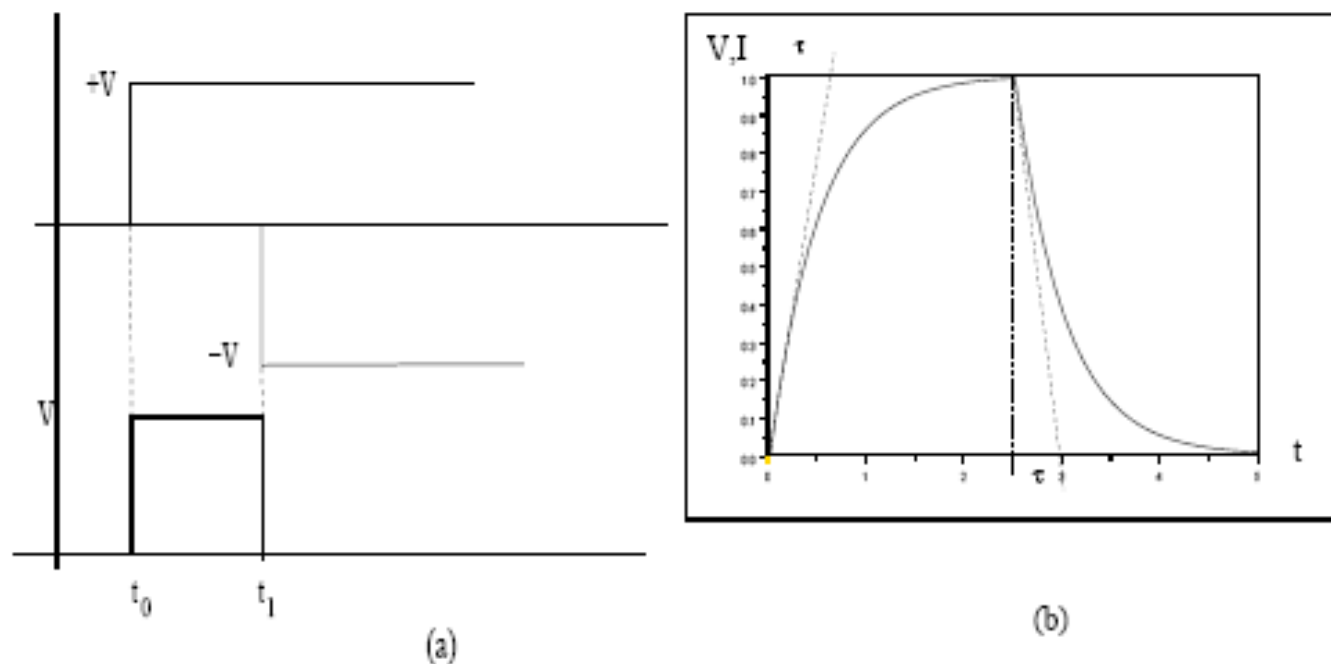


Figure 1.6: Risposta ad un segnale a gradino (a sinistra) di correnti ( $RL$ ) e tensioni ( $RC$ ) con costante di tempo  $\tau = 0.5$  s.

Dato che

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = F\tau ,$$

possiamo scrivere:

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)] e^{-t/\tau} , \quad (1.26)$$



Dalla (1.26) e dalla tab. 1.1 otteniamo le soluzioni per la fase di salita del gradino (fig. 1.6 (a)):

$$V(t) = E(1 - e^{-t/RC}), \quad \text{partitore } RC \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

$$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-tR/L}), \quad \text{partitore } RL,$$

Vediamo ora, nel caso del condensatore, la risposta per un segnale rettangolare come quello di fig. 1.6 (a) (in basso), che può essere visto come la sovrapposizione di due segnali a gradino, uno positivo ( $+V$  all'istante  $t_0$ ) ed

| simbolo              | partitore $RC$    | partitore $RL$    |
|----------------------|-------------------|-------------------|
| $x(t)$ nella (1.26)  | tensione $V_c$    | corrente $I(t)$   |
| $F$                  | $E/(RC)$          | $E/L$             |
| $x(0)$               | $V_c(0) = 0$      | $I(0) = 0$        |
| $x(\infty)$          | $V_c = E$         | $I = E/R$         |
| $V(0)$               | $0$               | $E$               |
| $V(\infty)$          | $E$               | $0$               |
| $I(0)$               | $E/R$             | $0$               |
| $I(\infty)$          | $0$               | $E/R$             |
| $\tau$               | $RC$              | $L/R$             |
| grandezze istantanee | $I(0) = E/R$      | $V(0) = E$        |
| grandezze continue   | $V(0^+) = V(0^-)$ | $I(0^+) = I(0^-)$ |

Table 1.1: Quantità fisiche caratteristiche e condizioni iniziali per condensatori e bobine

Le relazioni tra tensione e corrente  $\bar{I} = I_0 e^{j\omega t}$  in campo complesso

$$\bar{V}_R(t) = R\bar{I} = R(I_0 e^{j\omega t}), \quad (1.41)$$

$$\bar{V}_C(t) = \frac{1}{C} \int \bar{I} dt = \frac{1}{j\omega C} (I_0 e^{j\omega t}), \quad (1.42)$$

$$\bar{V}_L(t) = L \frac{d}{dt} \bar{I} = j\omega L (I_0 e^{j\omega t}), \quad (1.43)$$

permettono di definire le seguenti impedenze complesse:

$$Z_R = R \quad \text{impedenza resistiva} \quad (1.44)$$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} \quad \text{impedenza capacitiva} \quad (1.45)$$

$$\bar{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2} \quad \text{impedenza induttiva} \quad (1.46)$$

Vedremo ora, nel prossimo paragrafo, come lo studio dei circuiti si semplifichi con la trasformata complessa.

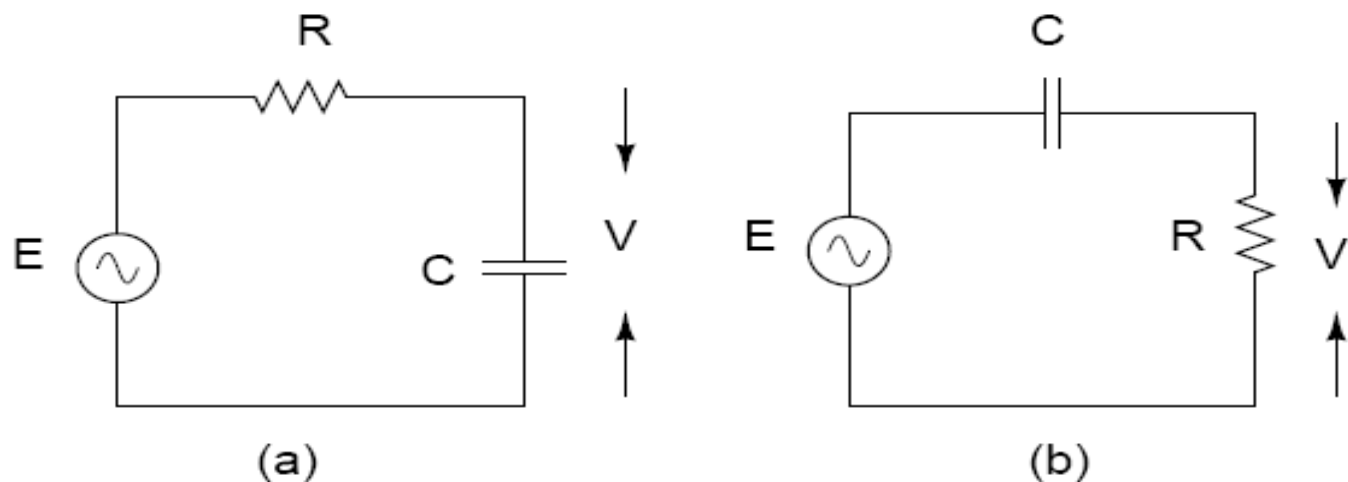


Figure 1.7: Partitori  $RC$  (a) e  $CR$  (b).

ottenendo per la corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + 1/(j\omega C)} \quad (1.50)$$

Avendo già studiato la risposta libera da introdurre nella soluzione generale (1.20) per la tensione di uscita  $V$ , verifichiamo ora l'esistenza di una soluzione particolare forzata sinusoidale. Per il partitore  $RC$  abbiamo, dalla (1.50):

$$\bar{V} = \frac{1}{C} \int \bar{I} dt = \bar{E} \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} \quad (1.51)$$

Il guadagno  $G$  del circuito, ovvero il rapporto tra le tensioni di uscita e ingresso, è il numero complesso:

$$\bar{G}(\omega) \equiv \frac{\bar{V}}{\bar{E}} = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \exp(j \arctan(-\omega RC)) \quad (1.52)$$

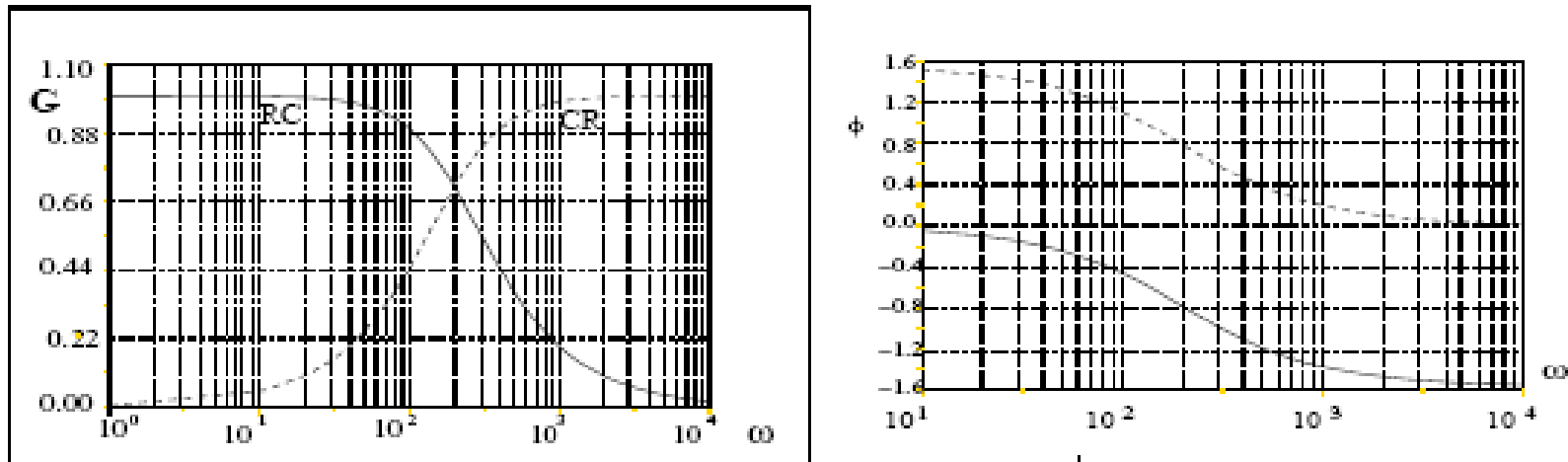


Figure 1.8: A sinistra: modulo del guadagno per un partitore  $RC$  (linea piena) ed un partitore  $CR$  (linea tratteggiata). Le due linee si intersecano alla pulsazione di taglio di 200 rad/s. A destra: corrispondente sfasamento per il partitore  $RC$  (linea piena) e  $CR$  (linea tratteggiata).

che coincide con la (1.36). La soluzione reale generale, in base alla (1.20) è data da:

$$V(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} [Ae^{-t/\tau} + \cos[\omega t - \arctan(\omega\tau)]] \quad (1.54)$$

Analogamente a quanto visto per il partitore  $RC$ , utilizzando la formula del partitore per il circuito  $CR$  di fig. 1.7 (b), abbiamo il guadagno:

$$\bar{G}(\omega) = \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 - \frac{j}{\omega RC}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}} \exp[j \arctan(1/(\omega RC))] \quad (1.55)$$

corrispondente alla soluzione reale:

$$V(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}} \cos \left[ \omega t + \arctan \left( \frac{1}{\omega RC} \right) \right] \quad (1.56)$$

Il modulo del guadagno per i due partitori è mostrato in fig. 1.8. Le due curve si incrociano alla pulsazione  $\omega_0$  (o frequenza  $\nu_0$ ) di taglio

$$\omega_0 RC \equiv \omega_0 \tau = 1 \rightarrow \omega_o = \frac{1}{RC} ; \quad \nu_o = \frac{1}{2\pi RC} , \quad (1.57)$$

| proprietà                          | partitore $RC$ | partitore $CR$ |
|------------------------------------|----------------|----------------|
| filtro di frequenza                | passa basso    | passa alto     |
| frequenza di taglio                | $1/(2\pi RC)$  | $1/(2\pi RC)$  |
| pulsazione di taglio               | $1/(RC)$       | $1/(RC)$       |
| condensatore visto dall'uscita     | parallelo      | serie          |
| comportamento alle basse frequenze | passante       | derivatore     |
| comportamento alle alte frequenze  | integratore    | passante       |

Table 1.2: Proprietà di partitori  $RC$  e  $CR$ .





# Circuiti RCL

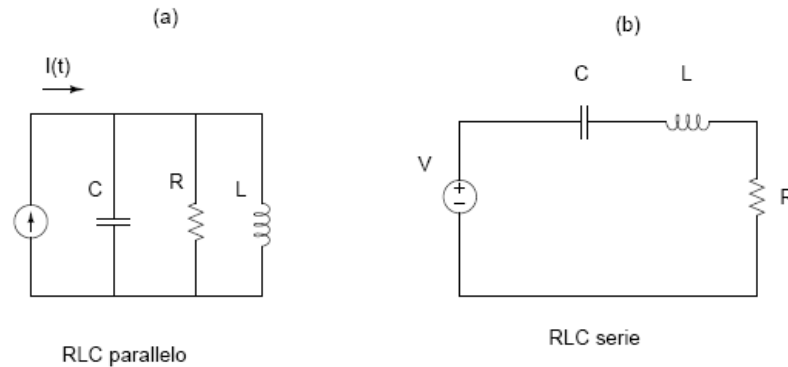


Figure 2.1: circuito *RLC* parallelo (a) e serie (b).

$$L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt + RI = V(t), \quad RCL \text{ serie} \quad (2.1)$$

$$C \frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt + \frac{V(t)}{R} = I(t). \quad RCL \text{ parallelo} \quad (2.2)$$

In generale, derivando una volta queste equazioni, abbiamo a che fare con una equazione differenziale lineare di secondo ordine del tipo:

$$a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t), \quad (2.3)$$

che ammette come soluzione la somma della risposta libera  $x_n$  più quella forzata  $x_f$ :

$$x(t) = x_n(t) + x_f(t). \quad (2.4)$$

ricerchiamo una soluzione del tipo

$$x_n = Ae^{st} , \quad (2.5)$$

con  $A$  ed  $s$  da determinare. Sostituendo questa funzione nella (2.3) con  $f(t) = 0$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} a_2As^2e^{st} + a_1As e^{st} + a_0A e^{st} &= 0 , \\ \rightarrow (a_2s^2 + a_1s + a_0)x_n &= 0 , \\ \rightarrow a_2s^2 + a_1s + a_0 &= 0 , \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene scartando la soluzione non fisica  $x_n = 0$ . La (2.6) è detta *equazione caratteristica* e si può ottenere direttamente dalla (2.3) ponendo

$$f(t) = 0 , \quad s \equiv \frac{d}{dt} .$$

Ovviamente, questa regola vale solo se si ricercano soluzioni esponenziali. La soluzione della (2.6) è ovviamente

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \quad (2.7)$$

e la soluzione della equazione omogenea vale:

$$x_n = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} , \quad (2.8)$$

$$V(0) = V_0 \text{ ai capi del condensatore, } I(0) = I_0 \text{ ai nella bobina.} \quad (2.9)$$

Dalle (2.2, 2.6-2.8) otteniamo l'equazione:

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0, \quad (2.10)$$

che ha per soluzioni:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \left[ \left( \frac{1}{2RC} \right)^2 - \frac{1}{LC} \right]^{1/2} \equiv -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (2.11)$$

dove  $\gamma = 1/(2RC)$  è detto *smorzamento* e

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

è detta *pulsazione di risonanza*.

Abbiamo a questo punto 3 soluzioni possibili:

- caso *sovrasmorzato*: due soluzioni reali e distinte quando  $\gamma^2 > \omega_0^2$ ;
- *smorzamento critico*: due radici coincidenti quando  $\gamma^2 = \omega_0^2$ . In questo caso

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.13)$$

valore detto resistenza critica;

- caso *sottosmorzato*: due radici complesse coniugate quando  $\gamma^2 < \omega_0^2$ ;

Nel caso sovrasmorzato la soluzione, cioè la tensione ai capi dei tre componenti in parallelo, è:

$$V_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \quad (2.14)$$

Notazione generale

NOTA:  $s_1$  ed  $s_2 < 0$  !!

Smorzamento  
Pulsazione di risonanza

$$V_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} ,$$

NOTA:  $s_1$  ed  $s_2 < 0$  !!

$$\begin{aligned} V(0) &= A_1 + A_2 \\ s_1 A_1 + s_2 A_2 &= \frac{dV(0)}{dt} = -\frac{V(0)}{RC} - \frac{I(0)}{C} , \end{aligned}$$

Nel caso le radici dell'equazione caratteristica siano coincidenti,  $s_{1,2} = -\gamma$  e la (2.14) diventa  $V_n(t) = (A_1 + A_2)e^{-\gamma t}$ . Questa non può essere la soluzione giusta, perché in essa compare una sola costante. Per riottenere due costanti arbitrarie, si scrive una possibile soluzione come

$$V_n(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\gamma t} . \tag{2.15}$$

Veniamo ora al caso sottosmorzato, quando  $\gamma^2 < \omega_0^2$ , cioè

$$R < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.16)$$

e la radice nella (2.11) contiene un argomento negativo. In questo caso le radici della equazione caratteristica diventano complesse:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm j \left[ \frac{1}{LC} - \left( \frac{1}{2RC} \right)^2 \right]^{1/2} \equiv -\gamma \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (2.17)$$

e la soluzione (2.18) assume un comportamento oscillatorio smorzato

$$V_n(t) = \bar{B} e^{-\gamma t} e^{j\omega_d t}, \quad (2.18)$$

dove  $\bar{B}$  è una costante complessa e

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left( \frac{1}{2RC} \right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (2.19)$$

è detta *pulsazione di risonanza smorzata*. Dalla formula di Eulero otteniamo:

$$V_n(t) = \bar{B} e^{-\gamma t} e^{j\omega_d t} \rightarrow B e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) = e^{-\gamma t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t), \quad (2.20)$$

è detta *pulsazione di risonanza smorzata*. Dalla formula di Eulero otteniamo:

$$V_n(t) = \bar{B} e^{-\gamma t} e^{j\omega_d t} \rightarrow B e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi) = e^{-\gamma t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) , \quad (2.20)$$

Le due costanti reali  $B_1$ ,  $B_2$  vanno trovate con le condizioni iniziali, come nel caso sovrasmorzato. Per  $t = 0$  si ha:

$$V(0) = B_1 . \quad (2.21)$$

Per determinare  $B_2$ , basta calcolare la derivata della (2.20) in  $t = 0$ , ottenendo:

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=0} = \omega_d B_2 - \gamma B_1 = -\frac{V(0)}{RC} + \frac{I(0)}{C} , \quad (2.22)$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene dalla (2.2). Le (2.21, 2.22) risolvono il problema

# FATTORE DI MERITO

Nella soluzione sottosmorzata, il fattore  $e^{-\gamma t}$  rappresenta la curva di inviluppo dei massimi delle ampiezze oscillazioni. Dato che il quadrato della ampiezza è proporzionale alla energia del segnale, il fattore  $e^{-2\gamma t}$  rappresenta il fattore di dissipazione dell'energia dell'oscillazione.; dopo un tempo pari a  $\tau = RC = 1/(2\gamma)$ , l'energia del segnale è diminuita di un fattore  $1/e$ . Il rapporto tra la pulsazione di risonanza ed il fattore di dissipazione (cioè il prodotto tra la pulsazione di risonanza ed il tempo di dimezzamento):

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \omega_0 RC , \quad (2.23)$$

è detto fattore di merito o di qualità.

I circuiti con grande fattore di merito ( $\gamma$  piccolo) presentano oscillazioni smorzate più persistenti di quelle dei circuiti con piccolo fattore di merito. Se identifichiamo la durata delle oscillazioni libere smorzate come la “vita media” del circuito, possiamo dire che grandi fattori di merito significano lunga vita media, piccoli fattori di merito vita media breve.



# RCL Serie

Esaminiamo ora la risposta libera del circuito  $RLC$  in serie di fig 2.1b, cioè quando il termine noto  $V(t)$  è nullo o costante.

Dato che la trattazione è del tutto analoga a quella appena fatta per il parallelo, procederemo rapidamente per via schematica.

Dalle (2.1, 2.6-2.8) otteniamo l'equazione:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0, \quad (2.24)$$

che ha per soluzioni:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \left[ \left( \frac{R}{2L} \right)^2 - \frac{1}{LC} \right]^{1/2} \equiv -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (2.25)$$

dove  $\gamma = R/(2L)$  è lo *smorzamento* e  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  è la *pulsazione di risonanza*, analoga a quella del circuito in parallelo.

Consideriamo ora le tre 3 soluzioni: caso sovrasmorzato, critico e sottosmorzato. Le soluzioni sono le stesse del circuito in parallelo, ma la soluzione in questo caso non è la tensione, ma la corrente di maglia:

$$I_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{sovrasmorzamento} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.26)$$

$$I_n(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\gamma t} \quad \text{caso critico,} \quad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.27)$$

$$I_n(t) = e^{-\gamma t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad \text{sottosm.} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.28)$$

dove la pulsazione smorzata  $\omega_d$  vale in questo caso:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (2.29)$$

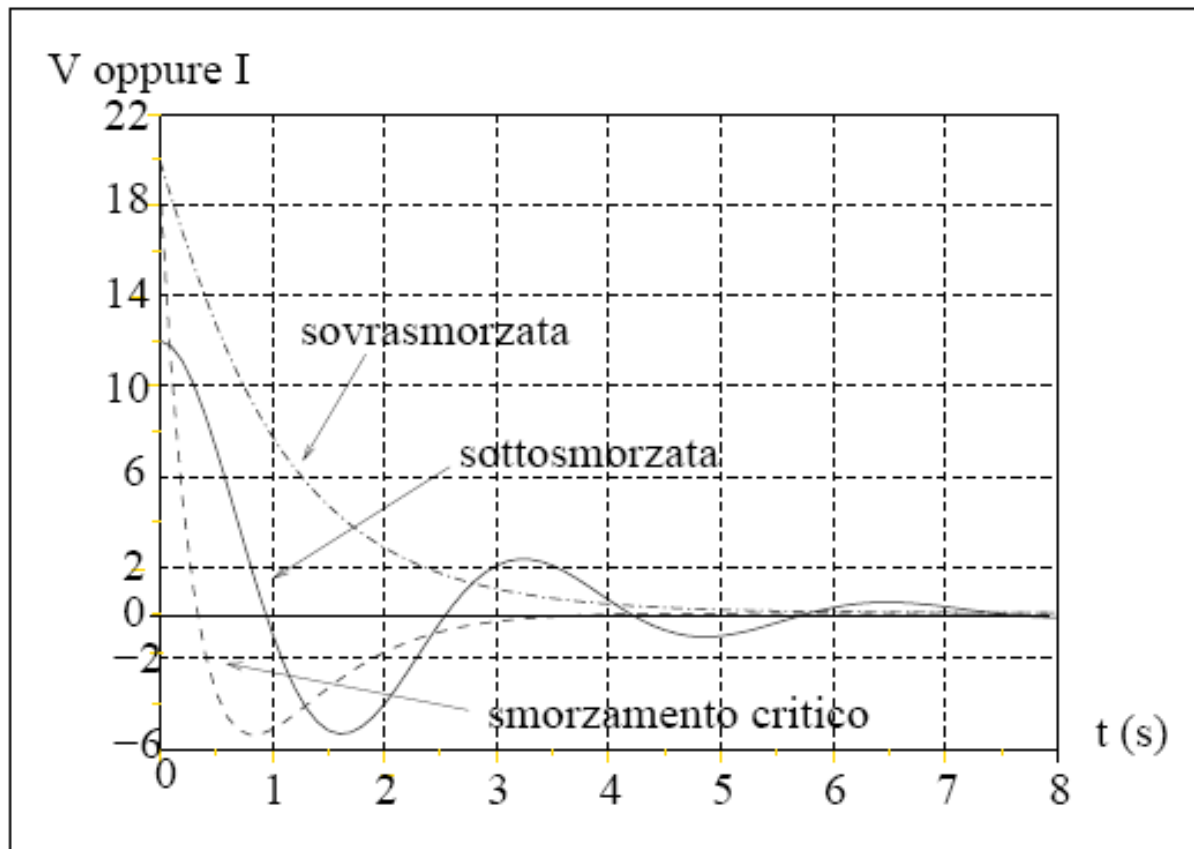


Figure 2.2: Vari tipi di risposta possibili per la corrente ( $RCL$  serie) o per la tensione ( $RCL$  parallelo).

|                         | <i>RCL</i> parallelo   | <i>RCL</i> serie  |
|-------------------------|--|---|
| Generatori              | tensione   | corrente  |
| Circuiti                | serie  | parallelo   |
| Circuiti                | nodo   | anello  |
| Circuiti                | circuito aperto  | corto circuito  |
| Circuiti                | legge dei nodi   | legge di maglia   |
| Teoremi                 | Thevenin   | Norton  |
| Effetti resistivi       | $R$  | $1/R$   |
| Impedenze               | $L$  | $C$   |
| Eq. caratteristica      | $s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0$                          | $s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$  |
| Smorzamento             | $\gamma = \frac{1}{2RC}$   | $\gamma = \frac{R}{2L}$   |
| Pulsazione di risonanza | $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$                                   | $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  |
| Pulsazione smorzata     | $\omega_d = \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$    | $\omega_d = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$                        |
| Frequenze Naturali      | $s_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$               | $s_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$                                  |
| Fattore di merito       | $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \omega_0 RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ | $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ |

**DUALITA'**

Table 2.1: Principio di dualità. Le ultime 6 righe possono essere trovate applicando le regole delle righe superiori.

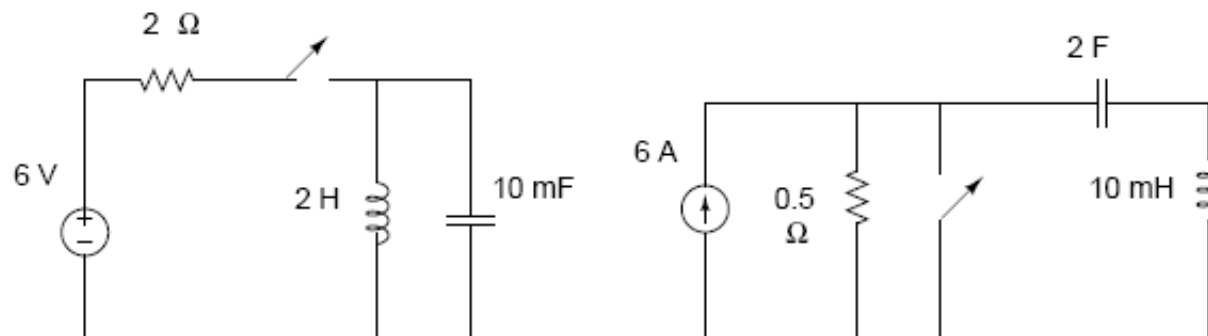


Figure 2.3: Il circuito a destra è duale del circuito a sinistra.

| funzione forzante      | risposta forzata                    |
|------------------------|-------------------------------------|
| Costante               | Costante                            |
| $kt$                   | $At + B$                            |
| $kt^2$                 | $At^2 + Bt + C$                     |
| $ke^{-\gamma t}$       | $Ae^{-\gamma t}$                    |
| $k \cos \omega t$      | $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ |
| $\bar{k}e^{j\omega t}$ | $\bar{A}e^{j\omega t}$              |

Table 2.2: Risposta forzata dei circuiti  $RCL$ .

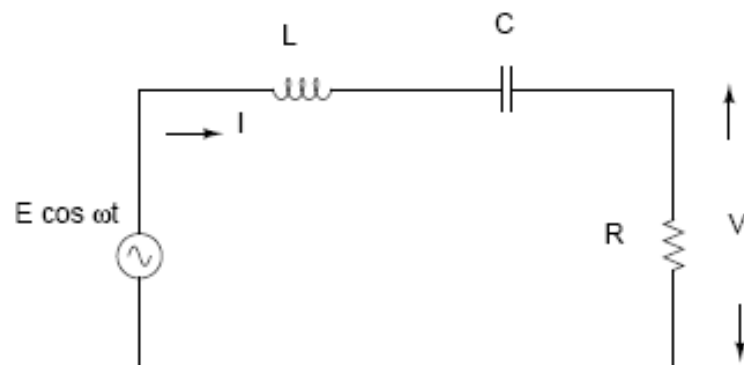


Figure 2.4: Circuito  $RCL$  serie con segnale sinusoidale

e la corrente come un segnale sinusoidale complesso

$$I = \bar{I}_0 e^{j\omega t} = |\bar{I}_0| e^{j\omega t + \phi}, \quad (2.31)$$

dove  $\bar{I}$  è una costante complessa. La legge di maglia fornisce l'equazione:

$$R\bar{I}_0 e^{j\omega t} + j\omega L\bar{I}_0 e^{j\omega t} - \frac{j}{\omega C}\bar{I}_0 e^{j\omega t} - E_0 e^{j\omega t} = 0, \quad (2.32)$$

da cui si ottiene immediatamente la corrente complessa:

$$\bar{I}_0 = \frac{E_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (2.33)$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \exp\left[-j \arctan\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right], \quad (2.34)$$

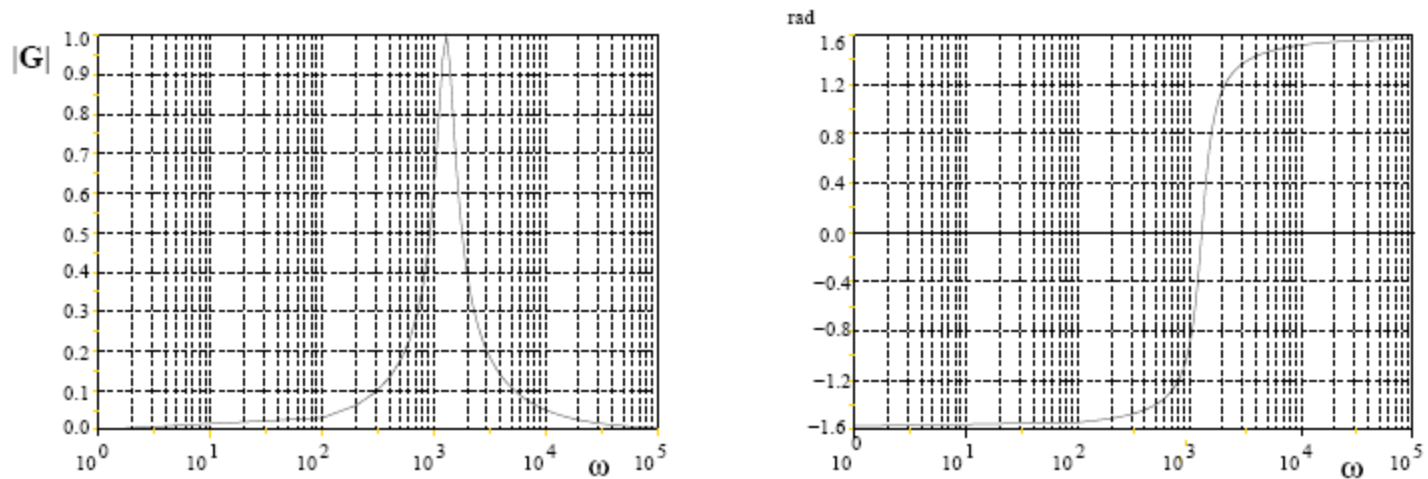


Figure 2.5: Andamento con  $\omega$  del modulo (a sinistra) e della fase (a destra) della curva di risonanza. Si noti che i grafici tendono a diventare simmetrici solo quando l'asse delle frquenze è logaritmico.

La curva:

$$\begin{aligned}
 G(\omega) &= \frac{\bar{I}_0}{I_{\max}} = \frac{1}{1 + j \left( \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right)} & (2.37) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right)^2}} \exp \left[ -j \arctan \left( \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right) \right]
 \end{aligned}$$

viene detta curva di risonanza.

L'andamento con la pulsazione  $\omega = 2\pi\nu$  del modulo  $|G|$  e della fase di questa curva è mostrato in fig. 2.5. La soluzione fisica reale della corrente (2.31), è data da:

$$I = \frac{E_0}{R \sqrt{1 + \left( \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right)^2}} \cos \left[ \omega t - \arctan \left( \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \right) \right] \quad (2.38)$$

Studiamo ora la larghezza della curva nell'intorno del massimo  $\omega_0$ . Come nel caso dei filtri passa-basso e passa-alto, determiniamo la larghezza della curva in termini di *banda passante*, cioè dell'intervallo di frequenze compreso



$$\bar{V}_R = \frac{R}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \bar{E} .$$

Dopo una breve rielaborazione, è facile convincersi che vale l'uguaglianza tra la (2.43) e la (2.36):

$$G \equiv \frac{\bar{V}_R}{\bar{E}} = \frac{\bar{I}}{I_{\max}} . \quad (2.44)$$

Questa formula è la base per lo studio in laboratorio del circuito.

È anche interessante vedere, con la formula del partitore, come va la tensione ai capi della bobina e del condensatore e vedere cosa succede alla risonanza.

tra due valori per i quali la curva si riduce a  $1/\sqrt{2}$  del suo valore massimo. Dalla (2.36) vediamo che questa condizione si trova determinando le radici dell'equazione

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = \pm 1 ,$$

ovvero

$$\omega^2 \pm \omega \frac{R}{L} - \frac{1}{LC} = 0 .$$

È facile vedere che, delle quattro soluzioni di questa equazione, solo due sono ammissibili ( $\omega > 0$ ). Esse valgono:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (2.39)$$

e la loro differenza è

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} . \quad (2.40)$$

Dividendo per la pulsazione di risonanza si ottiene:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q} , \quad (2.41)$$

dove  $Q$  è il fattore di merito della (2.23). In termini di frequenza, si ha:

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_0} = \frac{1}{Q} . \quad (2.42)$$

# La risonanza in fisica

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + b \frac{d}{dt} x(t) + k x(t) = F(t)$$

$$L \frac{d^2}{dt^2} q(t) + R \frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{C} q(t) = V(t)$$

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Notazione  
universale

$$g_n(t) = e^{-\gamma t} \left( A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi) \right)$$

$$g_f(t) = \frac{F_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \cos(\omega t - \arctan \varphi)$$

$$\varphi = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) .$$

Il guadagno della (2.37) si esprime invece come:

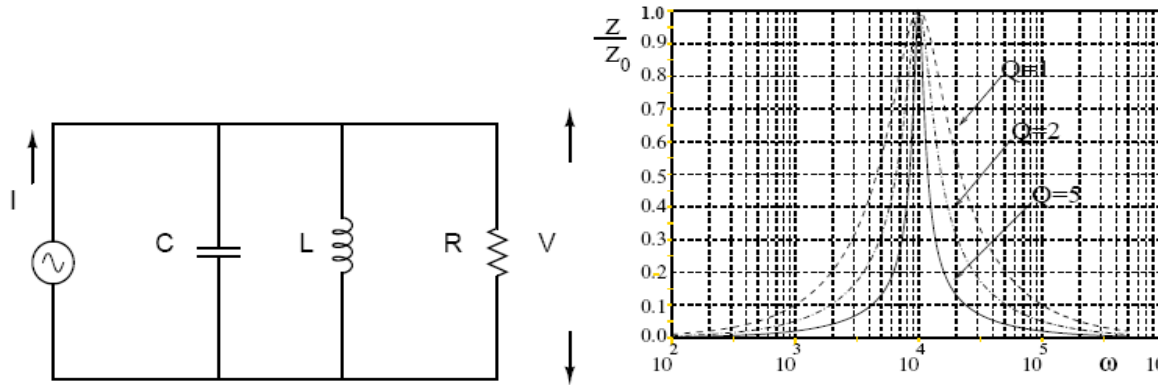
$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \exp \left[ -j \arctan Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

1. la frequenza delle oscillazioni libere (2.50) tende ad  $\omega_0$  quando  $\gamma \rightarrow 0$ . Quella di risonanza è quindi la frequenza naturale dell'oscillatore libero non smorzato.
2. Alla frequenza (o pulsazione) di risonanza, le oscillazioni forzate da un segnale periodico sono massime ed in fase col segnale (vedi (2.51) e (2.52)). Ne segue che la potenza dell'oscillatore, ovvero l'energia assorbita nel tempo, è massima. Nei sistemi elettrici corrente e tensione sono in fase, in quelli meccanici la forza è in fase con la velocità. Visto in termini di energia, il fenomeno della risonanza è universale, sia in fisica classica sia quantistica.
3. Dalla tab. 2.3 e dalla (2.41) risulta:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad (2.53)$$

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2Q}, \quad (2.54)$$

da cui si vede che, ad una risonanza stretta nel dominio delle frequenze, corrisponde un grande fattore di merito ed un sistema poco smorzato nel dominio del tempo, cioè “a lunga vita media”. L'opposto capita per risonanze larghe nel dominio delle frequenze. La larghezza della risonanza, a parità di altri fattori, è direttamente proporzionale al valore del coefficiente di smorzamento ( $\omega_2 - \omega_1 \propto 1/Q \propto R$ ).



## 2.8 $RCL$ in parallelo con segnali sinusoidali

Possiamo brevemente identificare le proprietà del circuito  $RCL$  in parallelo di fig. 2.6 attraverso il principio di dualità di tab. 2.1.

In questo caso l'ammettenza totale del circuito

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) . \quad (2.55)$$

è *minima* (e quindi l'impedenza è *massima*) quando

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ,$$

in accordo con la tab. 2.1. In questo caso la tensione raccolta ai capi del parallelo è massima. L'andamento della tensione nel circuito parallelo è quindi simile a quello della corrente nel circuito serie. Alla risonanza, il parallelo

$$V(\omega_0) = |\bar{Z}(\omega_0)| I = R I . \quad (2.56)$$

In base alla dualità applicata alla (2.39), gli estremi della banda passante sono in questo caso

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (2.57)$$

ed il fattore di merito (2.23) diventa:

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC . \quad (2.58)$$

È facile vedere che la (2.41) rimane invariata.

Utilizzando il fattore di merito, è facile vedere che l'andamento dell'impedenza complessa con la pulsazione segue una curva di tipo risonante:

$$\bar{Z} = \frac{R}{1 + j Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} , \quad (2.59)$$

il cui andamento diviso per  $Z_0 = R$  è riportato per valori diversi di  $Q$  in

# Analisi di Fourier

Una funzione  $f(t)$  si dice periodica con periodo  $T$  se, per qualunque  $t$ ,

$$f(t + T) = f(t)$$

La media temporale di una funzione periodica è definita dalla relazione

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

L'intervallo di integrazione non è necessariamente limitato tra 0 e  $T$ ; esso può andare anche da  $t$  a  $t + T$ , con  $t$  qualsiasi. Per esempio può essere limitato tra  $-\frac{T}{2}$  e  $\frac{T}{2}$ .



$$\begin{aligned}
 (6.1) \quad f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t = \\
 &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_n e^{in\omega_0 t}
 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} \\
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \\
 A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\
 \tan \phi_n &= -\frac{b_n}{a_n} \\
 \bar{F}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} A_n e^{i\phi_n}
 \end{aligned}$$

## Relazioni di ortogonalità

$$\int_0^T \sin 2\pi n\nu_0 t \sin 2\pi m\nu_0 t dt = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{per } n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin 2\pi n\nu_0 t \cos 2\pi m\nu_0 t dt = 0 \quad \text{sempre}$$

$$\int_0^T \cos 2\pi n\nu_0 t \cos 2\pi m\nu_0 t dt = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{per } n = m \neq 0 \\ T & \text{per } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin 2\pi n\nu_0 t dt = \int_0^T \cos 2\pi n\nu_0 t dt = 0 \quad \text{per qualsiasi } n$$

Ad esempio, moltiplicando ambo i membri della (6.1) per  $\cos m\omega_0 t$ , integrando ed utilizzando le relazioni di ortogonalità, si ottiene per  $a_n$  l'espressione riportata nelle (6.2).

- 1) se  $f(t)$  è pari, cioè se  $f(t) = f(-t)$ , allora  $b_n = 0$
- 2) se  $f(t)$  è dispari, cioè se  $f(t) = -f(-t)$ , allora  $a_0 = a_n = 0$
- 3) se  $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$  allora  $a_0 = 0$
- 4) se  $f(t)$  è continua in un intorno di  $t_0$ , la serie di Fourier converge a  $t_0$  uniformemente
- 5) i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  decrescono con l'ordine  $n$  come  $\frac{1}{n^{M+1}}$ , dove  $M$  è il "grado di continuità" di  $f(t)$ . Esso è definito come l'intero corrispondente alla prima derivata discontinua. La funzione va considerata come derivata di ordine 0. Alcuni esempi sono mostrati nella fig. 6.2.
- 6) Le funzioni  $f_n(t) = A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$  che compaiono nella serie di Fourier hanno tutte pulsazione multipla intera di quella fondamentale  $\omega_0$ , che è la pulsazione della funzione  $f(t)$ ;  $f_n(t)$  è detta componente armonica (di ordine  $n$ ) di  $f(t)$ . L'insieme discreto dei valori  $A_n = 2|\overline{F}_n|$  con  $n \geq 0$

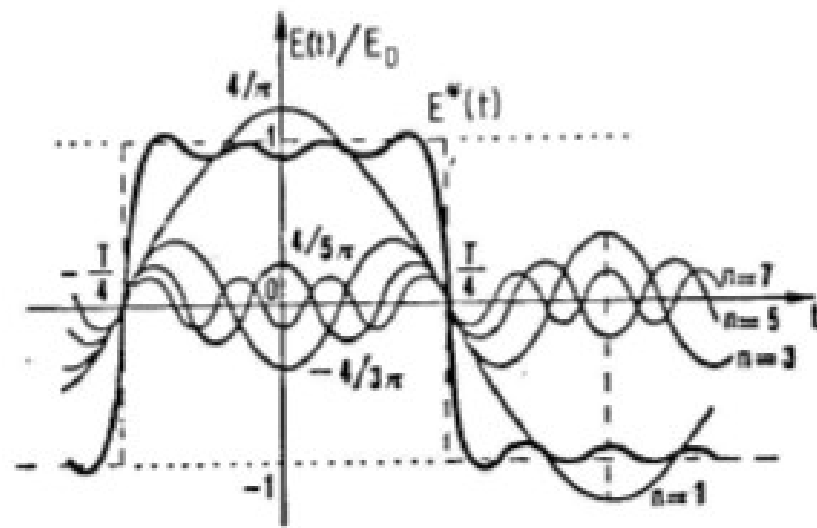


Fig. 6.4

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{-\frac{T}{2}} (-E_0) \cos n\omega_0 t dt + \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} E_0 \cos n\omega_0 t dt +$$

$$+ \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} (-E_0) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4E_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{4E_0}{\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Si ha perciò

$$E(t) = \frac{4E_0}{\pi} \left( \cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right)$$

b) - Onda triangolare

Sia

$$E(t) = \begin{cases} E_0 + \frac{E_0}{\pi} \omega_0 t & \text{per } -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ E_0 - \frac{E_0}{\pi} \omega_0 t & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

la funzione triangolare riportata in fig. 6.6.

Il suo valore medio è  $a_0 = \frac{E_0}{2}$  e, poichè la funzione  $E(t)$  è pari,  $b_n = 0$ .

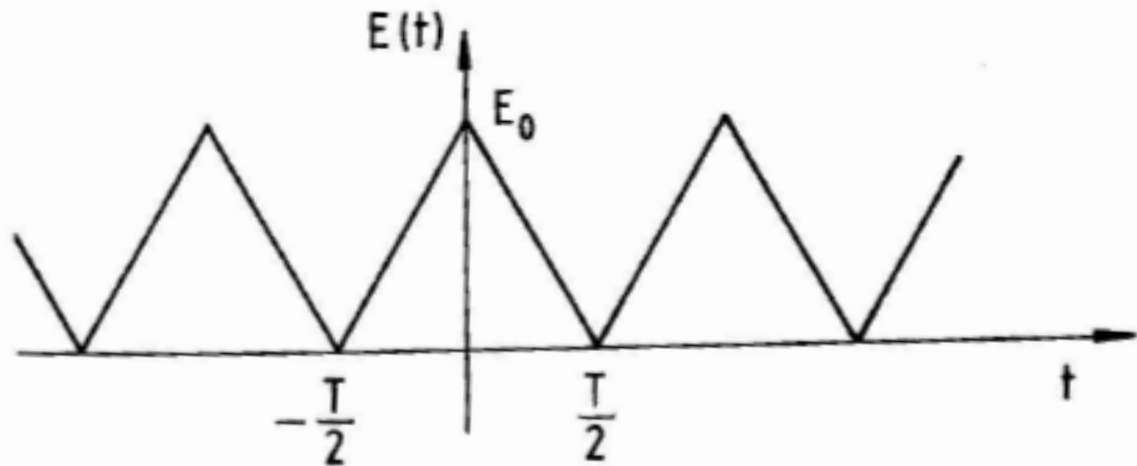


Fig. 6.6

$$a_n = \frac{2}{T} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (E_0 + \frac{E_0}{\pi} \omega_0 t) \cos n\omega_0 t dt + \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (E_0 - \frac{E_0}{\pi} \omega_0 t) \cos n\omega_0 t dt \right\} = \frac{2E_0}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi)$$

quindi

$$3.3) \quad E(t) = \frac{E_0}{2} + \frac{4E_0}{\pi^2} \left( \cos \omega_0 t + \frac{\cos 3\omega_0 t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega_0 t}{5^2} + \dots \right)$$

si noti che  $M = 1$  e che i coefficienti decrescono come  $\frac{1}{n^2}$ .

Consideriamo ora la medesima funzione di fig. 6.6, ma traslata sull'asse delle ordinate come mostrato in fig. 6.7.

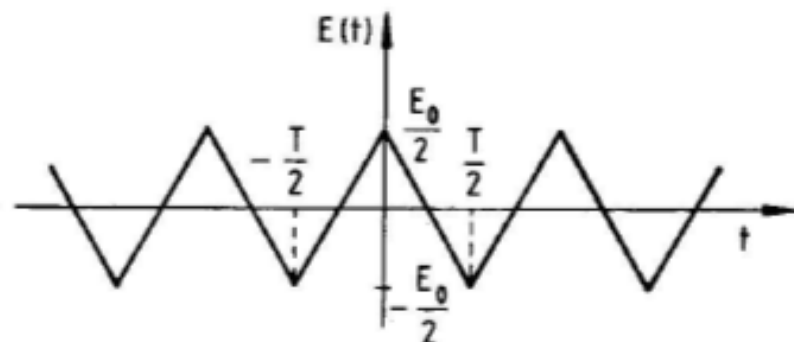


Fig. 6.7

in questo caso il suo valor medio è  $a_0 = 0$  e, poiché la funzione  $E(t)$  è ancora pari,  $b_n = 0$ .

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{T} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left( \frac{E_0}{2} + \frac{E_0}{\pi} \omega_0 t \right) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \left( \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{\pi} \omega_0 t \right) \cos n\omega_0 t dt \right\} = \\
 &= \frac{2E_0}{n^2\pi^2} (1 - \cos n\pi)
 \end{aligned}$$

quindi

$$(6.4) \quad E(t) = \frac{4E_0}{\pi^2} \left( \cos \omega_0 t + \frac{\cos 3\omega_0 t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega_0 t}{5^2} + \dots \right)$$

Il confronto tra la (6.3) e la (6.4) mostra che gli sviluppi sono identici, a meno del primo termine costante, che rappresenta il valor medio.

Questa è una regola generale: traslando una funzione lungo l'asse delle ordinate, lo sviluppo in serie di Fourier cambia di un termine costante.

c) - Dente di sega

Sia  $E(t)$  la funzione a dente di sega definita in fig. 6.8.

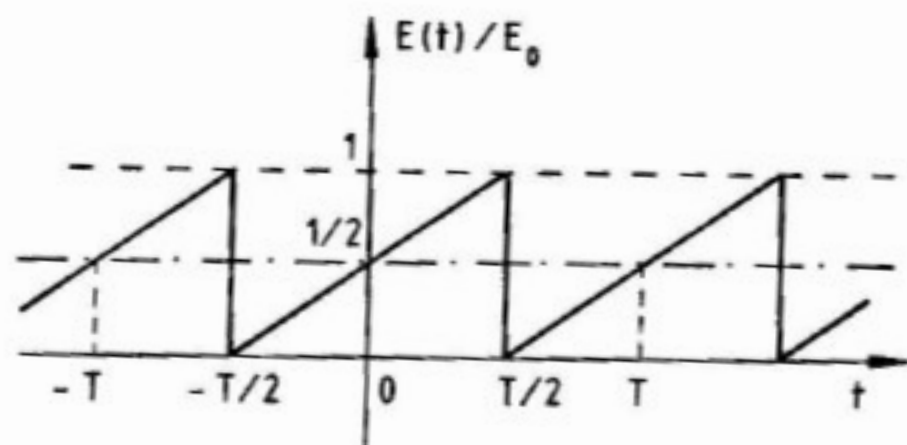


Fig. 6.8

La funzione è discontinua per  $t = (2k + 1)\frac{T}{2}$ , con  $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Il suo valore medio è  $a_0 = \frac{E_0}{2}$  e poichè

$$E(t) - a_0 = E(t) - \frac{E_0}{2}$$

è dispari, per le (6.2) è  $a_n = 0$ .

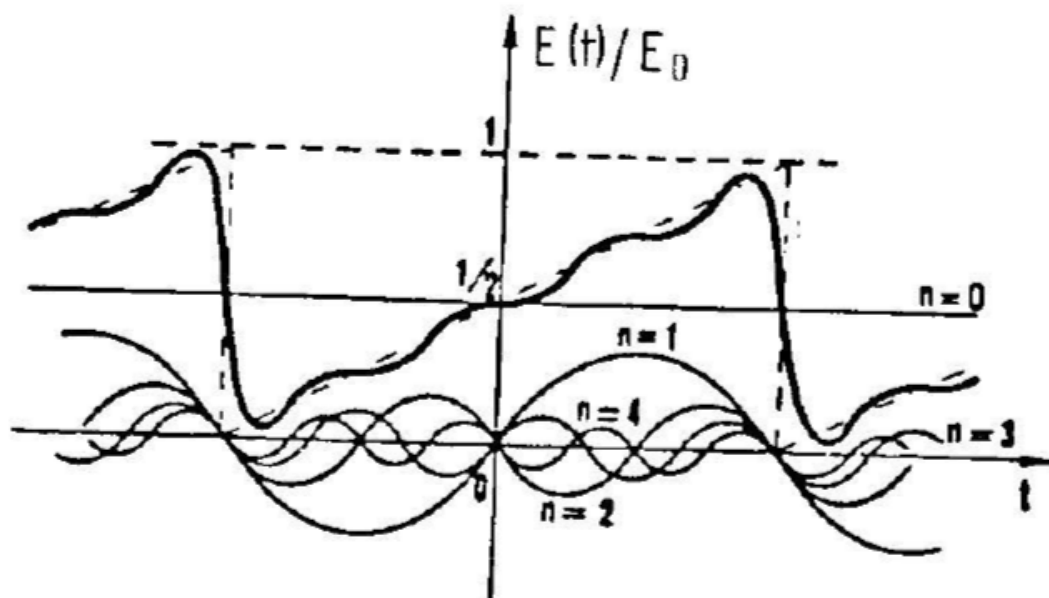
Inoltre

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E_0 \frac{t + \frac{T}{2}}{T} \sin n\omega_0 t dt = (-1)^n \frac{E_0}{n\pi}$$

dove  $\frac{E_0}{T} (t + \frac{T}{2})$  è l'andamento di  $E(t)$  fra  $-\frac{T}{2}$  e  $\frac{T}{2}$ . Quindi



$$E(t) = \frac{E_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} E_0 (-1)^n \frac{\sin n\omega_0 t}{n\pi}$$



**Fig. 6.9**

la loro somma  $E^*(t)$ ; in fig. 6.10 è disegnato lo spettro:

$$a_0 = \frac{E_0}{2} \quad E_n = |b_n| = \frac{E_0}{n\pi} \quad n \geq 1$$

Riassumendo quanto è stato detto finora, in un circuito elettrico un segnale periodico  $E(t)$  di pulsazione  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ :

1) può essere pensato come somma di infiniti segnali sinusoidali (armoniche) del tipo

$$E_{1n} \cos n\omega t \qquad E_{2n} \sin n\omega t$$

2) con frequenza delle armoniche multiplica intera della frequenza fondamentale  $\nu$

3) e con un "peso" delle singole armoniche nello sviluppo che è dato dalla loro ampiezza massima, la quale, come si è visto, va come

$$\frac{1}{n^{M+1}}$$

In genere per funzioni "senza spigoli" (smooth)  $M$  assume valori elevati l'ampiezza delle armoniche decresce rapidamente. In questo caso la serie di Fourier converge rapidamente e in pratica già la somma di pochi termini rappresenta molto bene la funzione.

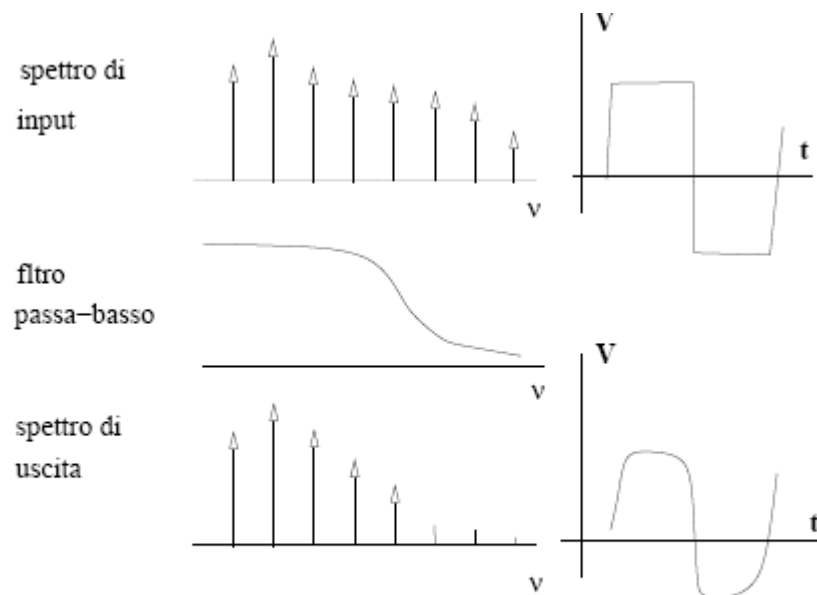


Figure 1.9: Un segnale in ingresso di bassa frequenza ad un filtro passa-basso viene “smussato” a causa della attenuazione delle armoniche di alta frequenza.

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \phi_k) .$$

$$V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\sqrt{1 + (k\omega RC)^2}} \cos[k\omega t + \phi_k - \arctan(k\omega RC)] , \quad (1.62)$$

mentre quella del partitore  $CR$  segue dalla (1.56) con la stessa sostituzione:

$$V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\sqrt{1 + \frac{1}{(k\omega RC)^2}}} \cos \left[ \omega t + \phi_k + \arctan \left( \frac{1}{k\omega RC} \right) \right] \quad (1.63)$$

Consideriamo, come nel par. 1.7, un segnale periodico sviluppato in serie di Fourier

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k \cos(k\omega t) . \quad (2.60)$$

Ad esempio, la risposta di un partitore  $RCL$  in serie è data dalla (2.38) sommando sulle armoniche e sostituendo alla pulsazione  $\omega$  le pulsazioni  $k\omega$ :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{R\sqrt{1 + \left(\frac{k\omega L}{R} - \frac{1}{k\omega RC}\right)^2}} \cos \left[ k\omega t - \arctan \left( \frac{k\omega L}{R} - \frac{1}{k\omega RC} \right) \right] \quad (2.61)$$

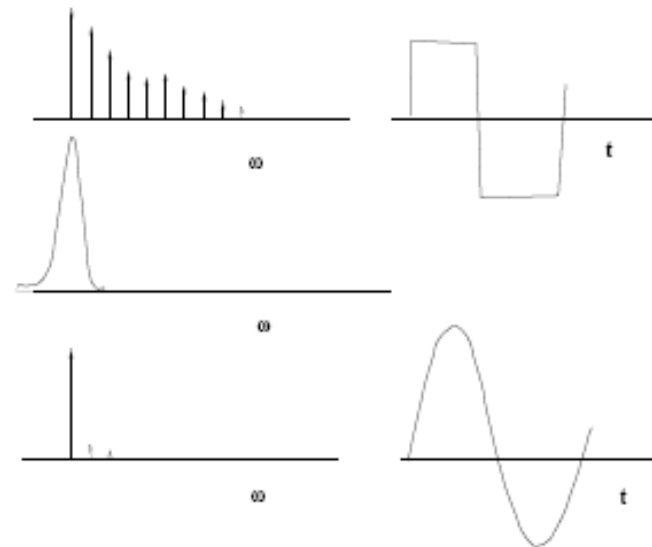


Figure 2.7: Un circuito risonante selettivo (risonanza stretta) seleziona solo l'armonica fondamentale di un segnale periodico alla frequenza di risonanza.

# Potenza elettrica

In CC  $W = (V_A - V_B)I = I^2 R = \frac{(V_A - V_B)^2}{R}$  In CA, invece

Introducendo la grandezza "intensità efficace" della corrente periodica, definita come la media quadratica della corrente  $I$

$$(2.1) \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt}$$

la potenza media si può scrivere semplicemente

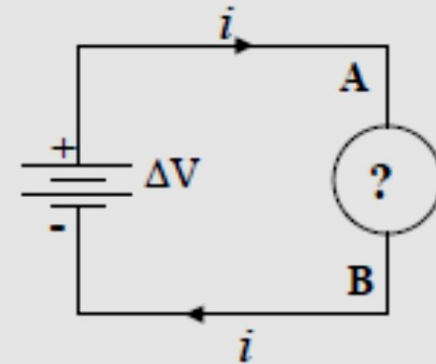
$$(2.2) \quad W_m = I_{eff}^2 R$$

E allora chiaro il significato fisico dell'intensità efficace della corrente: essa è l'intensità di corrente continua che passando attraverso la resistenza  $R$  produce la stessa quantità di calore per effetto Joule prodotta dal passaggio della corrente periodica  $I(t)$ . Per cui si ha

$$W_m = \frac{E_M I_M}{2} \cos \phi = \frac{E_M}{\sqrt{2}} \frac{I_M}{\sqrt{2}} \cos \phi = E_{eff} I_{eff} \cos \phi$$

Lavoro compiuto dalle forze elettriche per portare una quantità di carica  $q$  da A a B:

$$L_{AB} = q \cdot \Delta V \quad (\text{J})$$



La potenza elettrica è pertanto

$$P = \frac{L_{AB}}{\Delta t} = \frac{q}{\Delta t} \cdot \Delta V = \Delta V \cdot i \quad (\text{W})$$

In particolare, se tra A e B c'è una resistenza  $R$  (——):

$$P = \Delta V \cdot i = \boxed{R \cdot i^2 = \frac{\Delta V^2}{R}} \quad \leftarrow \text{ Legge di Ohm}$$

L'energia cinetica degli elettroni è ceduta al reticolo del metallo con generazione di calore (**EFFETTO JOULE**) (1 Caloria = 4.18 Joule)

Fornitura ENEL: Potenza impianto: KW; Energia consumata: KWh  
(1W · s = J; 1 Wh = 3.6 KJ)

Per i conduttori che obbediscono alla legge di Ohm (conduttori metallici ed in generale le soluzioni elettrolitiche) la (1.1) e la (1.2) assumono forme diverse; essendo in tal caso  $(V_A - V_B) = IR$  si ha

$$(1.3) \quad dL = I^2 R dt = \frac{(V_A - V_B)^2}{R} dt$$

$$(1.4) \quad W = (V_A - V_B)I = I^2 R = \frac{(V_A - V_B)^2}{R}$$

Il lavoro compiuto dal campo elettrico e dissipato nel tratto di circuito  $AB$  sotto forma di calore in un intervallo finito di tempo  $t$  si ottiene, ovviamente, integrando la (1.1) e la (1.3)

$$L = \int_0^t (V_A - V_B)I dt = \int_0^t I^2 R dt = \int_0^t \frac{(V_A - V_B)^2}{R} dt$$

che, supponendo la corrente costante nel tempo, si riduce semplicemente a

$$L = (V_A - V_B)It = I^2 Rt = \frac{(V_A - V_B)^2}{R} t$$

Se vogliamo esprimere la quantità di calore  $Q$  sviluppato per effetto Joule in *calorie*, basta dividere il lavoro espresso in *joule* per l'equivalente meccanico della *caloria* (1 *caloria* = 4,18 *joule*) e si ha

$$Q = 0,24 I^2 Rt$$



Corrente efficace

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T I_M^2}{2}} = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$$

Analogamente, per il valore efficace di una f.e.m. sinusoidale si ottiene

$$E_{eff} = \frac{E_M}{\sqrt{2}}$$

### 3 - Potenza di una corrente alternata

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, la potenza istantanea associata ad un generico elemento bipolare è

$$W(t) = E(t)I(t)$$

In particolare per i tre elementi passivi questa relazione diviene

a) resistore

$$W_R(t) = \frac{E^2(t)}{R} = RI^2(t)$$

b) condensatore

$$W_C(t) = \frac{1}{C}I(t) \int I(t)dt = CE(t) \frac{dE(t)}{dt}$$

c) induttore

$$W_L(t) = LI(t) \frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{L}E(t) \int E(t)dt$$

L'energia  $U$  immagazzinata ad un istante generico  $t$  in un condensatore e in un induttore, supponendo nulle la tensione e la corrente iniziali, è

$$U_C(t) = \int_0^t W_C(t) dt = \int_0^t C E(t) \frac{dE(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} C E^2(t)$$

$$U_L(t) = \int_0^t W_L(t) dt = \int_0^t L I(t) \frac{dI(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} L I^2(t)$$

La potenza erogata da un generatore di tensione è

$$W(t) = E_0(t) I(t)$$

e quella erogata da un generatore di corrente

$$W(t) = E(t) I_0(t)$$

Se le leggi di variazione della tensione e della corrente nel tempo sono rispettivamente

$$E = E_M \cos \omega t \quad I = I_M \cos(\omega t - \phi)$$

la potenza istantanea, relativa all'istante  $t$ , è espressa da

$$(3.1) \quad W(t) = E_M I_M \cos \omega t \cos(\omega t - \phi)$$

Utilizzando la formula di Werner:  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$  si ha

$$(3.2) \quad W(t) = \frac{E_M I_M}{2} [\cos \phi + \cos(2\omega t - \phi)]$$

L'andamento della potenza istantanea  $W$  nel tempo è dunque periodico con pulsazione  $2\omega$ , doppia di quella propria della tensione e della corrente

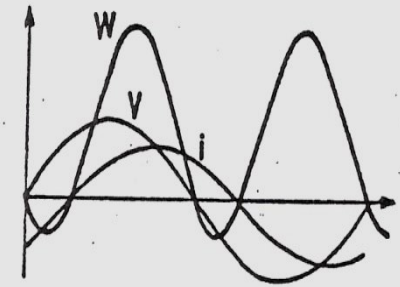


Fig. 3.1

(fig. 3.1). Utilizzando la (3.2) si ha che la potenza media  $W_m$  è data da

$$W_m = \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt = \frac{E_M I_M}{2} \left[ \cos \phi + \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t - \phi) dt \right]$$

Poichè l'integrale della funzione coseno calcolato su un periodo è nullo, si ottiene

$$(3.3) \quad W_m = \frac{E_M I_M}{2} \cos \phi = \frac{E_M}{\sqrt{2}} \frac{I_M}{\sqrt{2}} \cos \phi = E_{eff} I_{eff} \cos \phi$$

che è la formula di Galileo Ferraris; inoltre, essendo  $E_{eff} = Z I_{eff}$

$$W_m = \frac{E_{eff}^2}{Z} \cos \phi = I_{eff}^2 Z \cos \phi$$

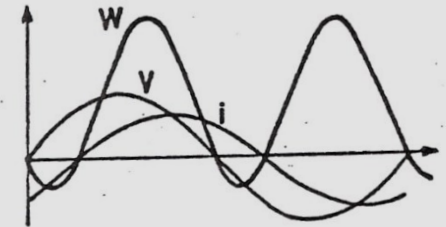


Fig. 3.1

La potenza media assorbita dal sistema di conduttori dipende, dunque, oltre che dai valori efficaci della d.d.p. e della corrente (oppure dai corrispondenti valori massimi), anche dalla differenza di fase  $\phi$  tra la tensione e la corrente. Il fattore  $\cos \phi$  prende il nome di fattore di potenza.

Rammentando che  $\tan \phi$  è uguale al rapporto fra la parte immaginaria di  $\bar{Z}$  ( $Im \bar{Z}$ ) e la parte reale di  $\bar{Z}$  ( $Re \bar{Z}$ ) e che  $\cos \phi = (1 + \tan^2 \phi)^{-1/2}$ , si ha che  $\cos \phi = \frac{Re \bar{Z}}{Z}$ ; se  $Re \bar{Z}$  è molto piccolo rispetto a  $Im \bar{Z}$ , allora  $\cos \phi = 0$  e quindi  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ . In questo caso la potenza media assorbita dal circuito è nulla anche se  $E_{eff}$  e  $I_{eff}$  sono diversi da zero; la corrente si dice allora swattata.

#### 4 - Adattamento di impedenza

Consideriamo ora un circuito costituito da un generatore di f.e.m. sinusoidale  $\bar{E}_0$  e di impedenza interna  $\bar{Z}_0$  connesso ad un'impedenza di carico  $\bar{Z}_c$  (vedi fig. 4.1).

Dell'energia fornita dal generatore, una parte viene ceduta all'impedenza interna e una parte viene ceduta all'impedenza di carico. Ci proponiamo di individuare le condizioni nelle quali si ha un trasferimento massimo di potenza dal generatore all'impedenza di carico.

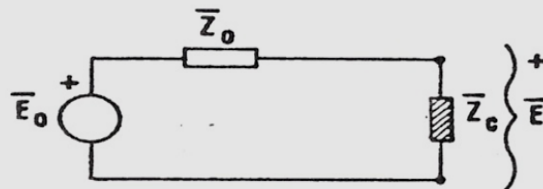
Nel circuito fluisce una corrente  $\bar{I}$  il cui modulo è

$$I = \frac{E_{0M}}{Z} = \frac{E_{0M}}{|\bar{Z}_0 + \bar{Z}_c|} = \frac{E_{0M}}{\sqrt{(R_0 + R_c)^2 + (X_0 + X_c)^2}}$$

dove si è posto  $R_0 = \text{Re}\bar{Z}_0$ ,  $R_c = \text{Re}\bar{Z}_c$ ,  $X_0 = \text{Im}\bar{Z}_0$  e  $X_c = \text{Im}\bar{Z}_c$ . Quindi la potenza media dissipata nell'impedenza di carico è

$$W_m = \frac{1}{2} E_{0M}^2 \frac{R_c}{(R_0 + R_c)^2 + (X_0 + X_c)^2}$$

Consideriamo ora  $W_m$  come funzione di  $R_c$  ed  $X_c$  e cerchiamo i valori di questi parametri per i quali  $W_m$  è massima. Derivando  $W_m$  rispetto a  $X_c$  con  $R_c$  costante e rispetto a  $R_c$  con  $X_c$  costante si ottiene



$$\frac{\partial W_m}{\partial X_c} = \frac{1}{2} E_{0M}^2 \frac{R_c [-2(X_0 + X_c)]}{Z^4}$$

$$\frac{\partial W_m}{\partial R_c} = \frac{1}{2} E_{0M}^2 \frac{(X_0 + X_c)^2 + (R_0^2 - R_c^2)}{Z^4}$$

Le due derivate si annullano simultaneamente per

$$R_c = R_0 \qquad X_c = -X_0$$

La potenza ceduta all'impedenza di carico è massima quando la parte reale dell'impedenza di carico è uguale a quella della impedenza interna del generatore e le rispettive reattanze hanno modulo uguale e segno opposto. In queste condizioni si dice che l'impedenza di carico è adattata alla sorgente.

Questa potenza media massima vale

$$W_{m \text{ Max}} = \frac{1}{8} \frac{E_{0M}^2}{R_0}$$

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

$$P = VI \cos \varphi$$

Potenza attiva

$$Q = VI \sin \varphi$$

Potenza reattiva

$$W(t) = VI \cos \varphi + VI \cos(2\omega t + \varphi)$$

$$W(t) = P(1 + \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t$$

$$W_R = RI^2 \cos \varphi + RI^2 \cos 2\omega t \quad \varphi = 0$$

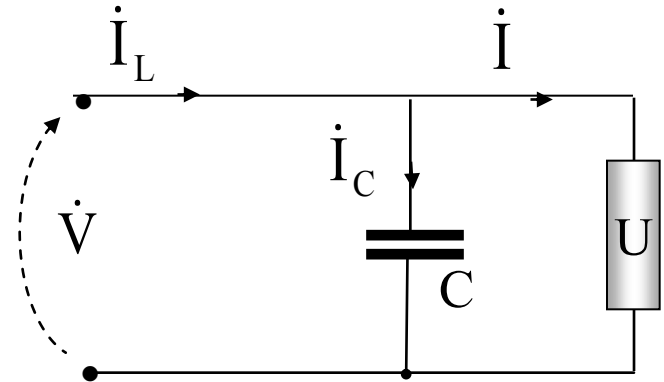
$$W_L = \omega LI^2 \sin 2\omega t \quad \varphi = 90$$

$$W_C = -\omega CV^2 \sin 2\omega t \quad \varphi = -90$$

## CALCOLO DELLA CAPACITÀ DI RIFASAMENTO: CARICO MONOFASE

$$\left. \begin{array}{l} P = VI \cos \varphi \\ Q = VI \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow Q = P \tan \varphi$$

Si calcola il valore che deve avere la capacità C del condensatore per raggiungere il valore  $\cos(\varphi')$  (ad esempio  $\cos(\varphi') = 0.9$ ) del fattore di carico del carico rifasato



$$Q = P \tan \varphi$$

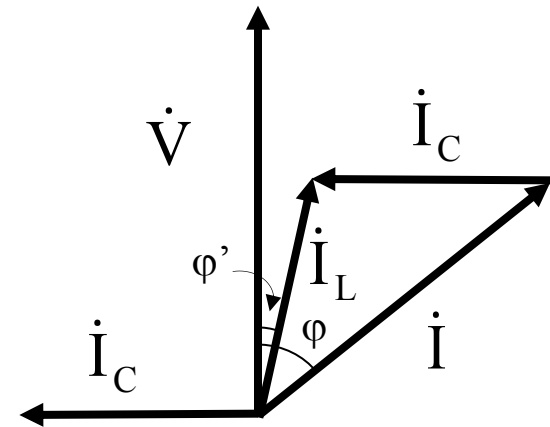
$$Q + Q_C = P \tan \varphi'$$

---

$$Q_C = P (\tan \varphi' - \tan \varphi) \quad ; \quad Q_C = -\omega C V^2$$



$$C = \frac{P}{\omega V^2} (\tan \varphi - \tan \varphi')$$







# Magnetismo nella materia

Il campo di induzione  $\mathbf{B}$  in un punto di un materiale si può scrivere come:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_d$$

dove  $\mathbf{B}_e$  è il campo “esterno” generato dalle correnti nei fili (correnti Macroscopiche) mentre  $\mathbf{B}_p$  e  $\mathbf{B}_d$  sono i campi dovuti alle correnti microscopiche, conseguenti alla magnetizzazione (para/ferromagnetica o diamagnetica) della materia.

La relazione tra  $\mathbf{B}$  e le correnti  $\mathbf{I}$ , in un materiale, si può scrivere come:

$$\text{Rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1)$$

dove  $\mathbf{J}$  è la densità delle correnti, sia quelle macroscopiche  $\mathbf{J}_e$  dei fili sia quelle microscopiche  $\mathbf{J}_m$  date dagli orbitali elettronici degli atomi dei mezzi presenti:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_m$$

Pertanto si ha:

$$\text{Rot } (\mathbf{B} / \mu_0) = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_m = \mathbf{J}_e + \text{Rot } \mathbf{M}$$

dove  $\mathbf{M}$  è l'intensità di magnetizzazione nel punto considerato.

Nome

Forma differenziale

Forma integrale

[Teorema di Gauss](#) per il campo elettrico

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

[Teorema del flusso](#) per il campo magnetico

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

[Legge di Faraday](#)

(circuitazione del campo elettrico)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

[Legge di Ampère](#)

(circuitazione del campo magnetico)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I + \mu \epsilon \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Si può dimostrare che  $\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta \mathbf{m} / \Delta V$

dove  $\Delta V$  è un volume di materia e  $\Delta \mathbf{m}$  il corrispondente momento magnetico risultante. La (1) diventa:

$$\text{Rot } (\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}) = \mathbf{J}_e$$

Introducendo il campo

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$$

possiamo infine scrivere:

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_e \quad (2)$$

e per il teorema del rotore:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \int \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{n} dS = \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

dove  $I$  è la corrente macroscopica che attraversa la superficie  $S$  di contorno  $l$ .

L'analogia tra la (1) e la (2), suggerisce di considerare

$$[\text{Rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1)]$$

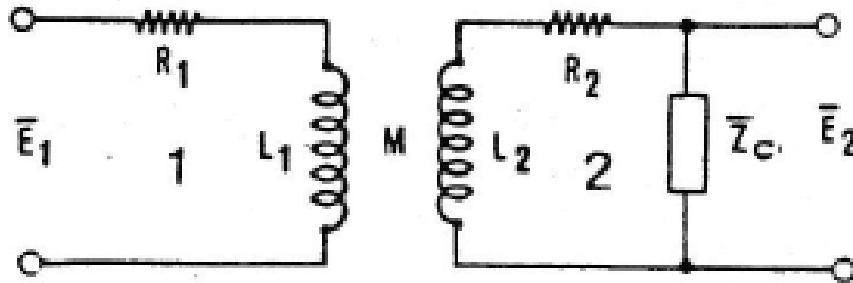
$\mathbf{H}$  come campo magnetico "esterno" o "campo magnetizzante",

dato che  $\mathbf{H}$  soddisfa ad una equazione di campo in cui compaiono solo le correnti macroscopiche dei fili.

Si noti però che il vettore che soddisfa alle equazioni di campo comprendenti tutte le correnti e che quindi rappresenta il campo fisico è il vettore induzione magnetica  $\mathbf{B}$ .

# Il Trasformatore

che è rappresentato dal seguente schema elettrico costituito da 2 circuiti accoppiati magneticamente: il circuito primario (1) ed il secondario (2).



I circuiti 1-2 sono magneticamente concatenati e se in uno di essi na corrente variabile nel a nell'altro

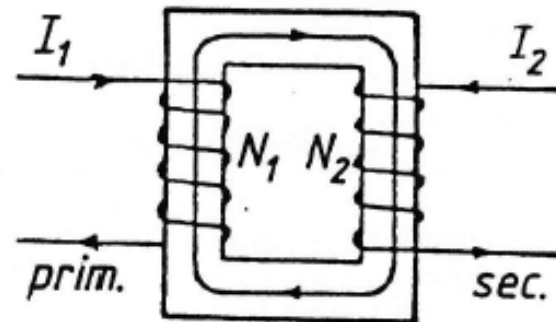
$$\bar{E}_{2ind} = -M \frac{d\bar{I}_1}{dt} = -i\omega M \bar{I}_1$$

$$o \quad E_{1ind} = -i \omega M I_2$$

dove M è il coefficiente di mutua induzione pari a

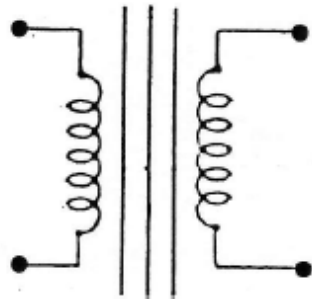
$$M = \pm K (L_1 L_2)^{1/2}$$

e K è il coefficiente di accoppiamento. Il segno di M dipende dal senso di avvolgimento delle 2 bobine



Nel caso di trasformatori industriali  $K \cong 1$  usando nuclei ferromagnetici chiusi

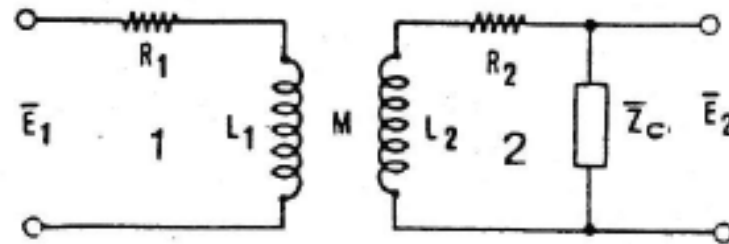
Circuiti magneticamente accoppiati si rappresentano come in figura



Se nell'avvolgimento primario circola una corrente  $I_1$ , si manifesta nel secondario una f.e.m.  $-i\omega M I_1$  analogamente, se nell'avvolgimento secondario circola una corrente  $I_2$ , avremo nell'avvolgimento primario una tensione indotta pari a  $-i\omega M I_2$

Applicando le leggi dei circuiti elettrici a 1 e 2 si ha

$$\begin{cases} -\bar{E}_1 + i\omega M \bar{I}_2 + \bar{I}_1 \bar{Z}_1 = 0 \\ i\omega M \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \bar{Z}_2 = 0 \end{cases}$$



Dove  $\bar{Z}_1 = R_1 + i\omega L_1$  e  $\bar{Z}_2 = R_2 + i\omega L_2 + \bar{Z}_c$

Dalla 2a equazione si ha

Che sostituita nella prima  
Consente di ottenere

$$\bar{I}_2 = -\frac{i\omega M \bar{I}_1}{\bar{Z}_2}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2}} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_{eq}} \quad \text{dove} \quad \bar{Z}_{eq} = \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + i\omega L_2 + \bar{Z}_c}$$

Se  $I_2 = 0$  (secondario aperto o trasformatore a vuoto)

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{Z_1} \approx \frac{\bar{E}_1}{i\omega L_1}$$

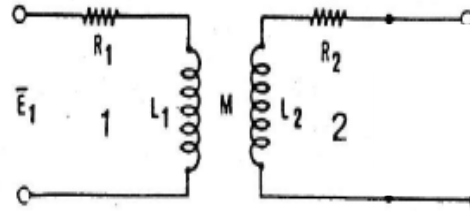
$$\bar{E}_2 = i\omega M \bar{I}_1 = \frac{M}{L_1} \bar{E}_1$$

$$\frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{\pm K \sqrt{L_1 L_2}}{L_1} = \pm K \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

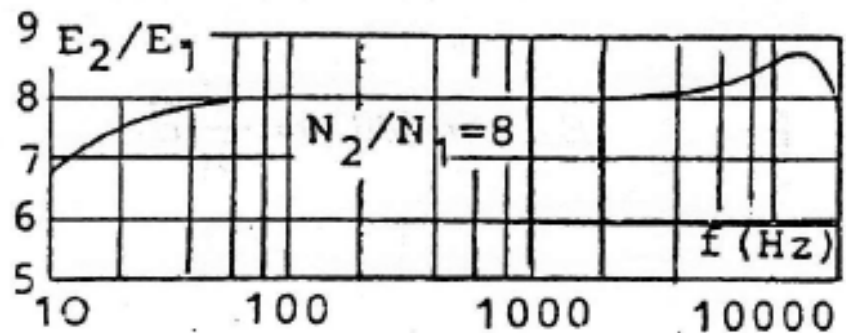
Riferendosi al caso di un trasformatore con nucleo ferromagnetico chiuso ( $K = 1$ ) ricordando che  $L$  è proporzionale al quadrato del numero di spire

$$(L_1 = hN_1^2, L_2 = hN_2^2)$$

Si ha 
$$\frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}$$



Questa formula mostra che il rapporto fra le tensioni ai capi del trasformatore a vuoto è indipendente dalla frequenza. In realtà la presenza delle resistenze, delle capacità parassite e del flusso disperso rende il rapporto fra le tensioni  $E_1$  ed  $E_2$  dipendente dalla frequenza (si veda figura).



# Adattamento di impedenza

Il trasformatore viene spesso usato come adattatore di impedenza per segnali in bassa frequenza (audio).

L'impedenza vista dal circuito primario per effetto del secondario con

carico resistivo  $R_3$  (impedenza del secondario riportata al primario) è:

Che

diventa:

$$\bar{Z}_{eq} = R \frac{\omega^2 M^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} - i\omega L_2 \frac{\omega^2 M^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} = R_{eq} + i\omega L_{eq}$$

L'impedenza al primario è composta di una parte resistiva, che rende conto dell'energia trasferita al secondario ed utilizzata in  $R$ , e di una parte reattiva, che ha la struttura matematica di una reattanza induttiva negativa e che va a diminuire la reattanza primaria; è come se nel circuito equivalente primario esistesse una induttanza ed una resistenza di valore

$$L'_1 = L_1 + L_{eq} = L_1 - L_2 \frac{\omega^2 M^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2}$$

$$R'_1 = R_1 + R_{eq} = R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} R$$

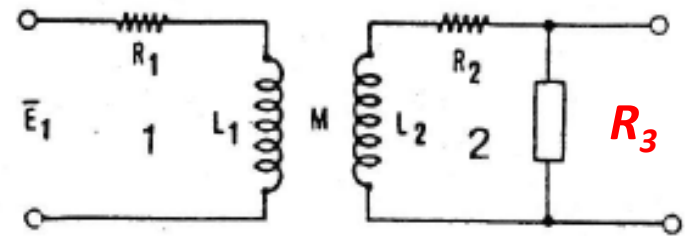
$$R_{eq} = \frac{L_1}{L_2} R = \frac{N_1^2}{N_2^2} R$$

$$R'_1 = R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2} R$$

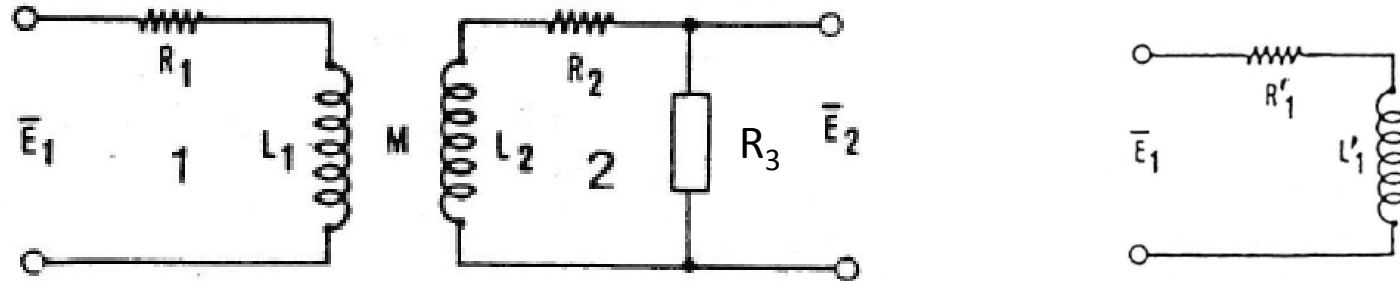
Se  $K = 1$  e  
 $R^2 \ll \omega^2 L_2^2$

$$L_{eq} = -L_1$$

$$L'_1 = 0$$



$$(R = R_2 + R_3)$$



Agli effetti del generatore, nel caso di un trasformatore chiuso su una resistenza  $R_3$  e nel caso che  $R(=R_2+R_3) \ll \omega L_2$  tutto avviene come se il trasformatore non esistesse ed ai morsetti del generatore fosse applicata direttamente una resistenza di valore

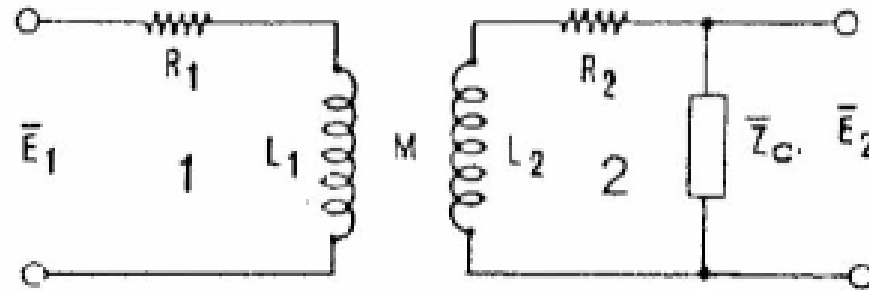
$$R'_1 = R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2} R$$

Poichè nella realtà,  $R_2 \ll R_3$ , cioè  $R_3 = R$ , si può allora affermare che l'interposizione di un trasformatore fra il generatore e la resistenza equivale al trasferimento della resistenza stessa ai morsetti del generatore moltiplicata per il quadrato del rapporto di trasformazione  $N_1/N_2$ .

Il trasformatore può essere considerato un dispositivo capace di trasformare una resistenza  $R$ , collegata ad una coppia di morsetti, in un'altra di valore  $R' = R (N_1^2/N_2^2)$  e, entro certi limiti, di fare ciò in maniera indipendente dalla frequenza.



# Trasformatore di uscita: adattamento di impedenza



$$\begin{cases} -E + j\omega MI_2 + I_1 Z_1 = 0 \\ j\omega MI_1 + I_2 Z_2 = 0 \end{cases}$$

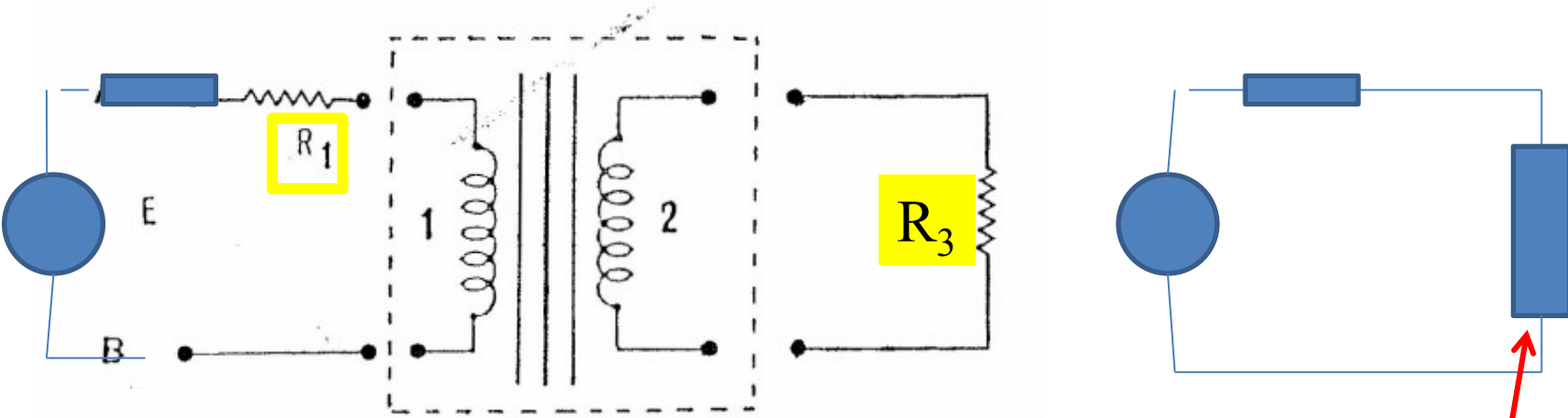
$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad Z_2 = R_2 + j\omega L_2 + Z_c$$

$$\begin{cases} -E + j\omega MI_2 + I_1 Z_1 = 0 \\ j\omega MI_1 + I_2 Z_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_2 = -\frac{j\omega M I_1}{Z_2} \Rightarrow I_1 = \frac{E}{Z_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2}}$$

$$Z_{eq} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + R_3} \quad Z_c = R_3$$

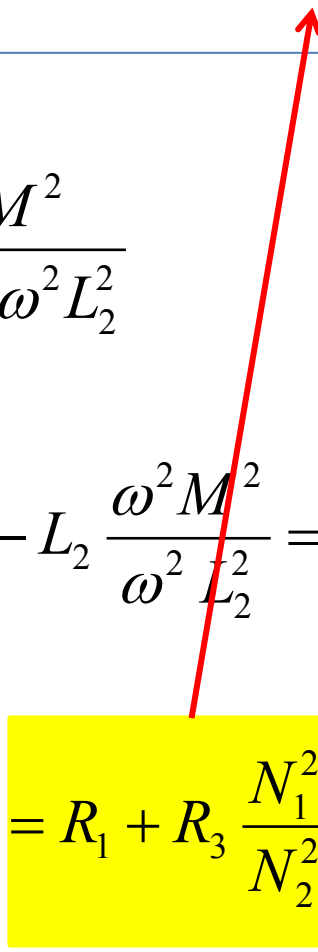
$$Z_{eq} = \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} = R \frac{\omega^2 M^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} - j\omega L_2 \frac{\omega^2 M^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2}$$



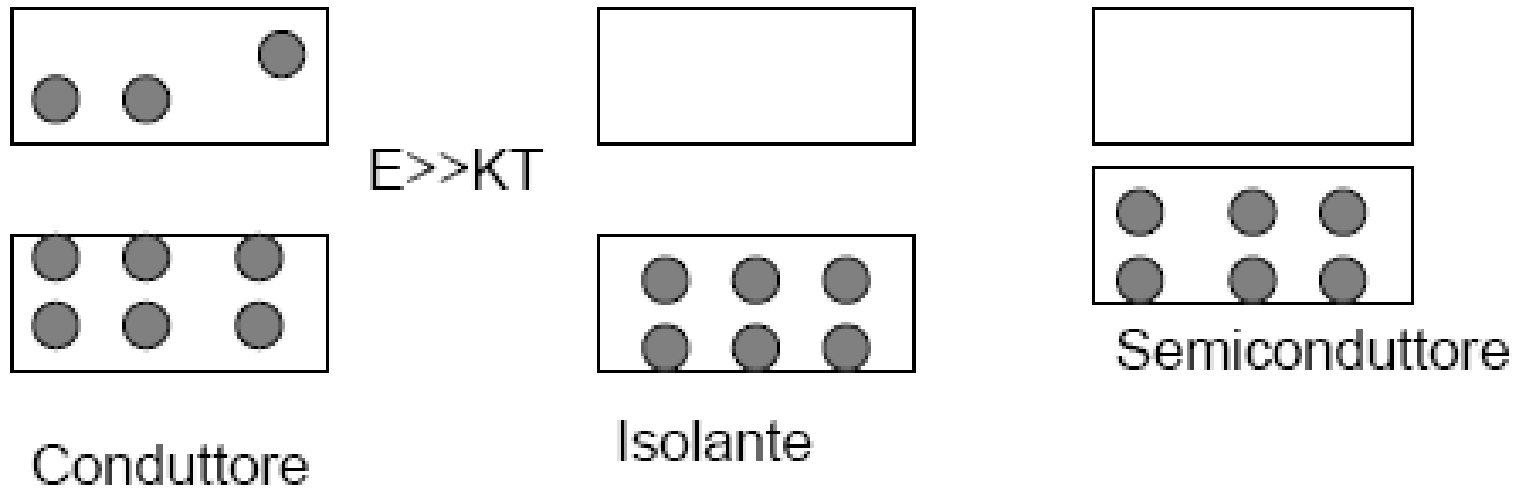
$$Z_{eq} = \frac{\omega^2 M^2}{R_3 + j\omega L_2} = R_3 \frac{\omega^2 M^2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} - j\omega L_2 \frac{\omega^2 M^2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2}$$

$$L = L_1 + L_{eq} = L_1 - L_2 \frac{\omega^2 M^2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} \xrightarrow{R_3 \ll \omega L_2} L_1 - L_2 \frac{\omega^2 M^2}{\omega^2 L_2^2} = 0$$

$$R = R_1 + R_3 \frac{\omega^2 M^2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} \xrightarrow{R \approx R_3 \ll \omega L_2} R_1 + R_3 \frac{L_1}{L_2} = R_1 + R_3 \frac{N_1^2}{N_2^2}$$



# **Diodi semiconduttori**



la banda satura e' detta di valenza

la banda vuota o parzialmente occupata  
e' detta banda di conduzione

A  $300\text{ }^{\circ}K$  le resistività di Si e Ge sono

$$\rho(Si) = 230\,000\text{ ohm cm}$$

$$\rho(Ge) = 47\text{ ohm cm}$$

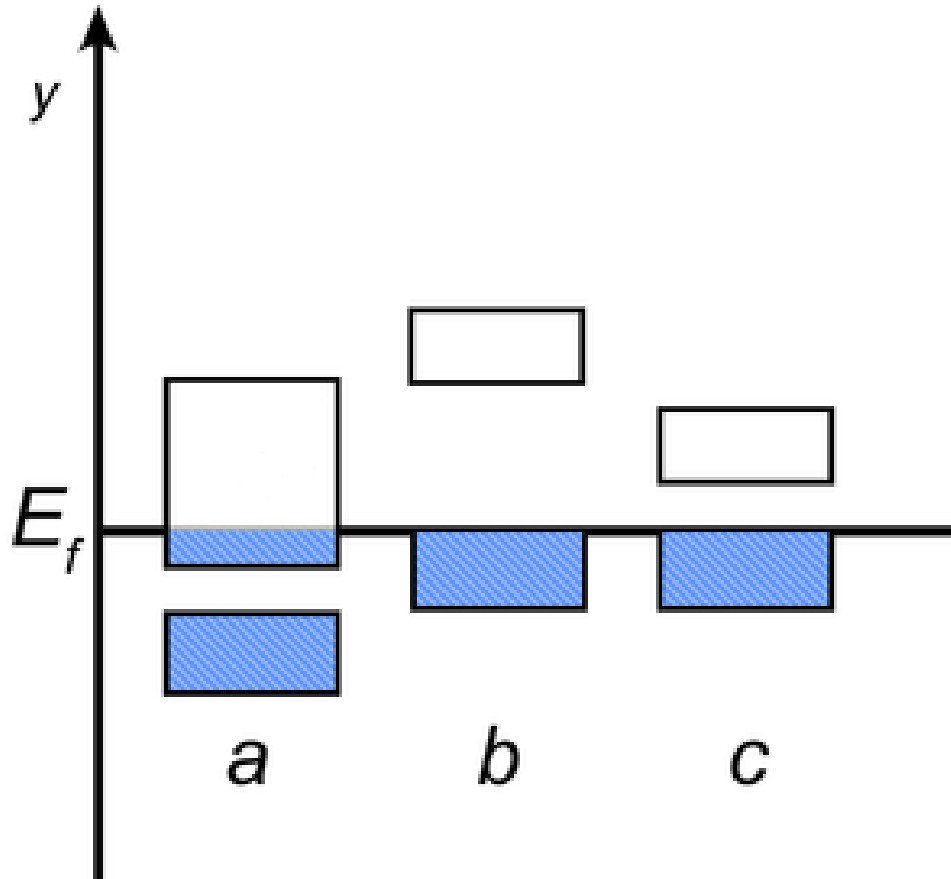
mentre quella del rame e del vetro sono:

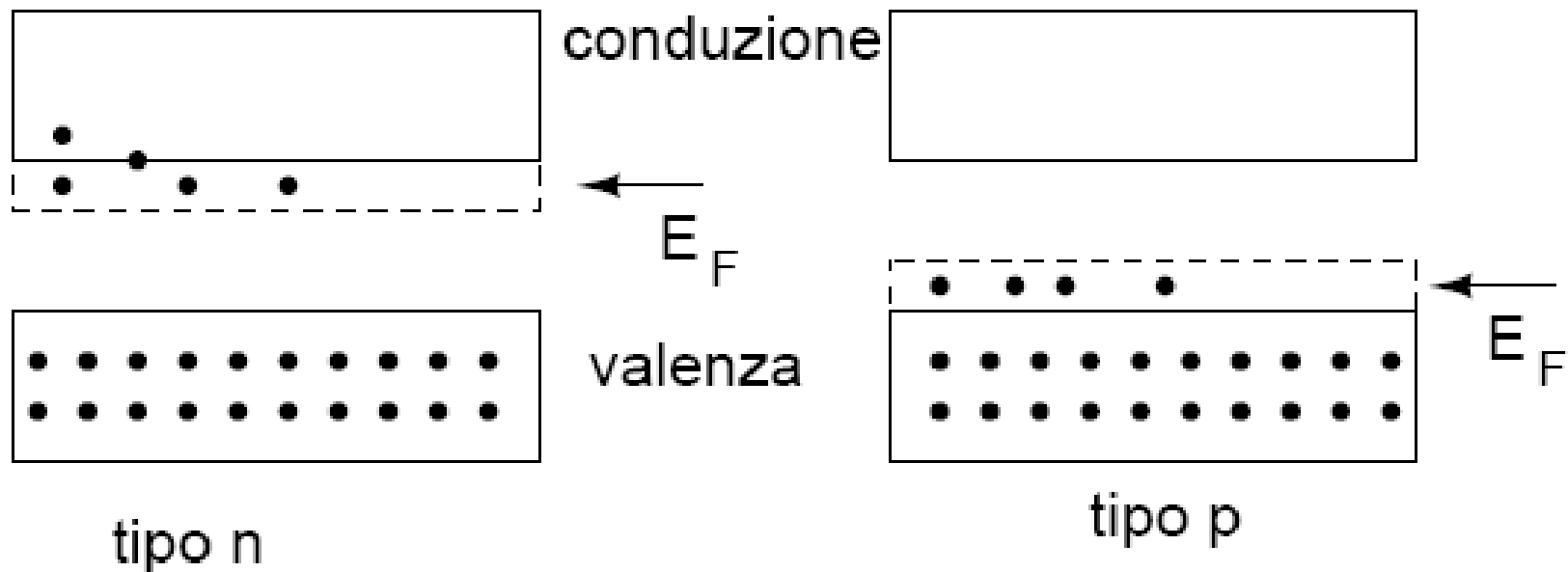
$$\rho(Cu) = 1.7 \cdot 10^{-6}\text{ ohm cm}$$

$$\rho(\text{vetro}) = 10^{14}\text{ ohm cm}$$

# Livello di Fermi

È il livello di energia più alto occupato  
allo zero assoluto

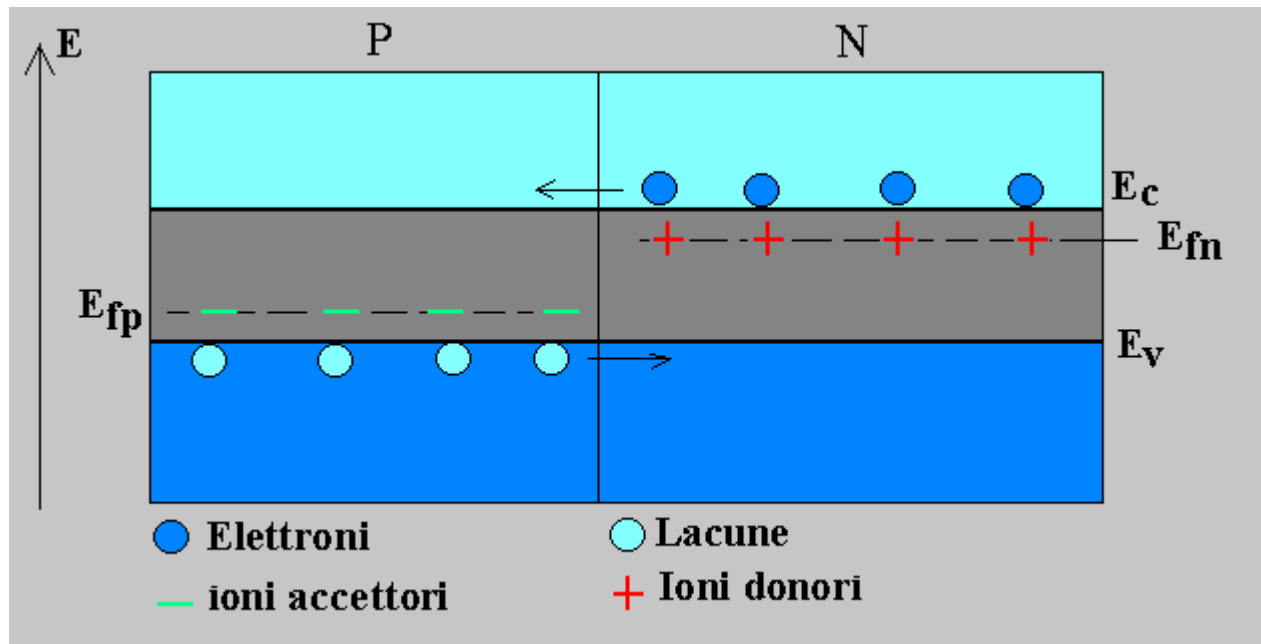




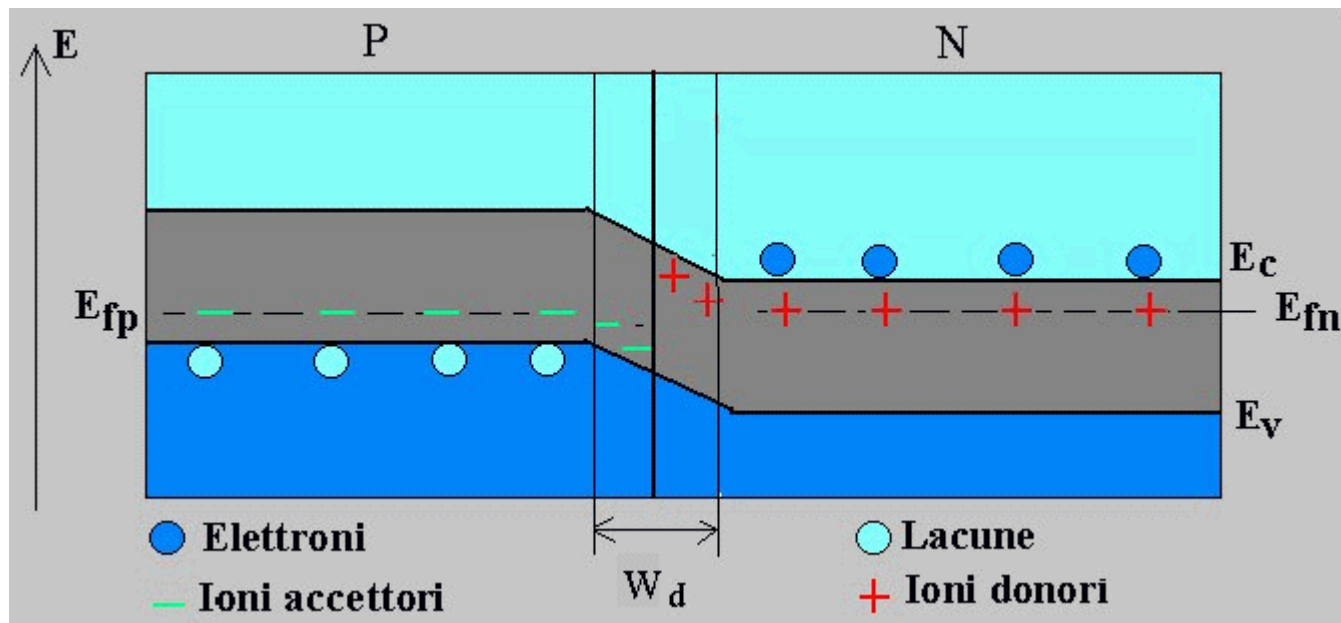
peratura dello zero assoluto. Questa energia, per il rame, vale 7.06 eV. Alla temperatura  $T$ , la probabilità di occupazione è data dalla funzione di Fermi-Dirac:

$$p(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (4.1)$$

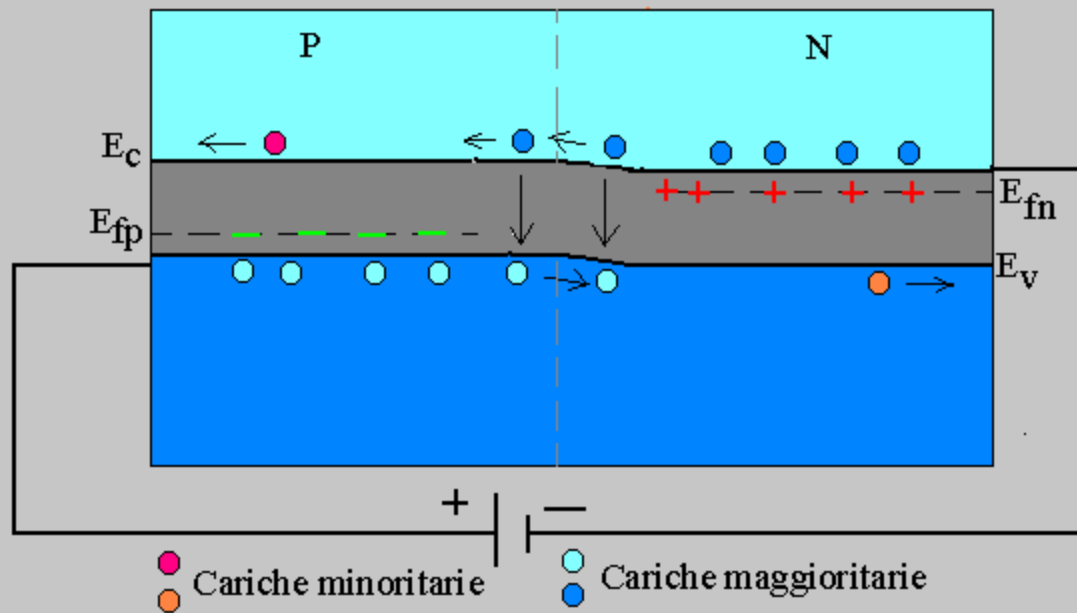
All'energia di Fermi corrisponde il valore  $p(E_F) = 1/2$ . La (4.1) mostra che la quantità importante non è l'energia  $E$ , ma la differenza  $E - E_F$ . Nel caso



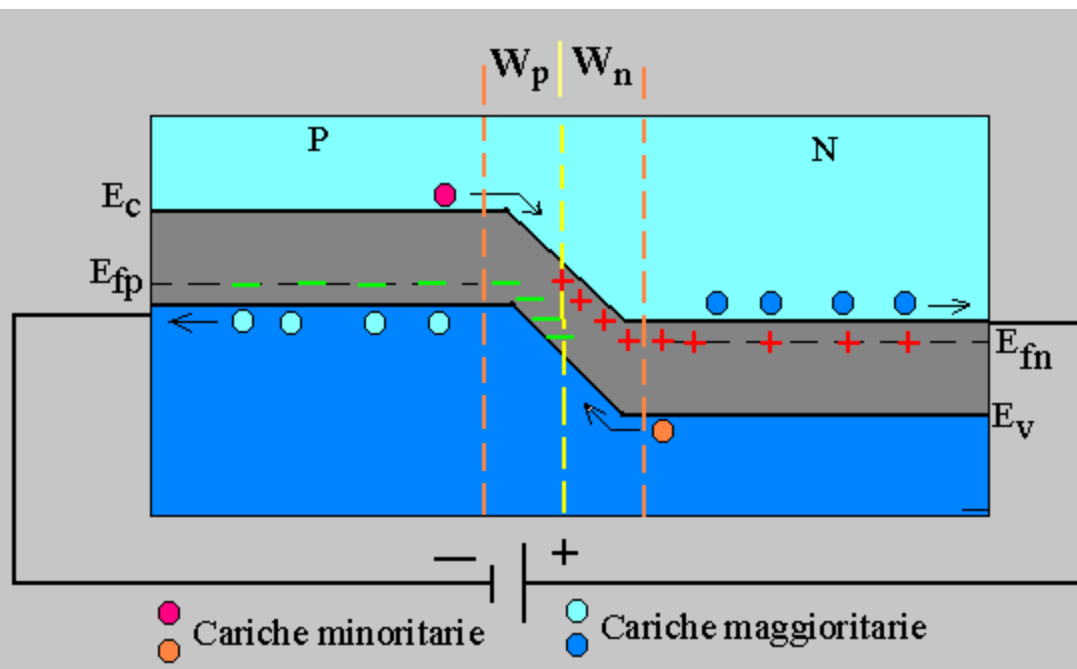
Barriera  
naturale



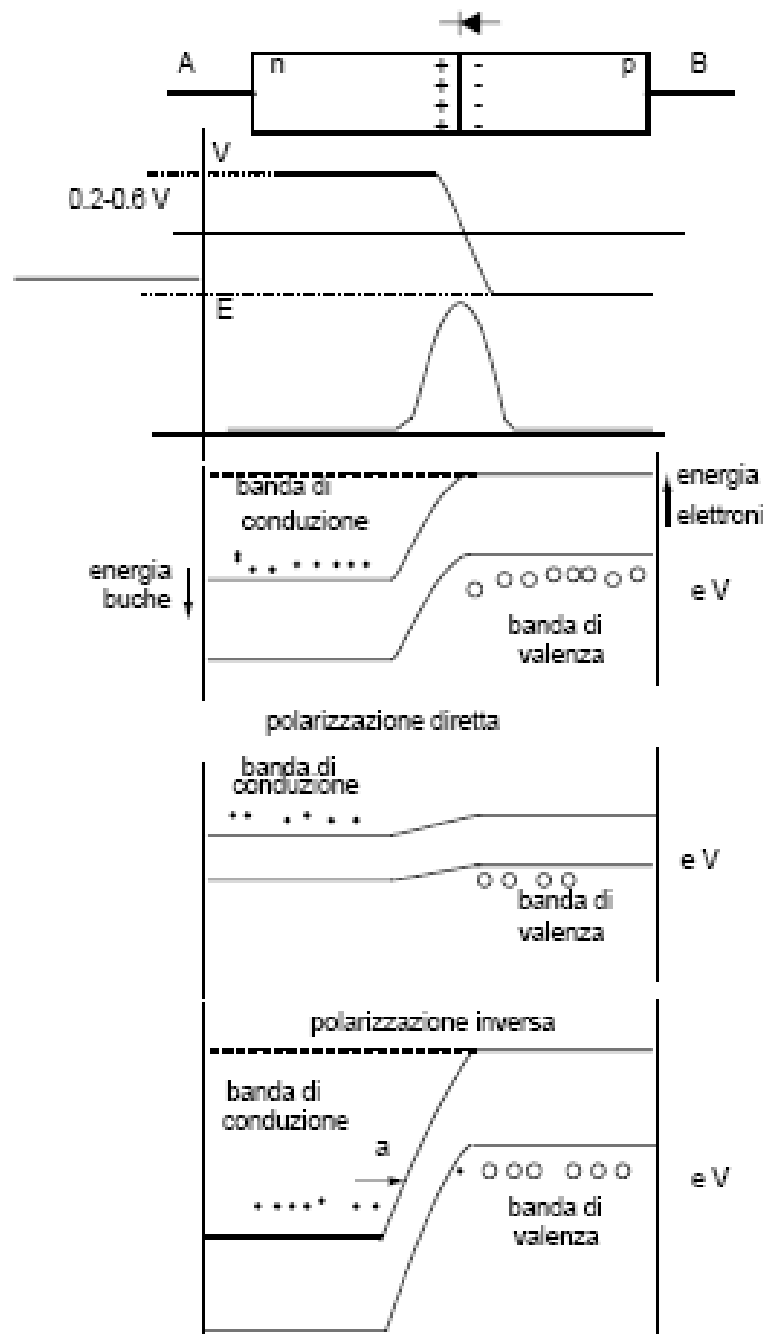




Polarizzazione diretta



Polarizzazione inversa



- $V = 0.7$  V per il silicio;
- $V = 0.3$  V per il germanio.

In base alle leggi generali della meccanica statistica, essendo  $eV$  l'energia per superare la barriera naturale di potenziale  $V$ , per una giunzione ad una temperatura uniforme  $T$  all'equilibrio vale la relazione

$$\frac{N_p(\text{lato p})}{N_p(\text{lato n})} = \frac{N_n(\text{lato n})}{N_n(\text{lato p})} = e^{+eV/kT}, \quad (4.2)$$

dove  $e$  è la carica dell'elettrone e  $k$  la costante di Boltzmann.

# Curva caratteristica

$$-E + IR + V = 0 . \quad (4.7)$$

Ricavando la corrente si ottiene, nel piano I-V, l'equazione della *retta di carico*:

$$I = -\frac{V}{R} + \frac{E}{R} . \quad (4.8)$$

Questo tipo di retta è utile quando la maglia è costituita da elementi lineari di impedenza totale  $R$  e da elementi non lineari ai capi dei quali esiste una tensione  $V$ . Dalla (4.8) risulta una regola generale per le intercette della retta di carico con gli assi:

$$I(V) = I_0 [e^{eV/kT} - 1]$$

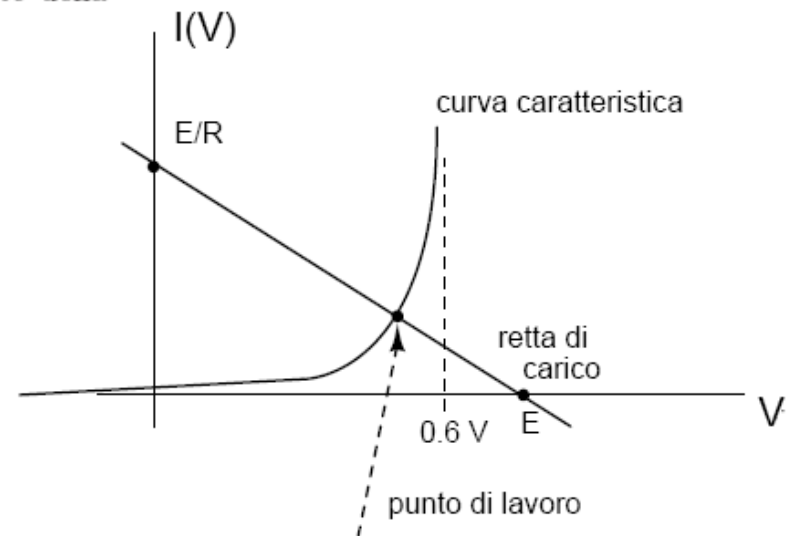
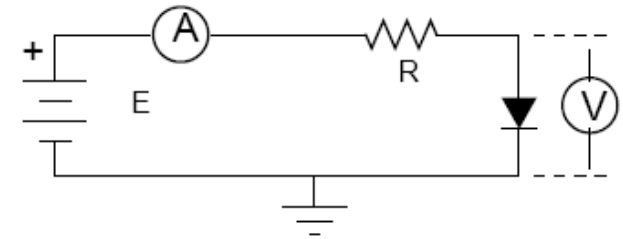


Figure 4.5: Retta di carico e punto di lavoro.

# Resistenza dinamica

$$r_e = \frac{dV}{dI} .$$

Dato che a temperatura ambiente si ha

$$\frac{e}{kT} = \frac{1 \text{ e}}{0.025 \text{ eV}} \simeq 40 \text{ V}^{-1} ,$$

la (4.3) si può scrivere con buona approssimazione come

$$I(V) \simeq I_0 e^{eV/kT} ,$$

derivando la quale

$$\frac{dI}{dV} = I \frac{e}{kT}$$

si ottiene, per la corrente che fluisce in *polarizzazione diretta*:

$$r_e = \frac{dV}{dI} \simeq \frac{1}{40 I} \Omega .$$

Esprimendo la corrente in mA si ottiene l'impedenza:

$$r_e = \frac{dV}{dI} \simeq \frac{25}{I(\text{mA})} \Omega ,$$

che è detta *resistenza differenziale in polarizzazione diretta*.

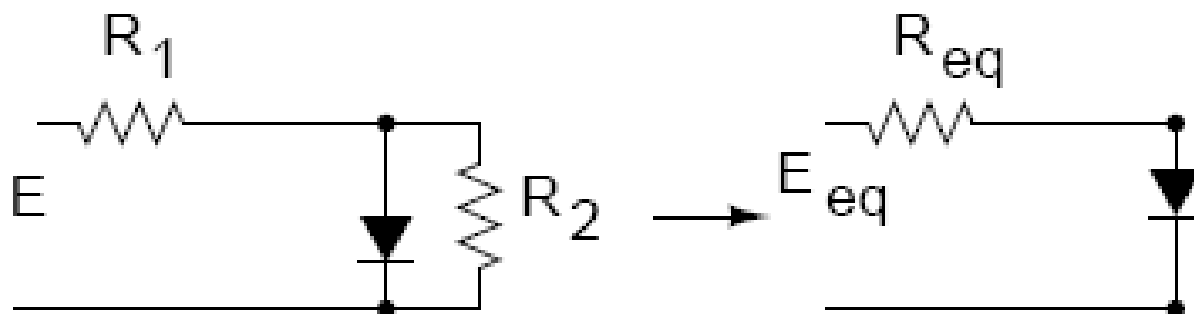


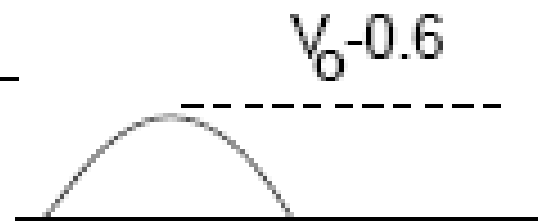
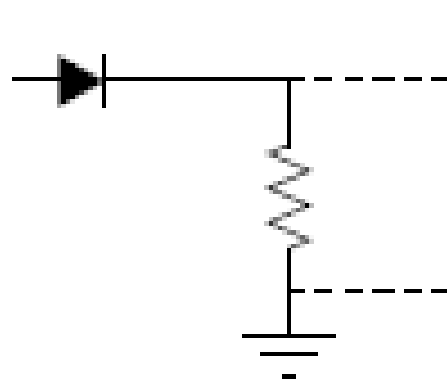
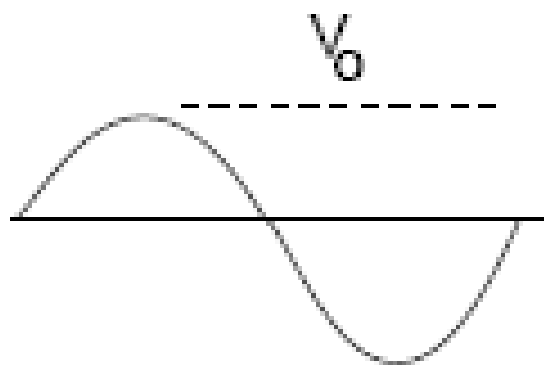
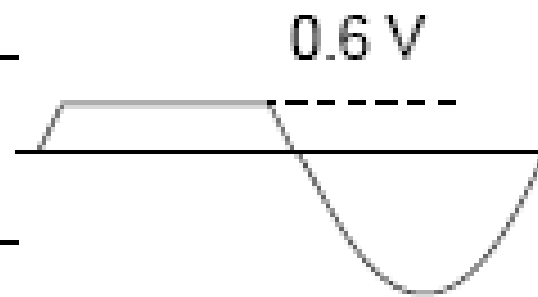
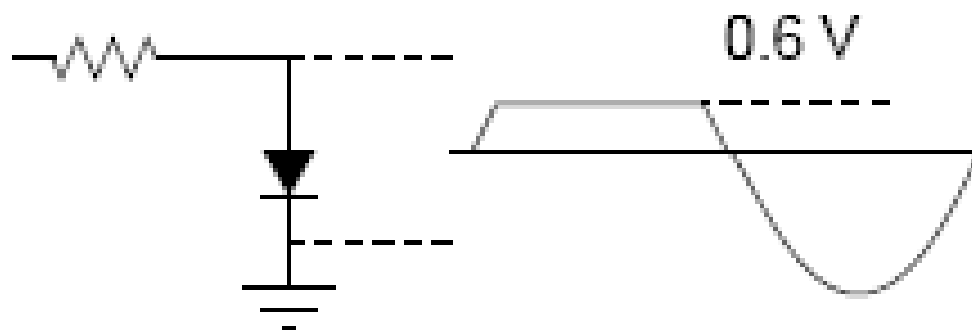
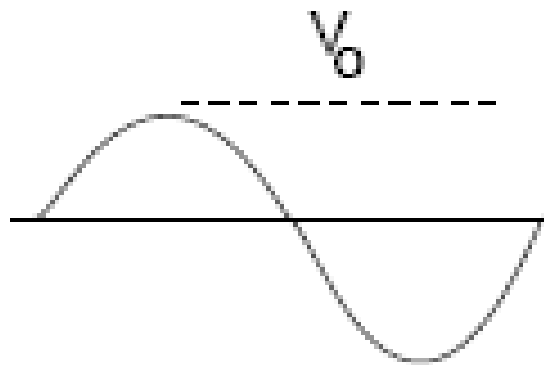
Figure 4.6: Risoluzione di un partitore col teorema di Thevenin

Il metodo della retta di carico vale anche nel caso di partitori più complessi come nel caso di fig. 4.6. Infatti, in questo caso, in base al teorema di Thevenin, le intercette della retta di carico sono date da  $E_{\text{eq}}/R_{\text{eq}}$  e  $E_{\text{eq}}$ :

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.9)$$

$$E_{\text{eq}} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \frac{E_{\text{eq}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{E}{R_1}. \quad (4.10)$$

Dalle formule si vede che la resistenza di uscita ha l'effetto di spostare l'intercetta  $E_{\text{eq}}$  sull'asse delle tensioni.



# ZENER

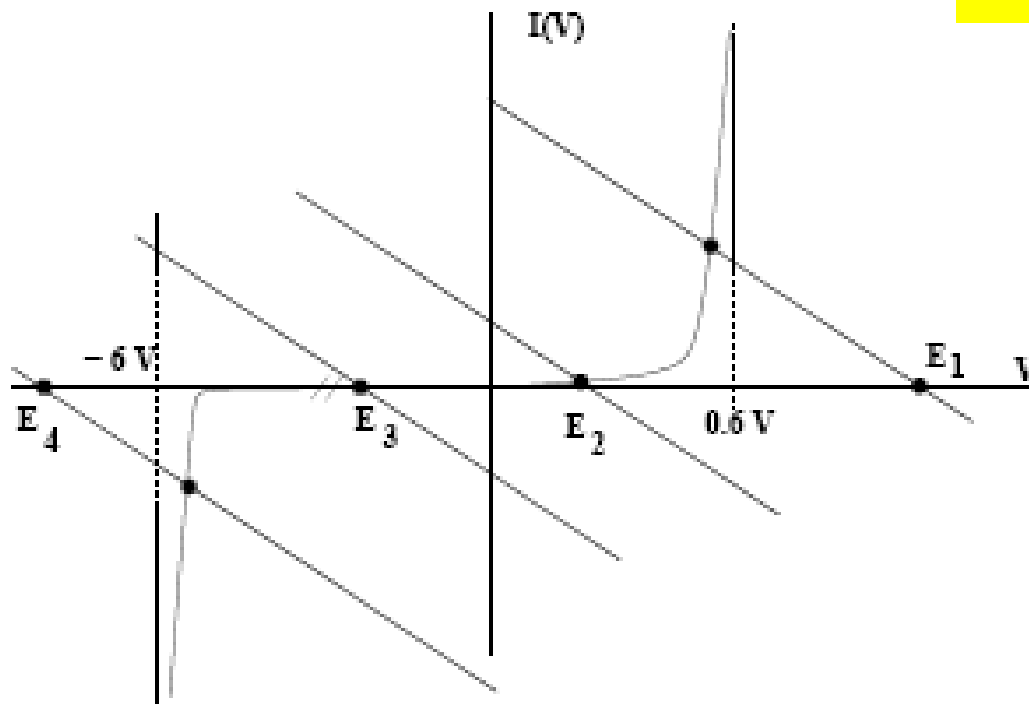


Figure 4.8: Curva caratteristica del diodo Zener. Variando la tensione del generatore tra i valori  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$ , la tensione ai capi del diodo, che è l'ascissa del punto di lavoro, resta limitata tra  $-6$  e  $0.6$  Volt.



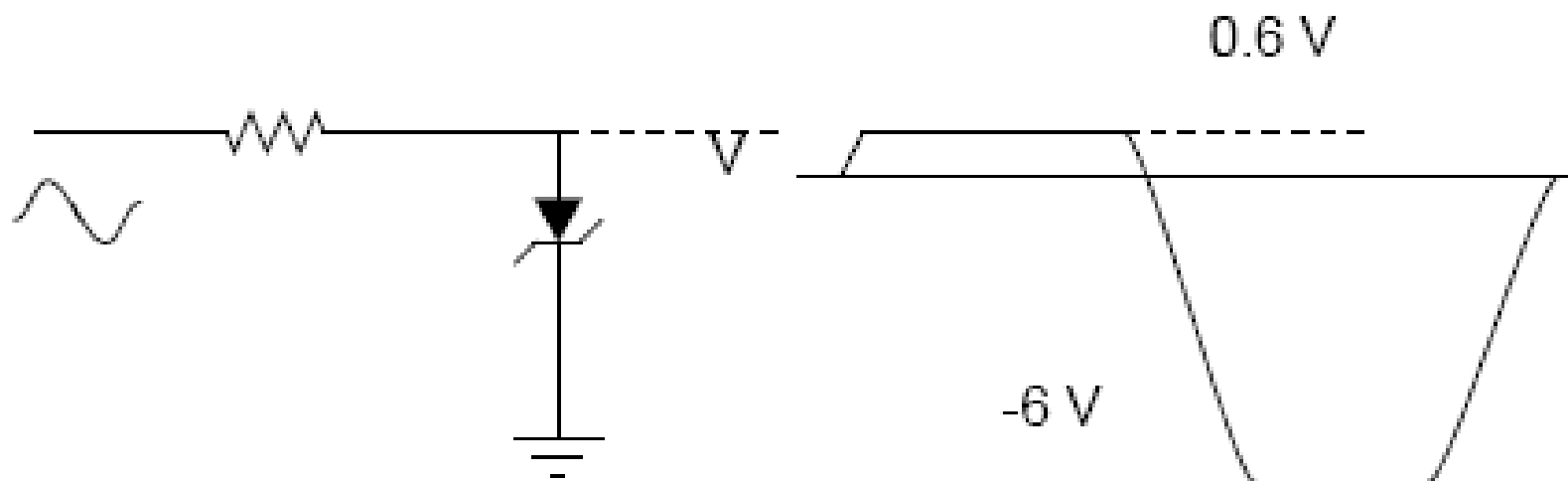


Figure 4.9: Partitore con zener in uscita. Si noti il simbolo circuitale diverso dal diodo a giunzione.

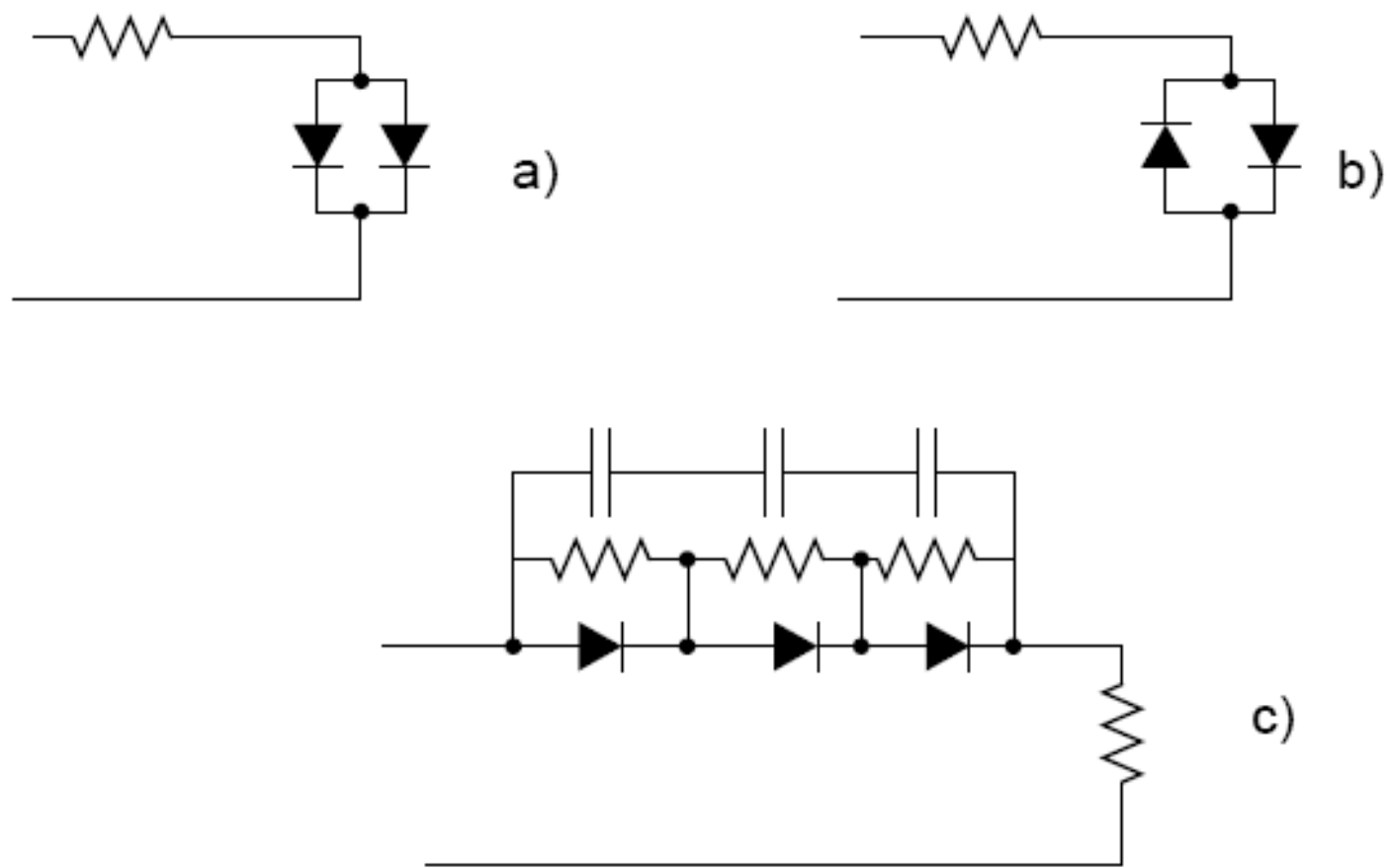


Figure 4.11: Circuiti con diodi

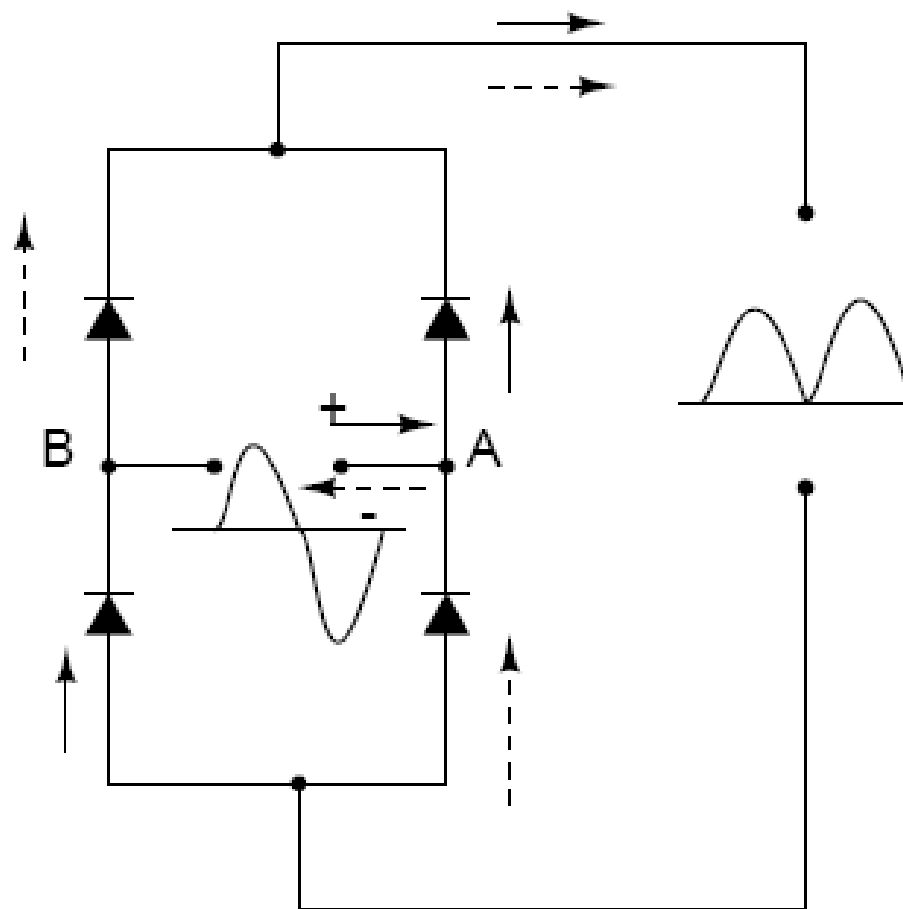


Figure 4.12: Ponte di diodi

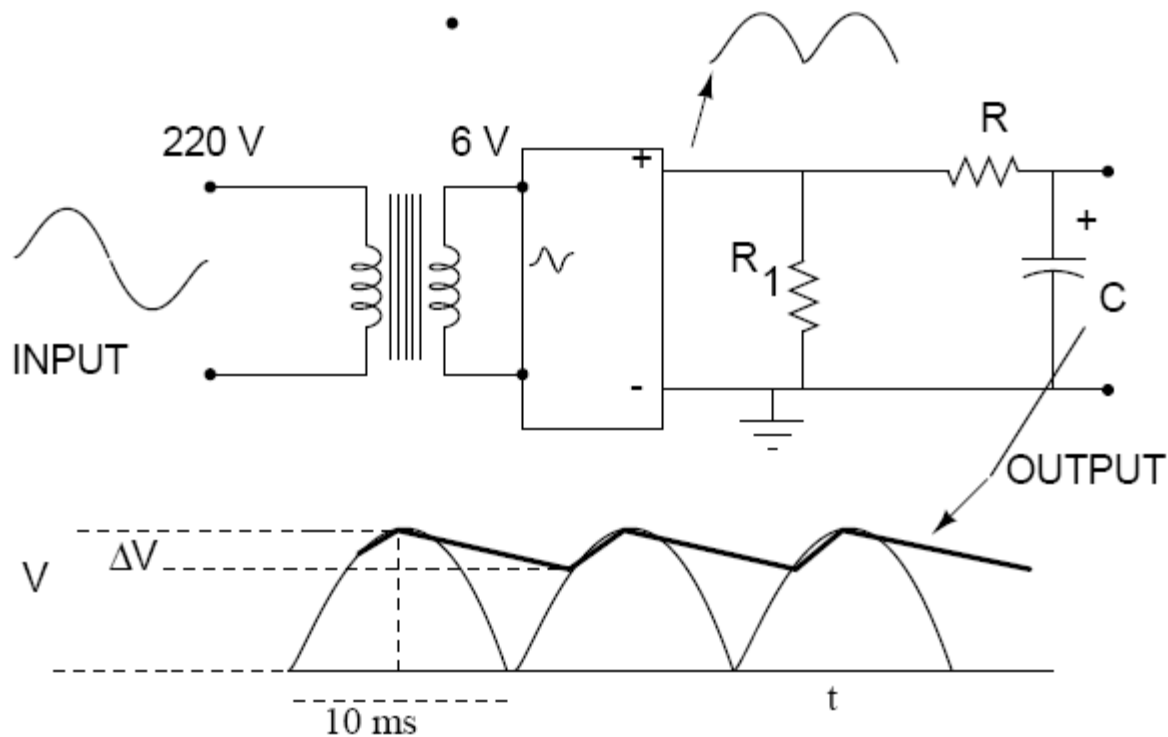


Figure 4.13: Alimentatore di tensione continua

$$\Delta V = V \left( 1 - \exp \left[ \frac{-\Delta t}{(R + R_1)C} \right] \right) \simeq \frac{V \Delta t}{(R + R_1)C} = I \Delta t / C$$

$$C = \frac{\Delta t}{R + R_1} \frac{1}{\Delta V / V} = 1000 \mu\text{F}$$

# Diodi e caos

$$x(k+1) = \lambda x(k) [1 - x(k)] ,$$

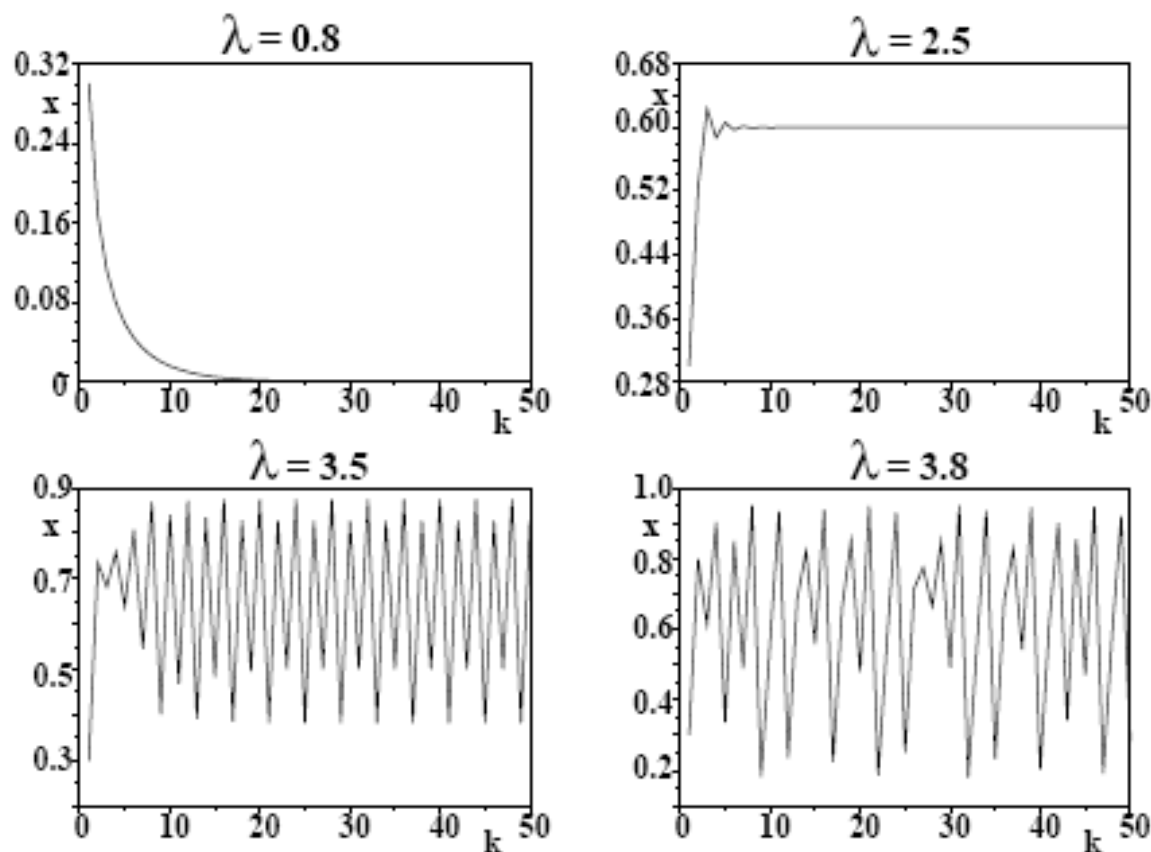


Figure 4.14: Valori assunti da  $x$  in base alla equazione logistica (4.12) partendo dal valore iniziale  $x = 0.3$  per differenti valori del parametro  $\lambda$ .

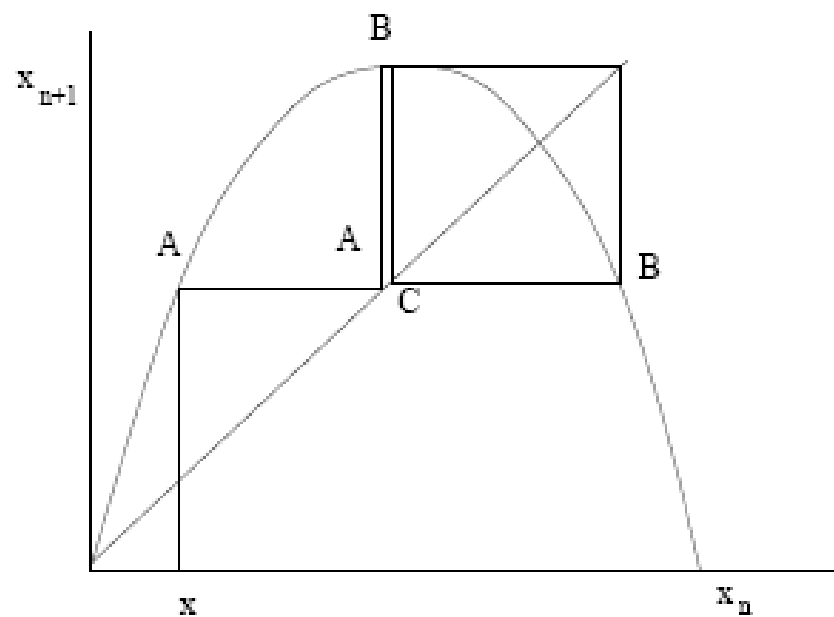


Figure 4.15: Iterazione grafica dell'applicazione logistica.

- per  $\lambda \leq 1$  il modello conduce sempre all'estinzione della popolazione;
- per  $1 < \lambda \leq 3$  il sistema raggiunge un livello stabile, che dipende da  $\lambda$  *ma non dalla condizione iniziale*  $x(0)$ ;
- per  $3 < \lambda \leq 3.56994\dots$  il sistema oscilla periodicamente tra alcuni valori fissi. Anche in questo caso gli stati raggiunti dal sistema non dipendono dalla condizione iniziale;
- per  $\lambda > 3.56994\dots$  il sistema è caotico: le fluttuazioni sembrano regolari, ma non sono né periodiche né sembrano del tutto casuali. Uno studio approfondito mostra anche che le fluttuazioni non sono nemmeno prevedibili con precisione, perché valori della condizione iniziale  $x(0)$  molto vicini *portano ad evoluzioni completamente diverse della popolazione*. Questo fenomeno, che si chiama *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali o effetto farfalla* è una delle caratteristiche principali del caos.

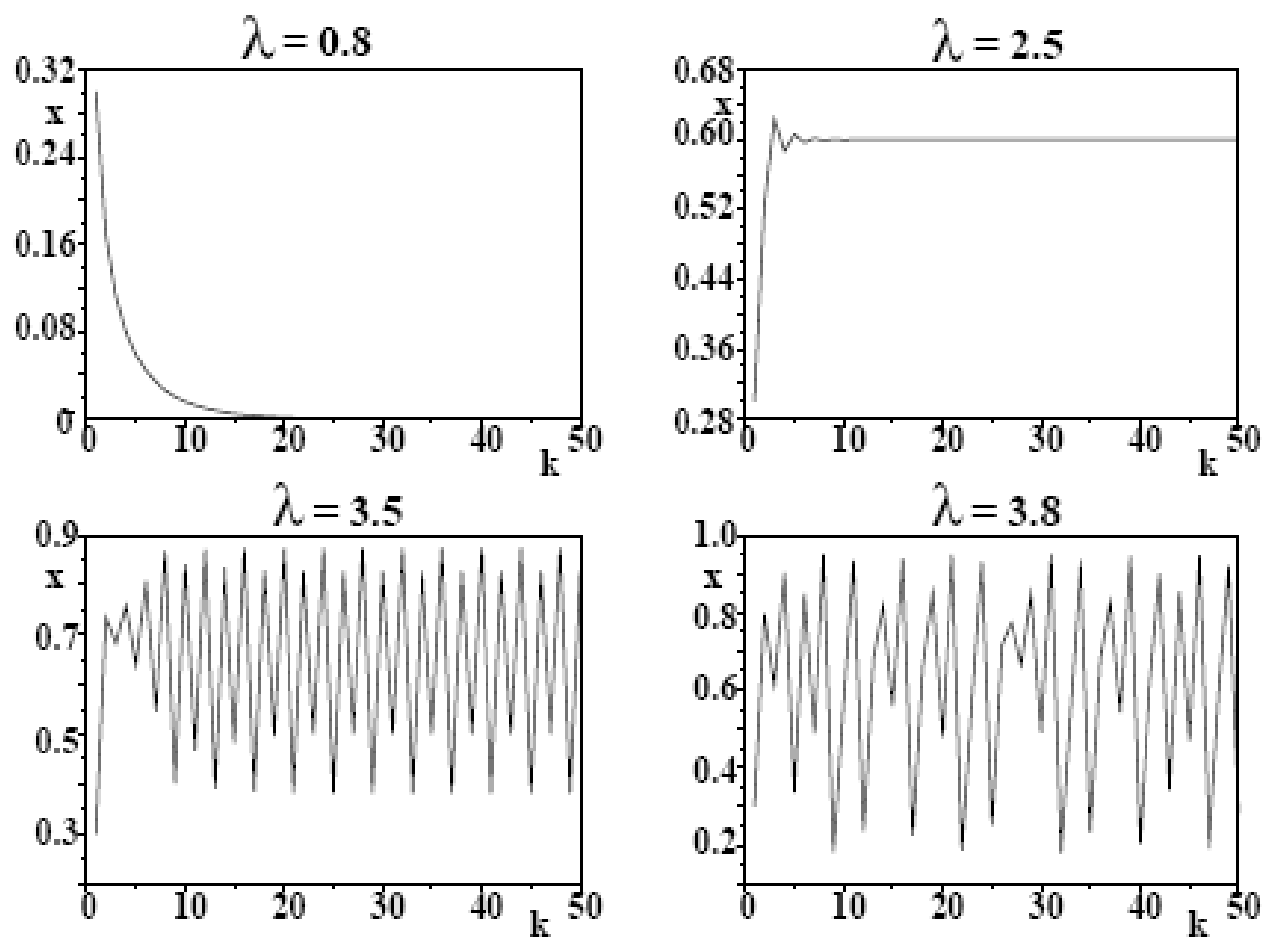


Figure 4.14: Valori assunti da  $x$  in base alla equazione logistica (4.12) partendo dal valore iniziale  $x = 0.3$  per differenti valori del parametro  $\lambda$ .



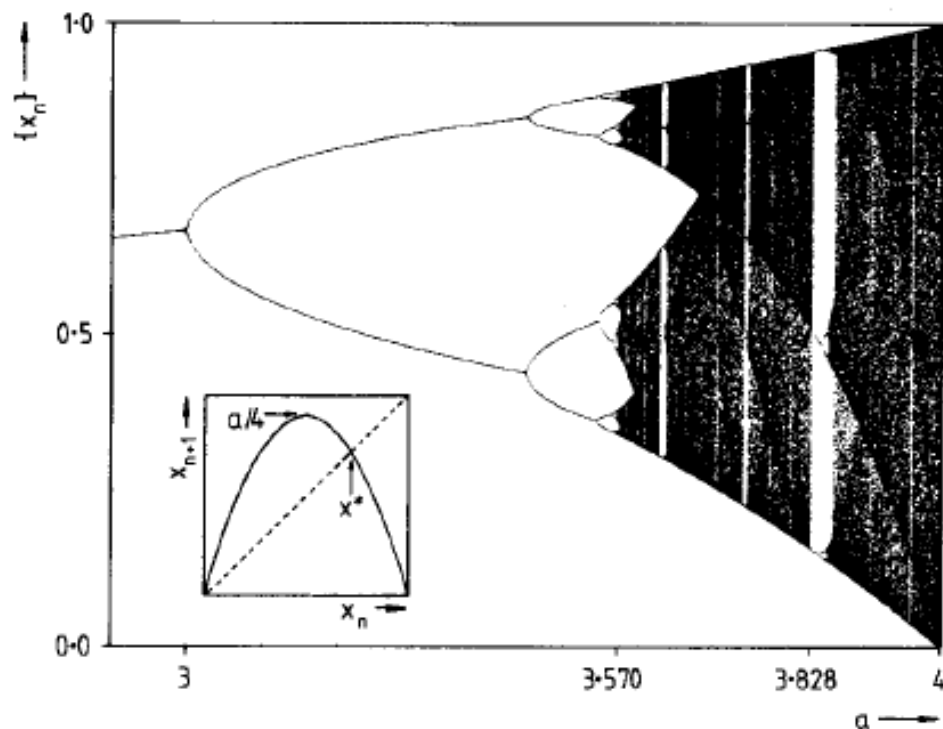


Fig. 3. One-dimensional quadratic mapping (inset), and bifurcation diagram produced when bifurcation parameter  $a$  is swept from 2.9 to 4.

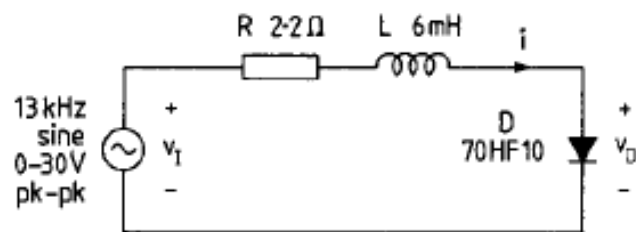
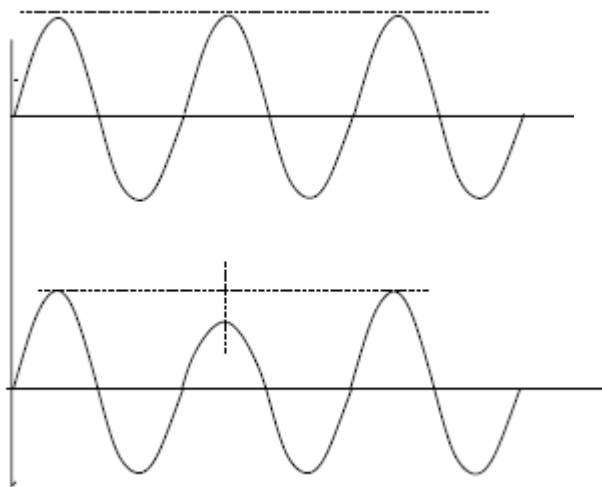


Fig. 4. Simple series  $R$ - $L$ - $D$  circuit that can produce subharmonics and chaos for certain drive frequencies and amplitudes.

# La strada verso il caos

- (a) la mappa deve essere non lineare;
- (b) il valore ad un istante (ciclo) deve dipendere dallo stato del sistema nel ciclo precedente (eq. (4.12));
- (c) prima del caos, devono avvenire raddoppiamenti di periodo, come quelli indicati in fig. 4.16.



$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \rightarrow 4.669201 \dots \equiv \delta ,$$

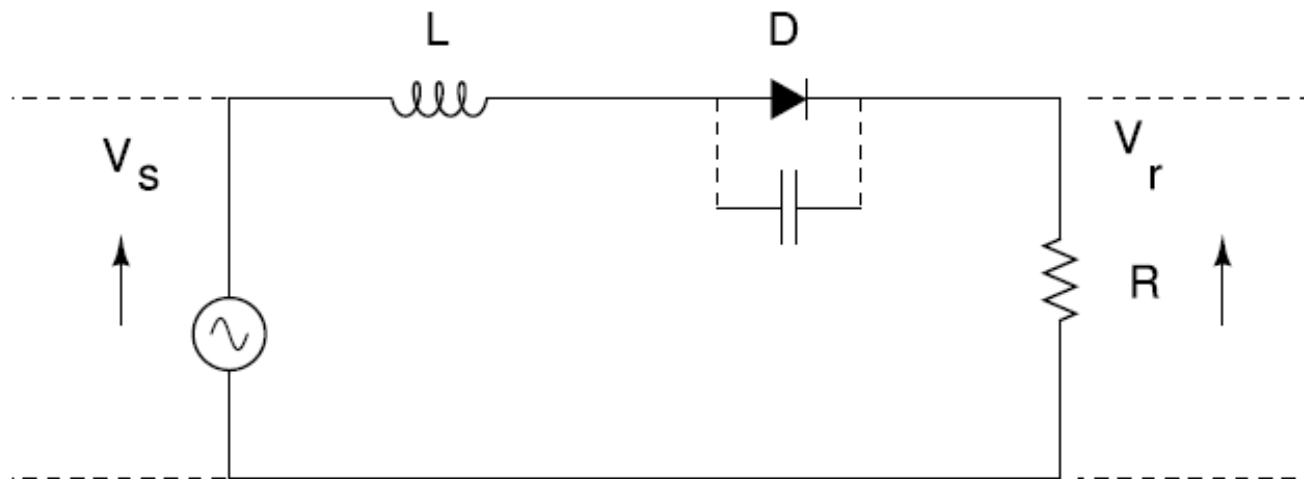


Figure 4.17: Circuito RLD con indicata la capacità intrinseca del diodo

Durante la conduzione, l'equazione del circuito risulta:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = v_s \sin \omega t + v_d, \quad (4.14)$$

dove  $v_s$  è la tensione del generatore e  $v_d$  quella ai capi del diodo. La soluzione di questa equazione si trova facilmente come:

$$I(t) = \frac{v_s}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \theta) + \frac{v_d}{R} + A \exp(-Rt/L), \quad \theta = \tan^{-1}(\omega L/R), \quad (4.15)$$

dove  $A$  è la costante di integrazione. Durante l'interdizione del diodo, l'equazione del circuito risulta invece:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = v_s \sin \omega t, \quad (4.16)$$

il circuito opera alla frequenza di risonanza, una certa quantità di corrente inversa fluisce anche in polarizzazione inversa, a causa dell'isteresi. Se il picco di corrente  $|I_m|$  è grande durante la fase di conduzione (intervallo  $a$  di fig.4.18), il diodo andrà in interdizione con un certo ritardo (intervallo  $b$  di fig.4.18) e la corrente continuerà a fluire per un certo tempo. Questa corrente, impedirà al diodo di condurre istantaneamente nella fase successiva di polarizzazione diretta; esso passerà in conduzione con un certo ritardo (intervallo  $c$  di fig.4.18). La corrente diretta, in questo nuovo ciclo, sarà così più piccola che nel ciclo precedente, creando una *correlazione tra i cicli* ed un *raddoppio del periodo*. Questi sono i fenomeni che danno origine al comportamento caoti

$$\tau_d = \tau_m [1 - \exp(-|I_m|/I_c)] ,$$

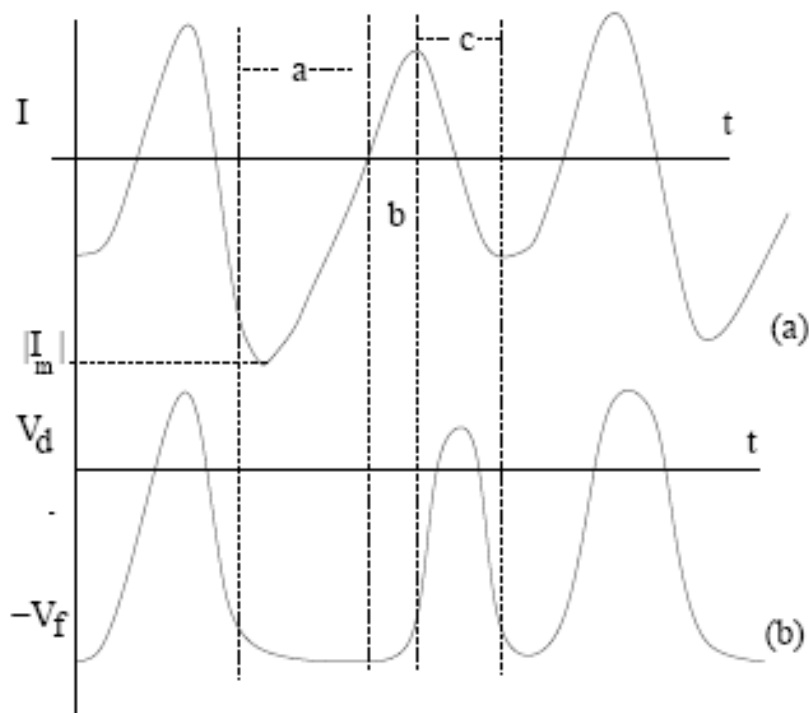
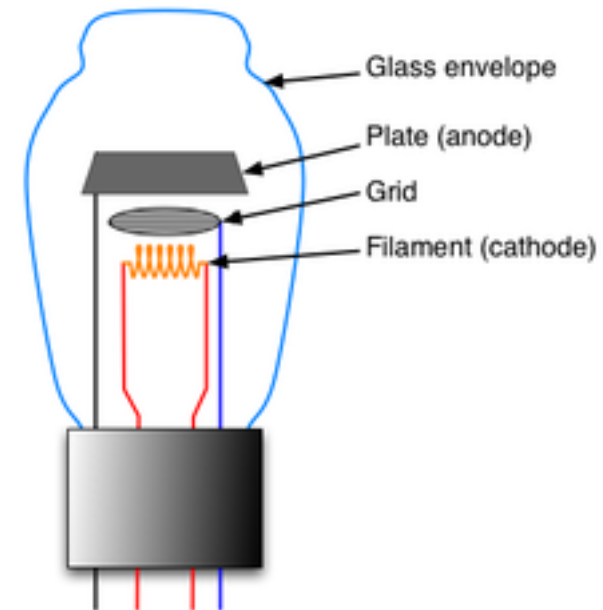


Figure 4.18: Fenomeno di isteresi del diodo. Il diodo conduce quando  $v_d \geq -v_f$

# Transistor a giunzione

# L'antenato: il triodo





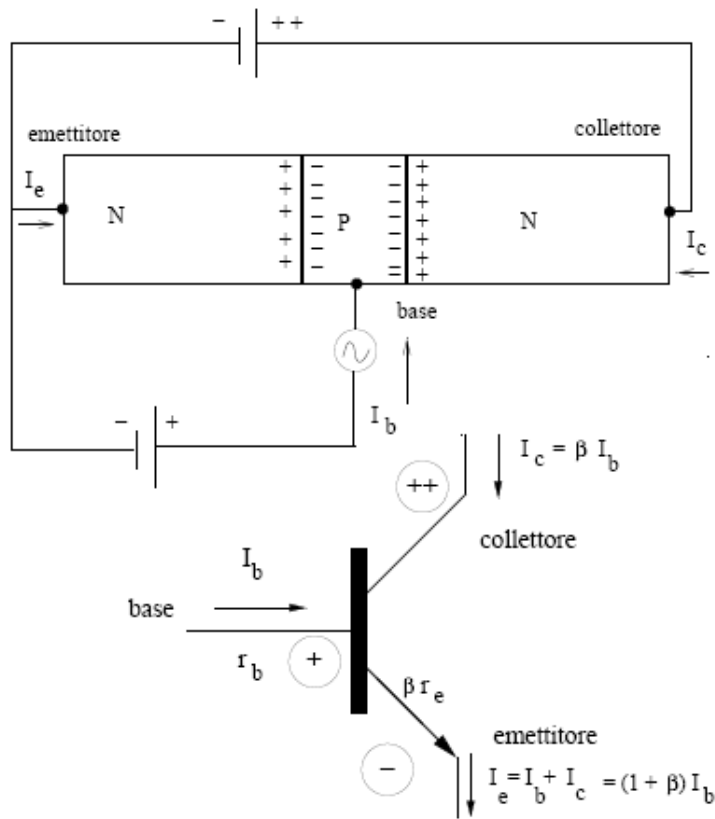


Figure 5.1: polarizzazione del transistor npn e definizione delle correnti

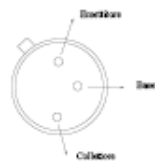
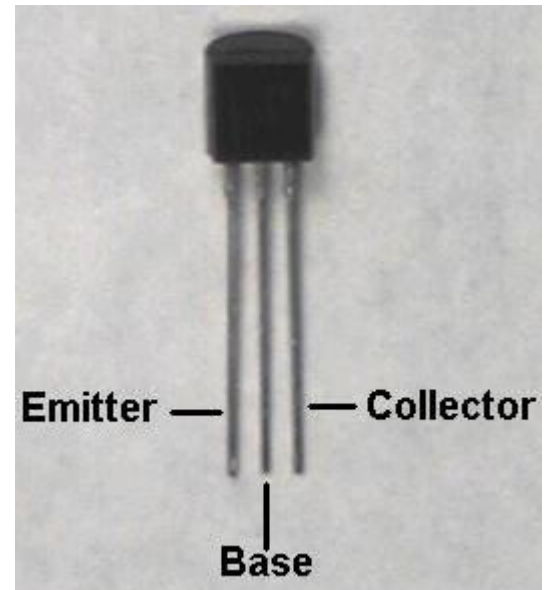
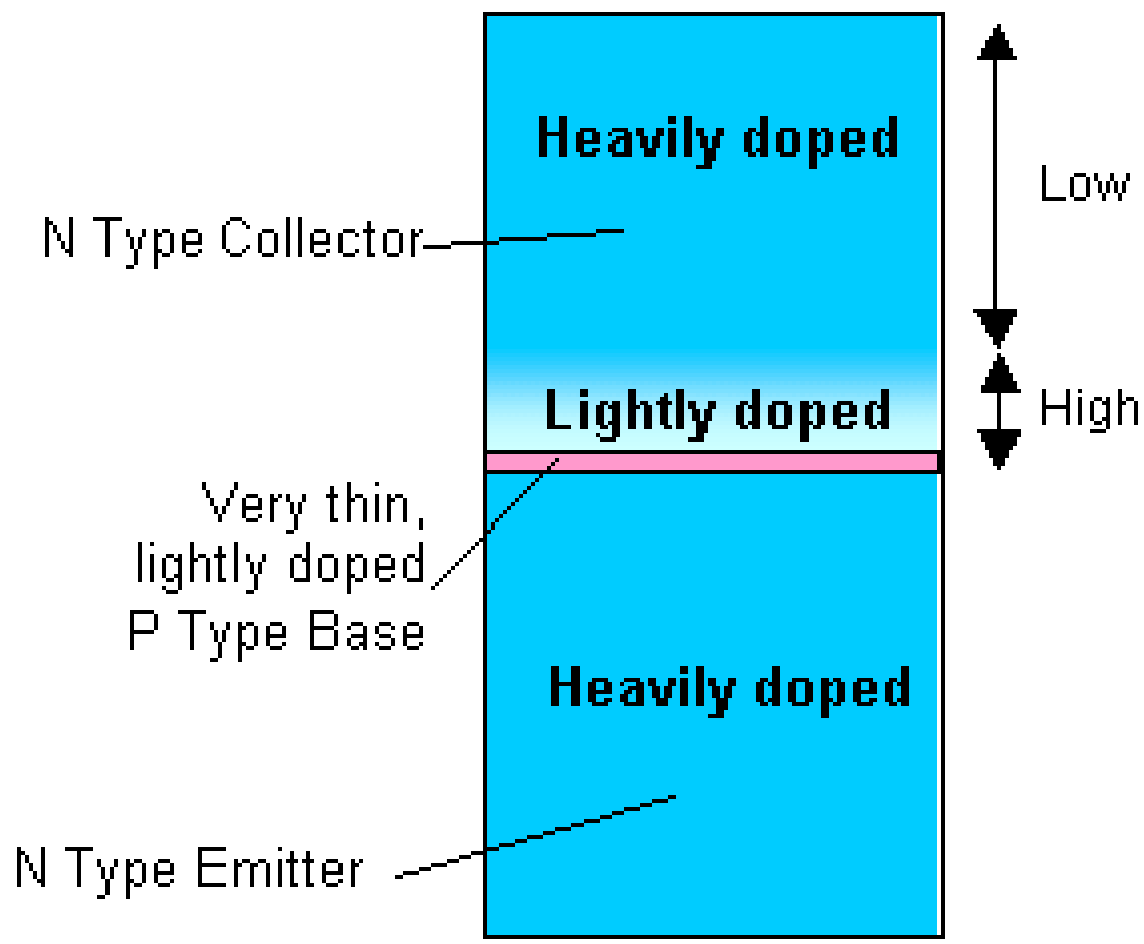


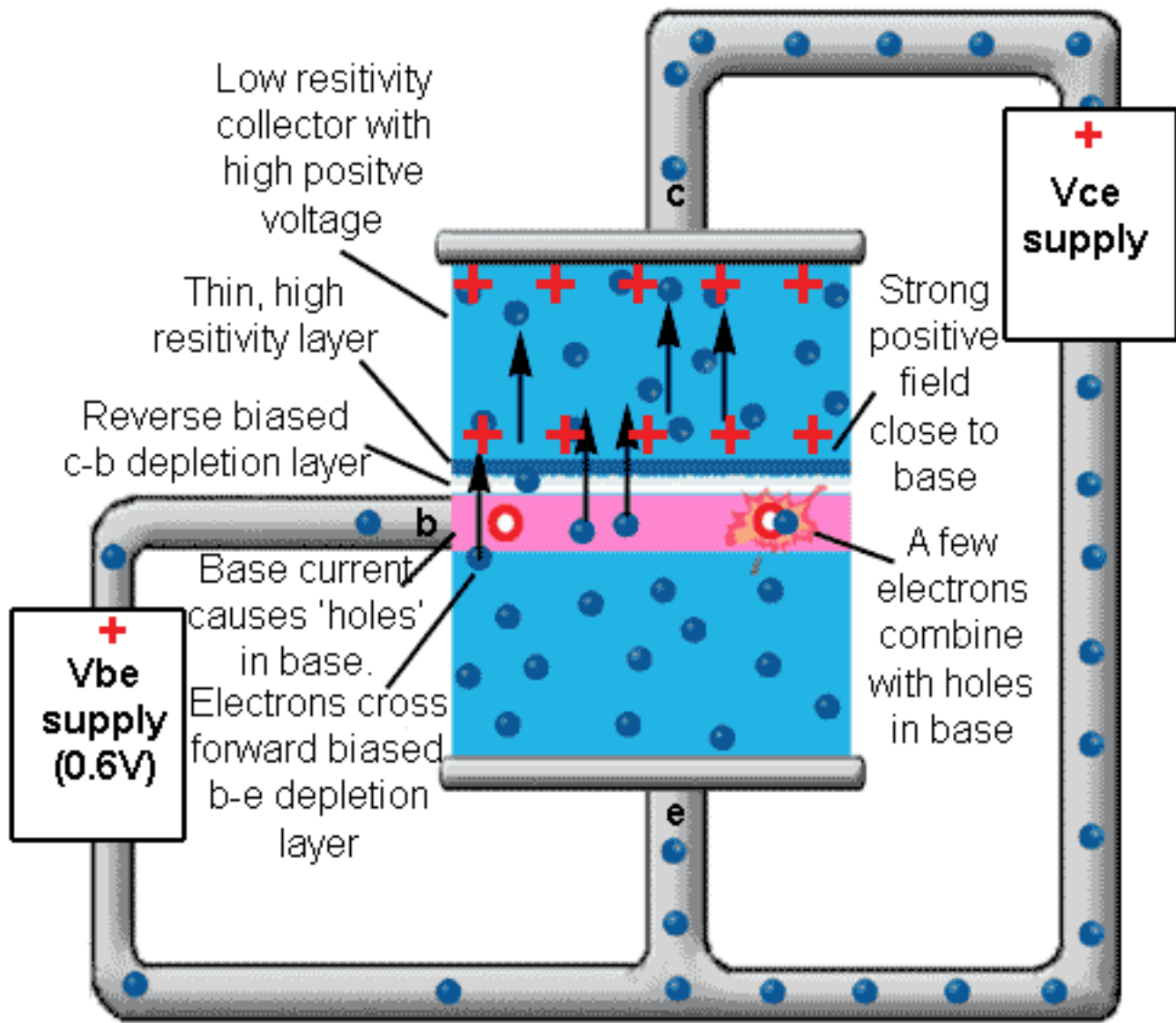
Figure 5.2: i tre poli del transistor



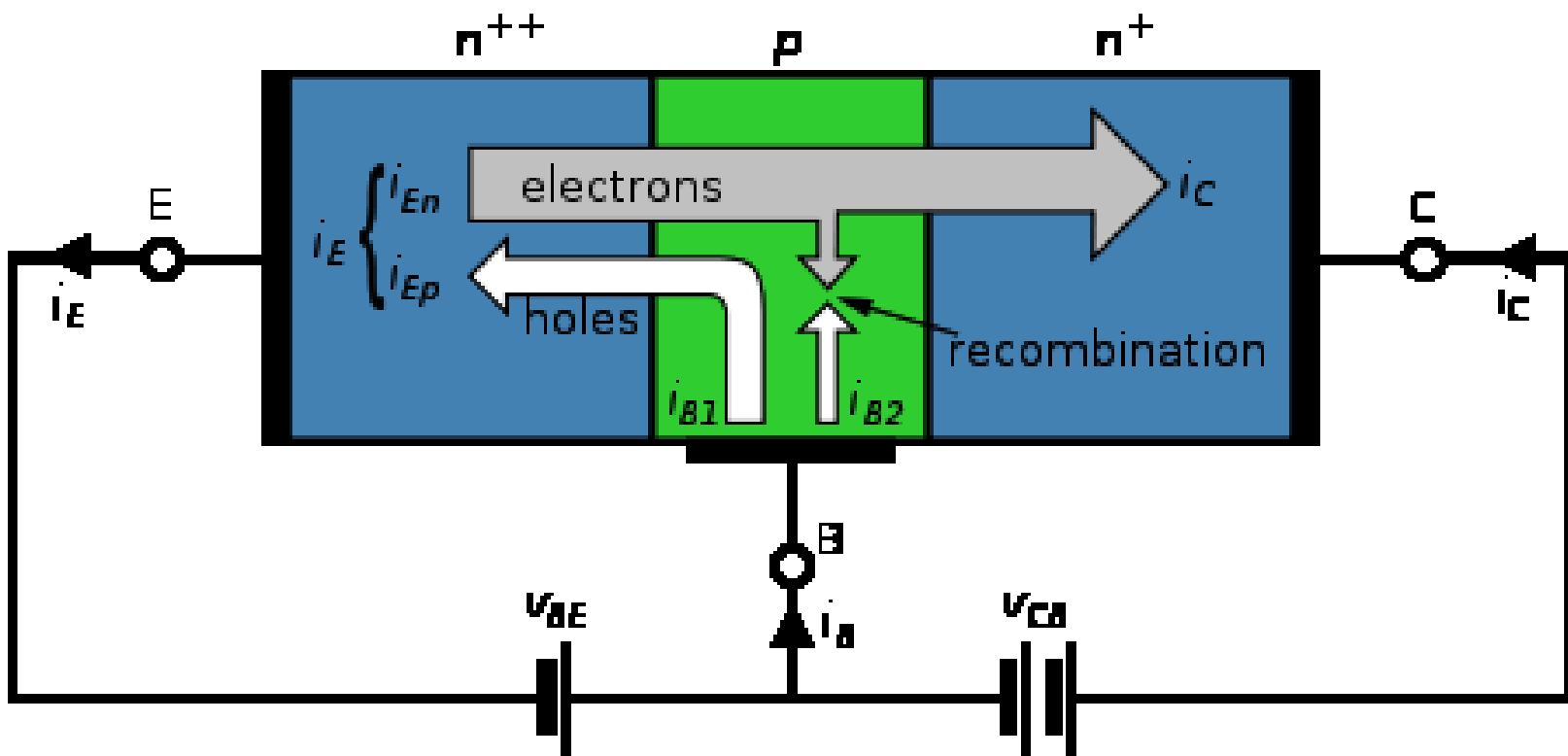
The operation of the transistor is very dependant on the degree of doping of the various parts of the semiconductor crystal. The N type emitter is very heavily doped to provide many free electrons as majority charge carriers. The lightly doped P type base region is extremely thin, and the N type collector is very heavily doped to give it a low resistivity apart from a layer of less heavily doped material near to the base region. This change in the resistivity of the collector close to the base, ensures that a large potential is present within the collector material close to the base. The importance of this will become apparent from the following description



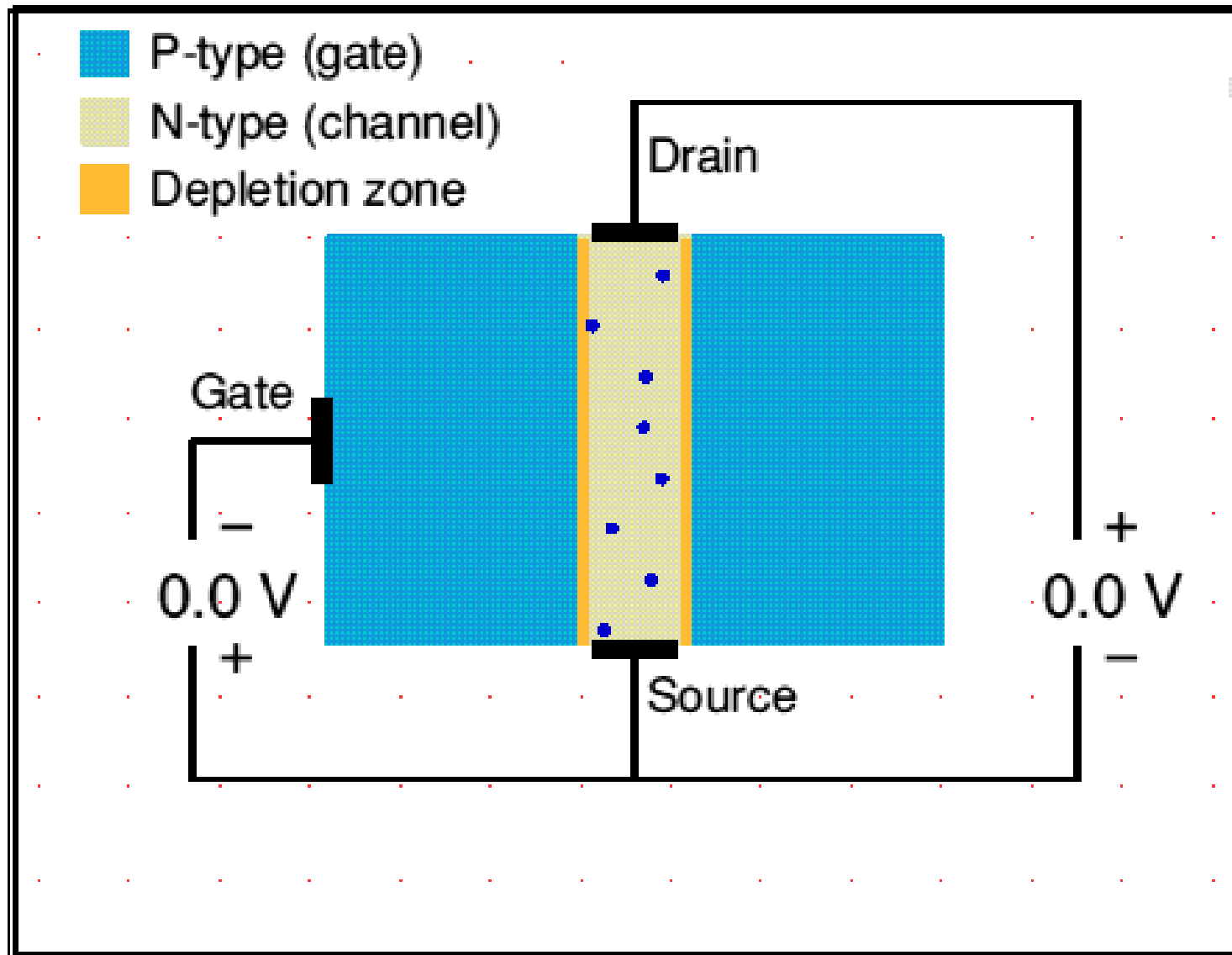
[http://www.learnabout-electronics.org/bipolar\\_junction\\_transistors\\_05.php](http://www.learnabout-electronics.org/bipolar_junction_transistors_05.php)

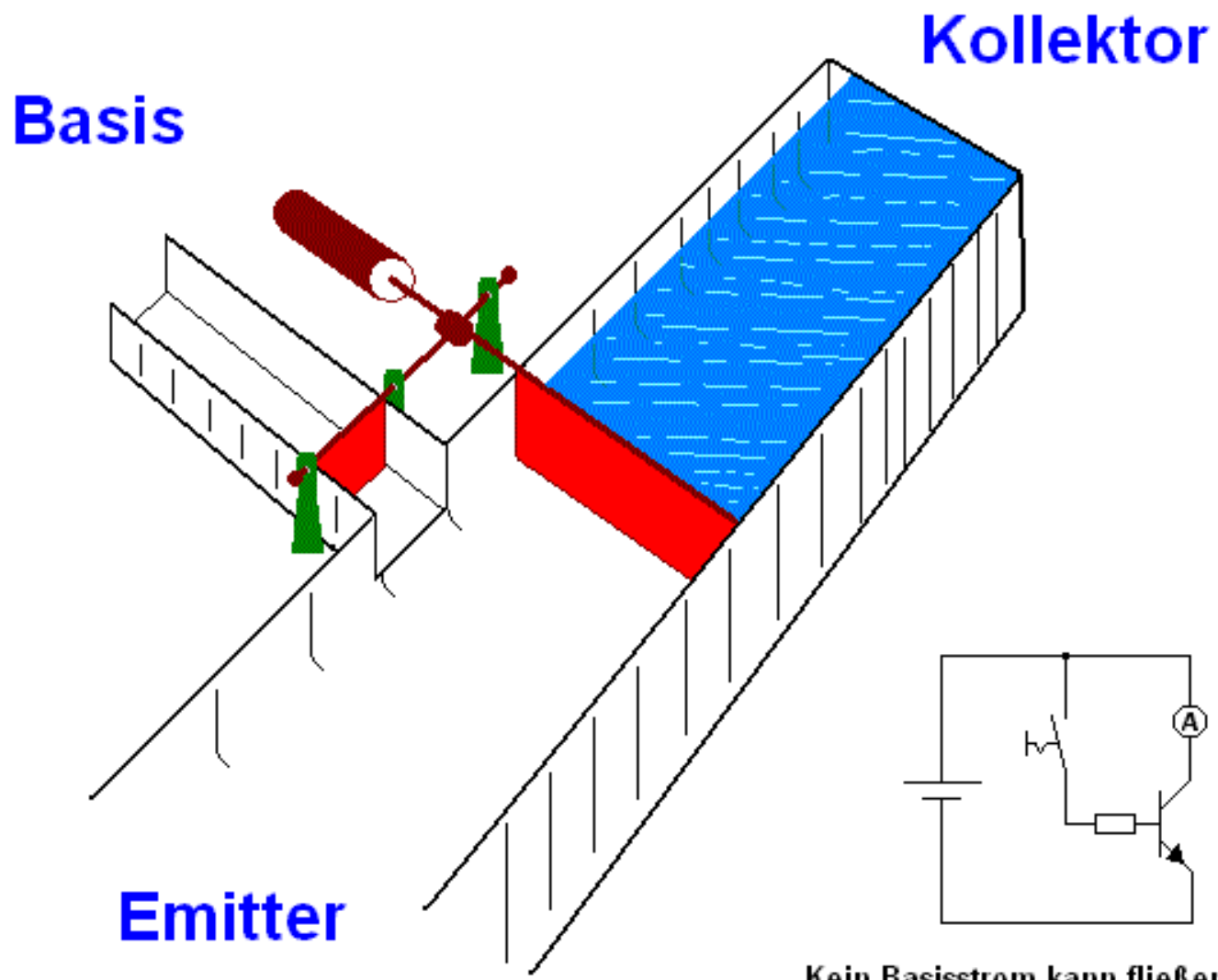


Few electrons flow in b-e circuit - Many flow in c-e circuit



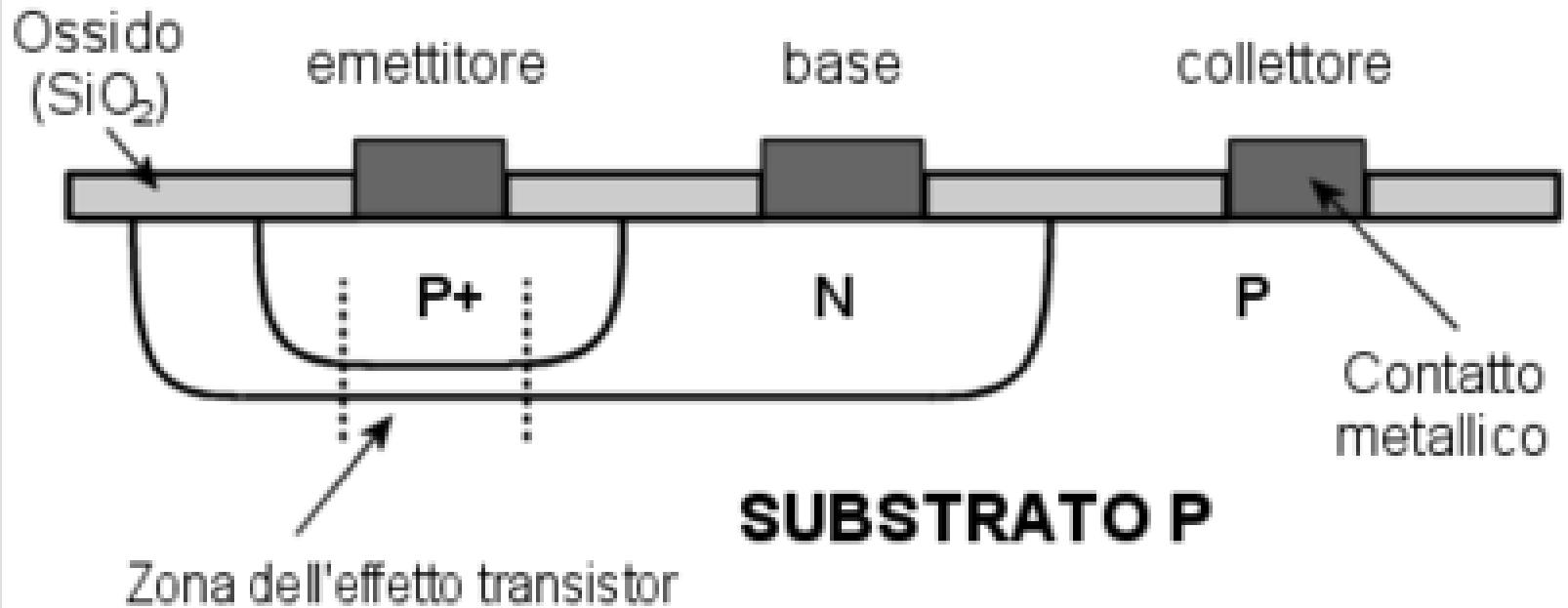
# Transistor FET





Kein Basisstrom kann fließen;  
Der Transistor ist gesperrt.

## Esempio di transistor bipolare PNP (struttura planare)



Considerando le correnti entranti nel transistor, dalla legge dei nodi si ha

$$I_e + I_c + I_b = 0 . \quad (5.1)$$

Approssimativamente, valgono le seguenti relazioni:

$$I_e \simeq -I_c \quad (5.2)$$

$$I_c \simeq \beta I_b , \quad I_e = -(I_c + I_b) = -(1 + \beta)I_b \quad (5.3)$$

Se le correnti sono espresse come quantità positive, nel seguito la (5.3) si scrive come in fig. 5.1:

$$I_e = I_c + I_b = (1 + \beta)I_b . \quad (5.4)$$

La costante  $\beta$  è dell'ordine del centinaio, e tiene conto dell'effetto di amplificazione di corrente. In particolare, per il transistor BC107 che useremo nelle esperienze,  $100 < \beta < 200$ .

Il rapporto tra le correnti di collettore ed emettitore è invece di poco minore di 1 e viene di solito indicato con  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{I_c}{I_e} = \frac{\beta I_b}{(1 + \beta)I_b} = \frac{\beta}{1 + \beta} . \quad (5.5)$$

Spesso questi due parametri fondamentali vengono chiamati rispettivamente “rapporto di trasferimento diretto (forward) in configurazione ad emettitore (emitter) comune” e “rapporto di trasferimento diretto (forward) in configurazione a base comune”

$$\beta \equiv h_{fe} , \quad \alpha \equiv h_{fb} . \quad (5.6)$$

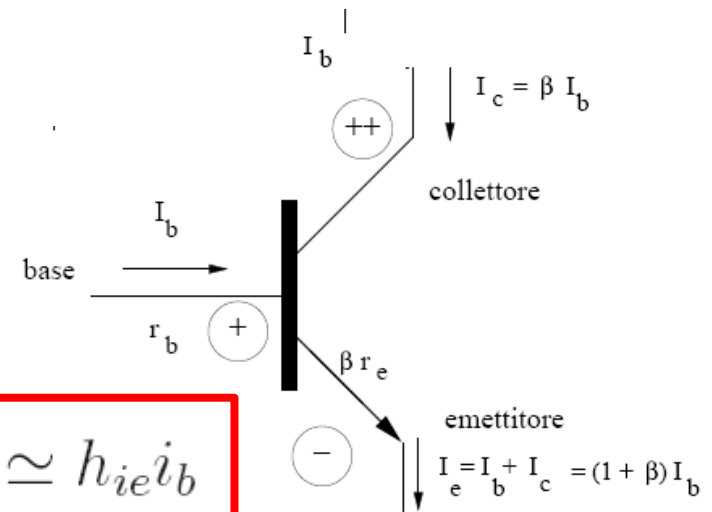


| nome     | nome     | formula                                  | significato                              |
|----------|----------|--|--|
|          | $I_e$    | $I_e = (1 + \beta)I_b$                   | corrente di emettitore                   |
| $\beta$  | $h_{fe}$ | $I_c \simeq \beta I_b$                   | guadagno di corrente                     |
| $\alpha$ | $h_{fb}$ | $h_{fb} = I_c/I_e = \beta/(1 + \beta)$   | coefficiente di trasferimento sulla base |
| $r_b$    | $h_{ie}$ | $h_{ie} = v_{be}/i_b = \beta 25/I_e(mA)$ | resistenza dinamica b-e vista dalla base |

Table 5.1: alcune quantità tipiche per la caratterizzazione del transistor

- amplificatore a emettitore comune: ingresso alla base e uscita di collettore.
- amplificatore a base comune: ingresso all'emettitore e uscita al collettore
- configurazione a collettore comune o inseguitore di emettitore (*emitter follower*): ingresso alla base e uscita di emettitore.

# Resistenza dinamica base emettitore



$$v_{be} \simeq h_{ie} i_b$$

$$r_b = \frac{v_{be}}{i_b} = \frac{r_e i_e}{i_b} = \frac{r_e (\beta + 1) i_b}{i_b} = (\beta + 1) r_e . \quad (5.7)$$

Quando tra base ed emettitore c'è la polarizzazione diretta, ponendo  $\beta + 1 \simeq \beta$  e dalla (4.6) risulta:

$$h_{ie} \equiv r_b \simeq \beta \frac{25}{i_e(\text{mA})} . \quad (5.8)$$

La tensione base-emettitore è quindi data dalla formula:

$$v_{be} \simeq h_{ie} i_b ,$$

# Polarizzazione I

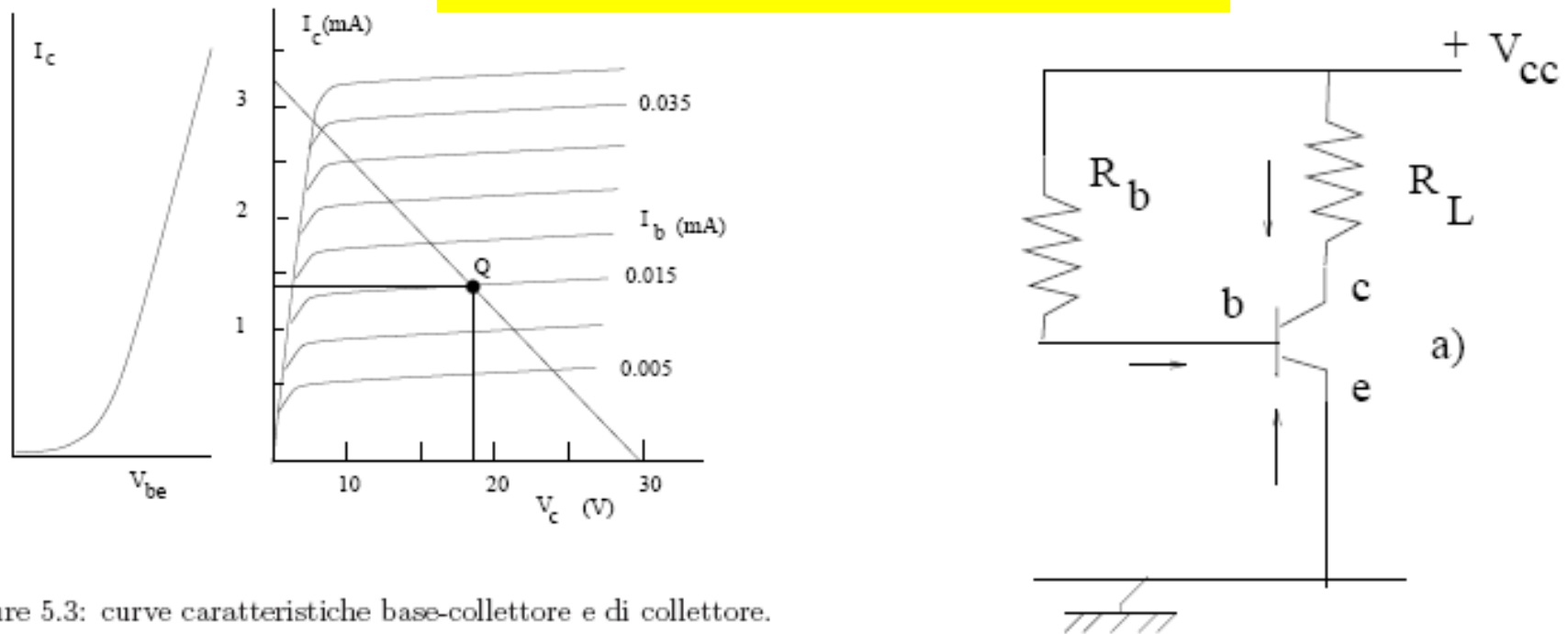


Figure 5.3: curve caratteristiche base-collettore e di collettore.

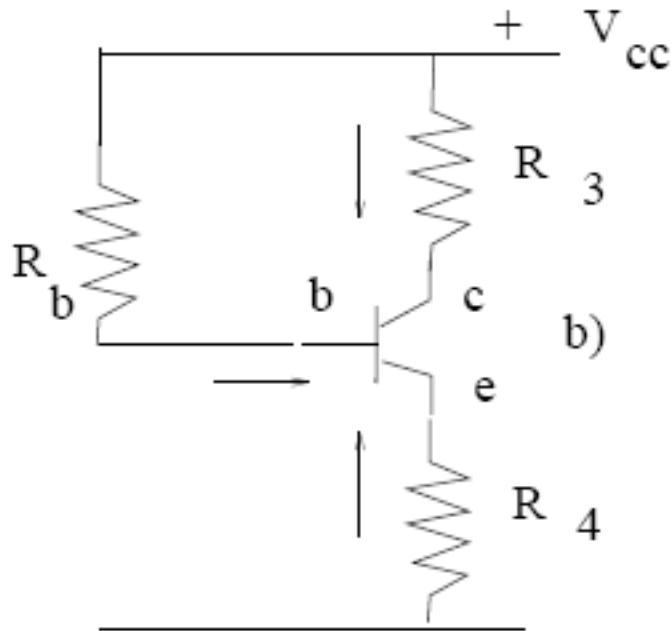
La retta di carico di collettore si ricava da fig. 5.4a):

$$V_{cc} = I_c R_L + V_c = I_c R_L + V_{ce} , \quad (5.10)$$

dove  $V_{cc}$  è la tensione continua esterna. Avendo scelto il punto di lavoro, la fig. 5.3 fornisce i valori di  $V_c \simeq 1.3V$ ,  $I_c \simeq 1.4mA$  e  $I_b = 0.015ma$ . Il valore di  $R_L$  vale pertanto:

$$R_L = \frac{V_{cc} - V_c}{I_c} . \quad (5.11)$$

# Polarizzazione II

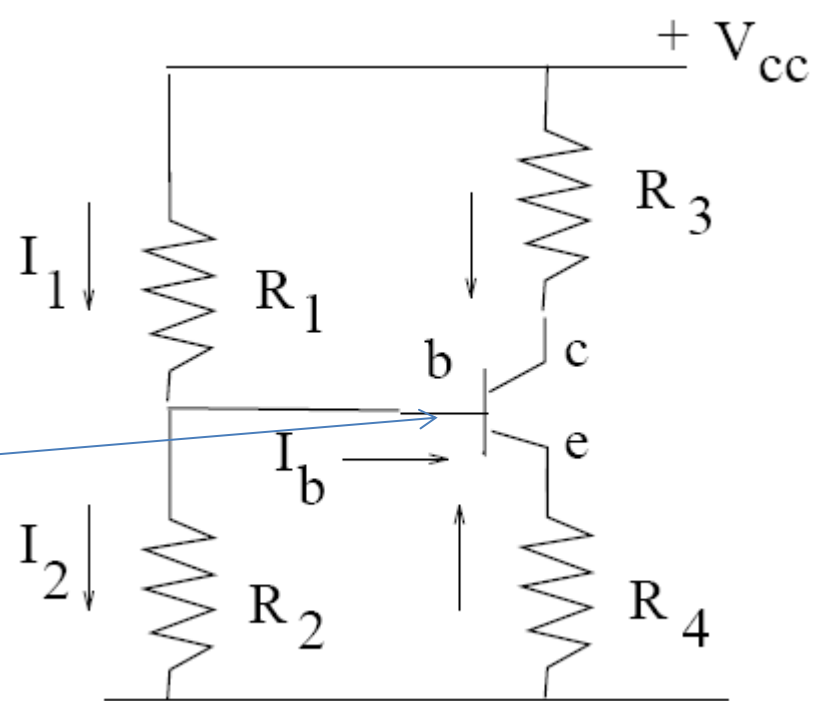


**stabilizzazione**

$$R_3 = 0.9 R_L , \quad R_4 = 0.1 R_L .$$

# Polarizzazione III

$$V_b = V_{be} + V_e \simeq 0.6 + V_e ,$$



$$R_1 I_1 = R_1 (I_b + I_2) = R_1 \left( I_b + \frac{V_b}{R_2} \right) = V_{cc} - V_b , \quad (5.13)$$

nella quale è tutto noto tranne  $R_1$ : infatti,  $I_b$  è data dal punto di lavoro scelto in fig. 5.3b),  $R_2$  è stato determinato avendo in mente la resistenza di ingresso che si desidera avere e  $V_b$  è dato dalla (5.12) dove, in base alla (5.4):

$$V_e = -I_e R_4 = (I_c + I_b) R_4 \quad (5.14)$$

e  $I_c$  è dato dalla (5.11):

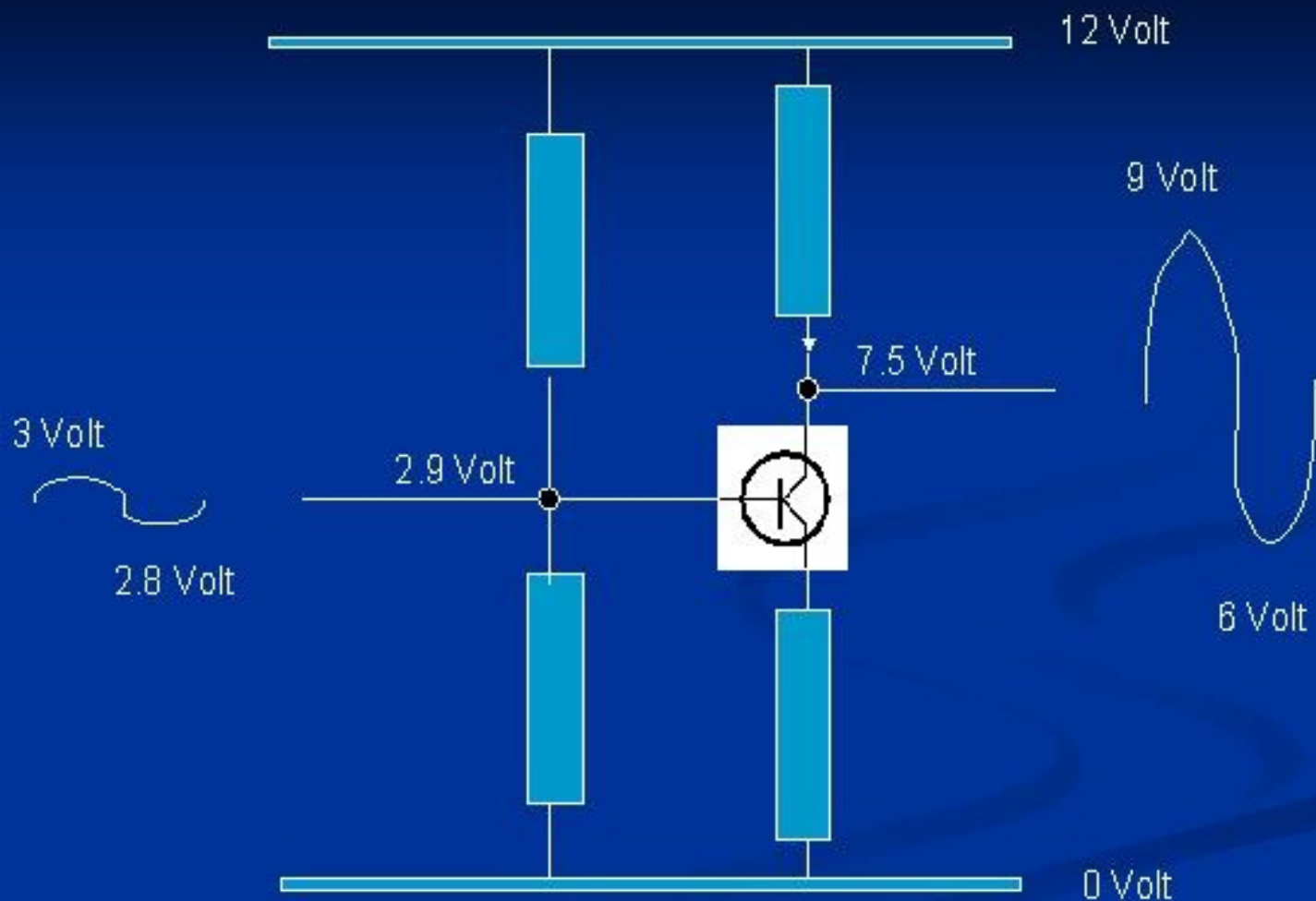
$$I_c = \frac{V_{cc} - V_e}{R_3} . \quad (5.15)$$

# Polarizzazione IV

## Metodo semplificato

- si determina la corrente  $I_c$  dalle curve caratteristiche di collettore e con la equazione della retta di carico (5.10) si trovano le resistenze  $R_3$  ed  $R_4 = 0.1R_3$ ;
- noto  $I_c$  è noto anche  $I_e$  e quindi anche il potenziale di emettitore  $V_e = I_e R_4$ ;
- si trova il potenziale di base come  $V_b = V_e + 0.6V$ ;
- si scelgono  $R_1$  ed  $R_2$  in modo che

$$V_{cc} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = V_b \quad (5.16)$$



Nu kun je wisselspanning aansluiten en aan de uitgang de versterkte wisselspanning zien.

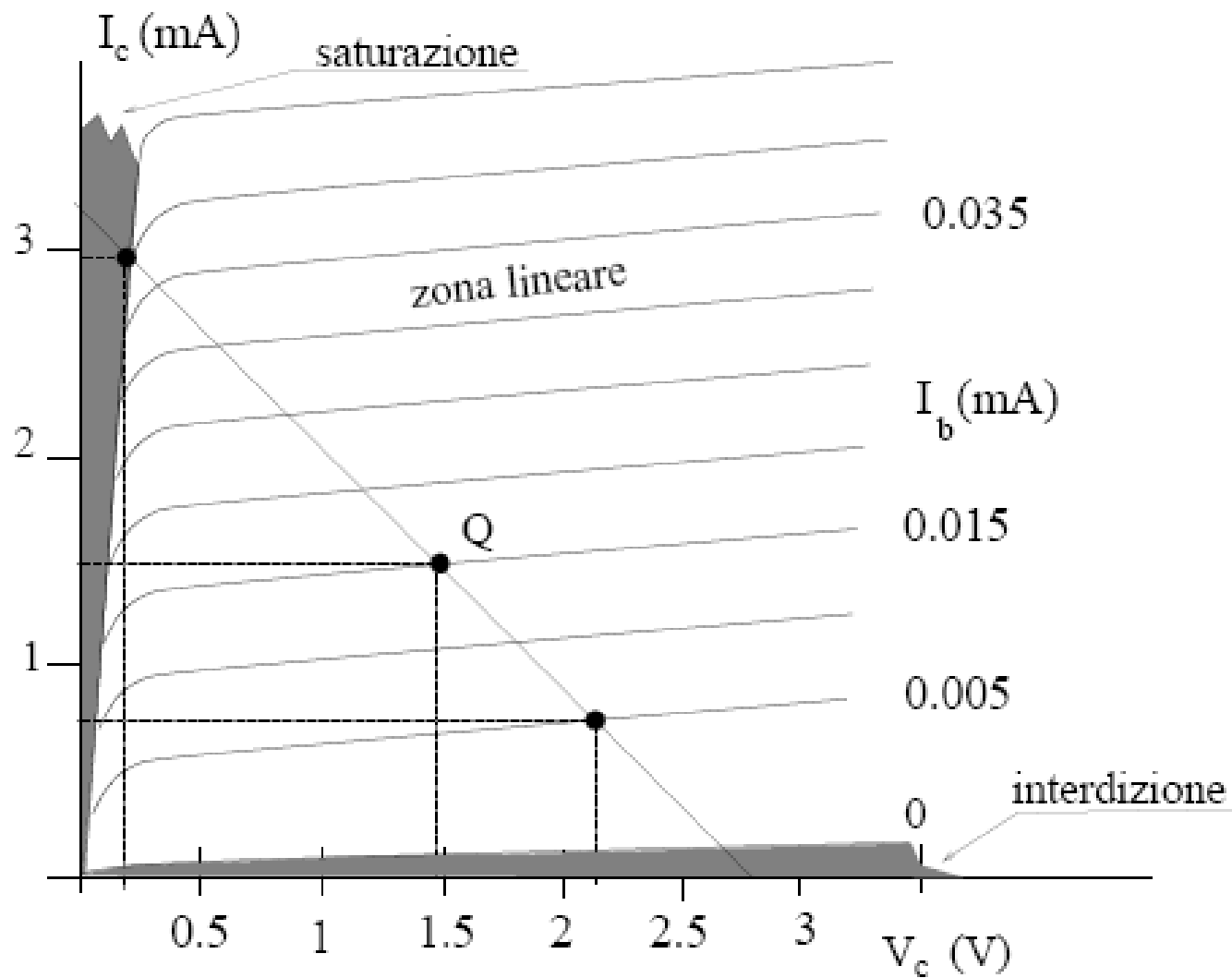


Figure 5.5: Interdizione e saturazione.



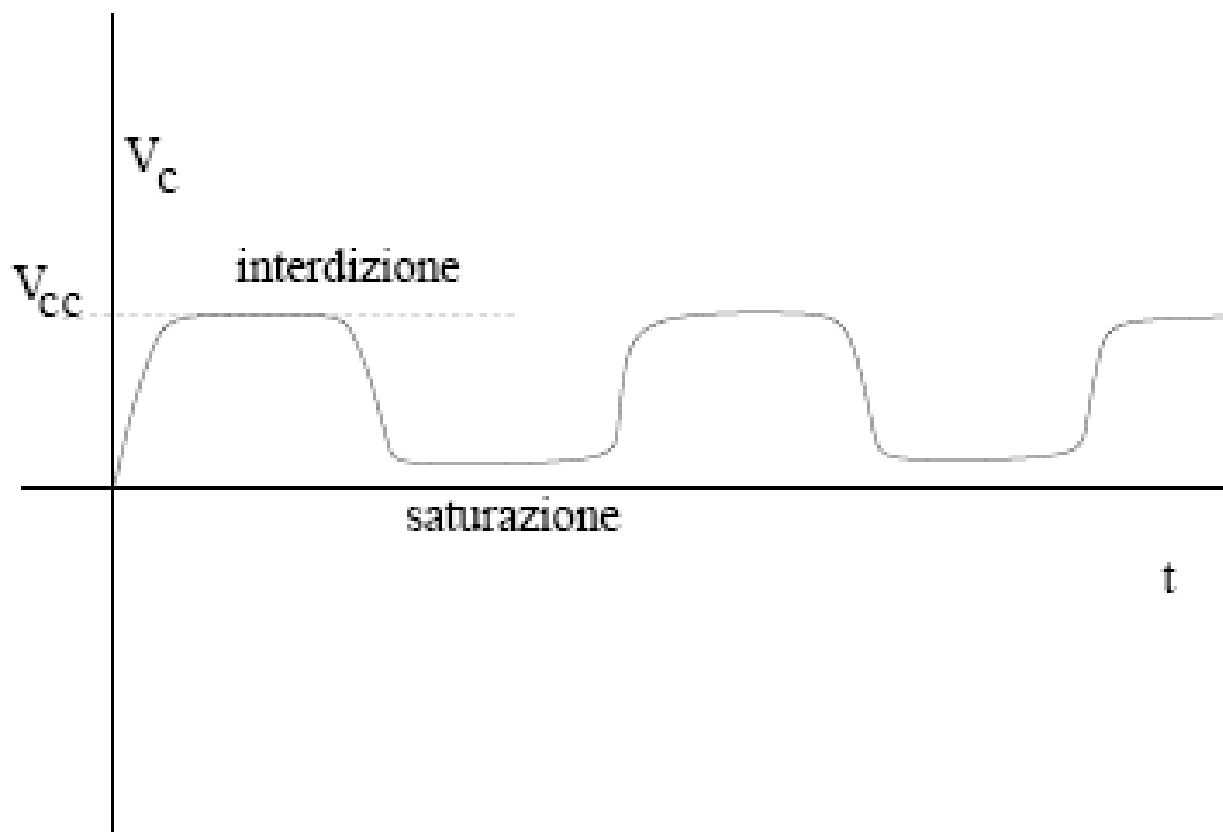
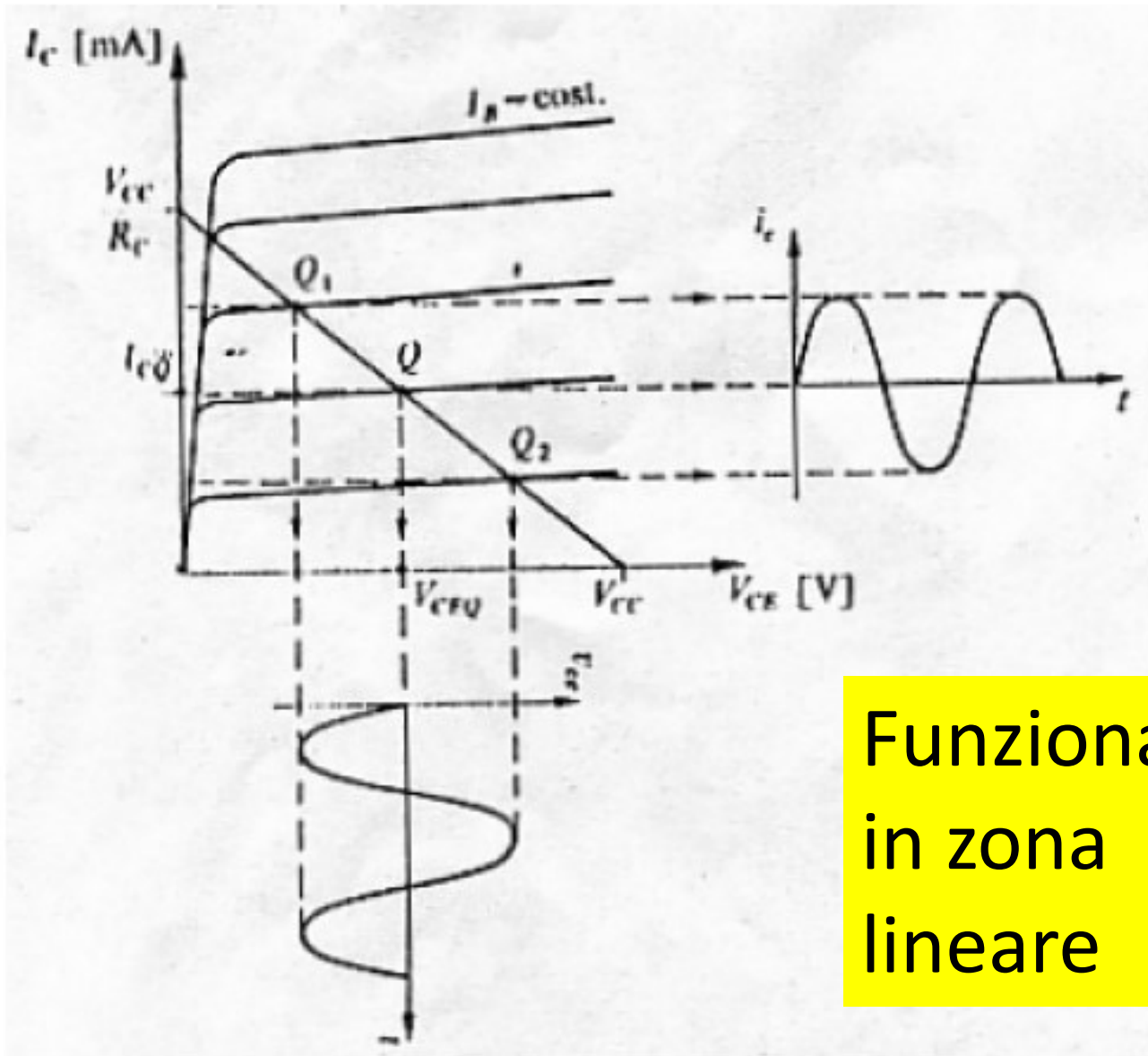
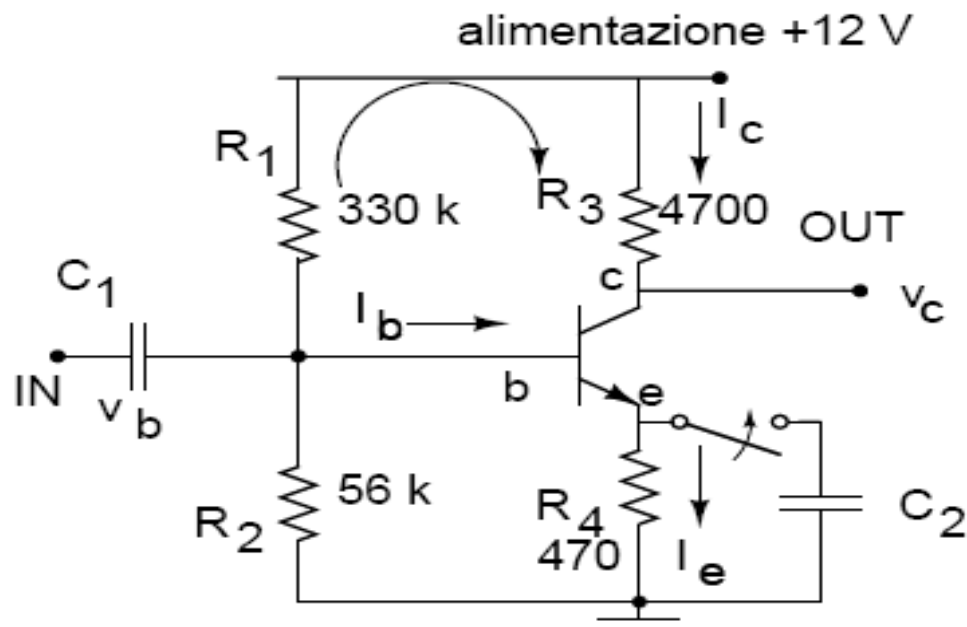


Figure 5.6: Uscita di uno switch

$$(6.1) \quad v_{CE} = V_{CC} - R_C i_C$$



Funzionamento  
in zona  
lineare



La corrente di emettitore è la stessa che scorre in  $R_4$ , ovvero:

$$I_e = + \frac{V_e}{R_4} = + \frac{V_b - 600mV + v_b}{R_4} . \quad (5.17)$$

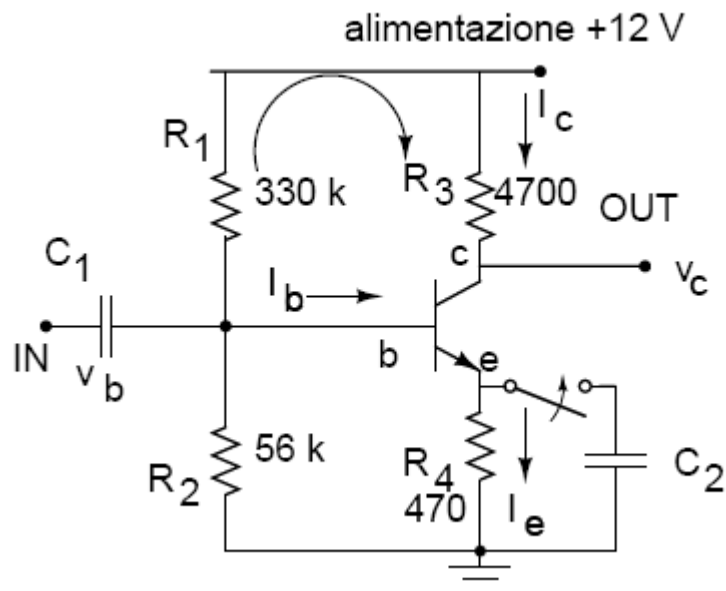
Il potenziale di collettore rispetto a massa  $V_c$  vale:

$$V_c = V_{cc} - I_c R_3 = 12 V - I_c R_3 \quad (5.18)$$

dove  $V_{cc} = 12 V$  è il potenziale di alimentazione.

La parte variabile del potenziale, cioè il segnale, è presente attraverso la corrente di collettore. Pertanto, omettendo la parte continua nella (5.18) si ha:

$$v_c = -i_c R_3 = -\beta i_b R_3 . \quad (5.19)$$



ha:

$$v_c = -i_c R_3 = -\beta i_b R_3 . \quad (5.19)$$

Il segnale sulla base è la somma della caduta di tensione base-emettitore e di quella sulla resistenza di emettitore:

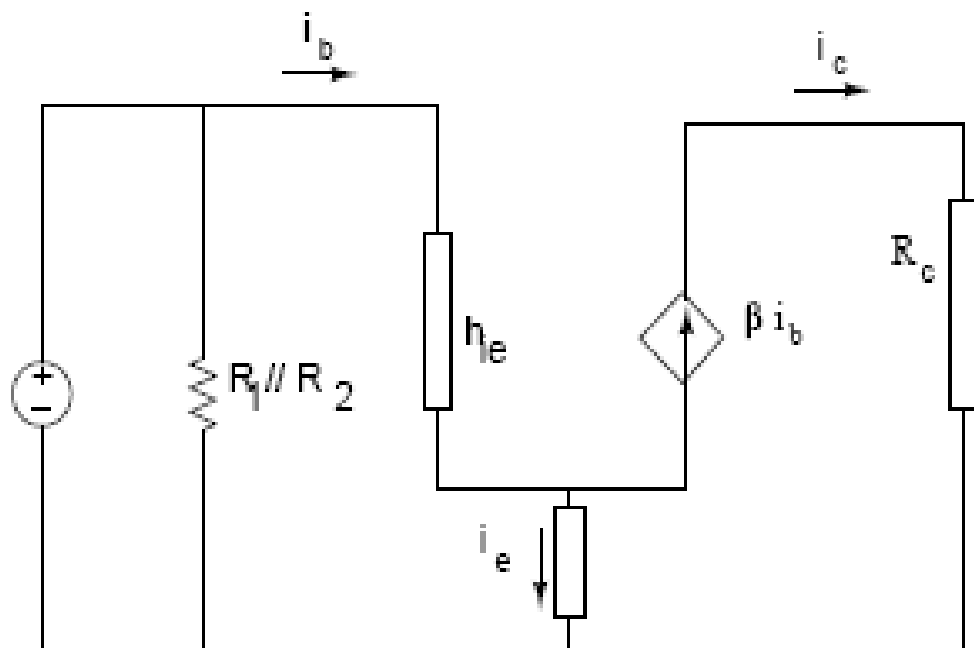
$$v_b = i_b h_{ie} + i_e R_4 . \quad (5.20)$$

Dalle (5.4) e (5.8) il guadagno è dato da:

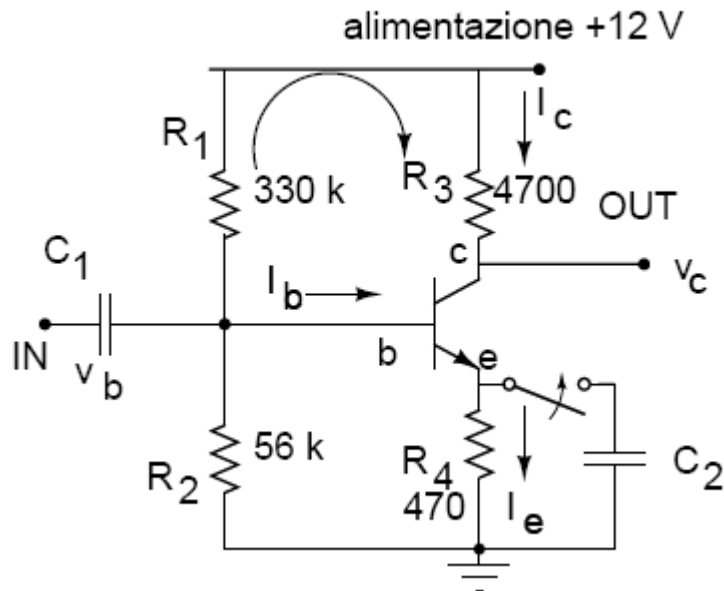
$$\frac{v_c}{v_b} = -\frac{\beta R_3}{h_{ie} + (1 + \beta) R_4} \simeq -\frac{R_3}{R_4} . \quad (5.21)$$

L'ultima relazione vale perchè dalla (5.8)  $h_{ie}/\beta \simeq 12 \Omega \ll R_4$ , dato che nel nostro caso  $I_c \simeq 2 \text{ mA}$ . Nel caso del circuito di fig. 5.7 il guadagno dell'amplificatore è dunque:

$$G = \frac{v_c}{v_b} \simeq -\frac{R_3}{R_4} = -10 . \quad (5.22)$$



$$h_{ie} = \frac{v_{be}}{i_b} \simeq \beta \frac{25}{i_e(\text{mA})} .$$



$$|Z_e| = \left| \frac{-R \frac{i}{\omega C_2}}{R - \frac{i}{\omega C_2}} \right| = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C_2^2}} \quad (5.23)$$

Con opportuni valori di  $C_2$ , è possibile rendere trascurabile  $Z_e$ . Analogamente alla (5.21) il guadagno diventa allora

$$\frac{v_c}{v_b} = -\frac{\beta R_3}{h_{ie} + (1 + \beta)Z_e} \simeq -\frac{\beta R_3}{h_{ie}} = \frac{R_3}{25/i_c(\text{mA})} \simeq 400 \quad (5.24)$$

# Impedenza di ingresso

$$r_b = \frac{v_b}{i_b} = \frac{v_{be} + (1 + \beta)i_b Z_e}{i_b} \simeq \beta Z_e + h_{ie} ,$$

$$r_i \simeq \begin{cases} r_b \parallel (R_1 \parallel R_2) \simeq (R_1 \parallel R_2) & = 48 \text{ k}\Omega \text{ senza condensatore di fuga} \\ h_{ie} \parallel (R_1 \parallel R_2) \simeq h_{ie} & \simeq 2500 \Omega \text{ con condensatore di fuga} \end{cases} \quad (5.27)$$

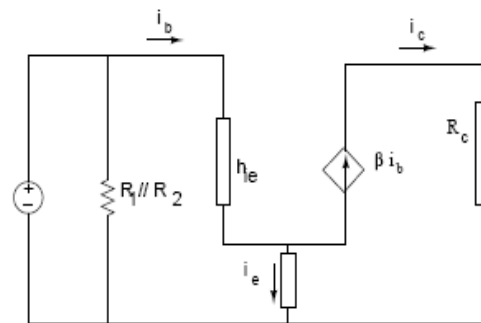
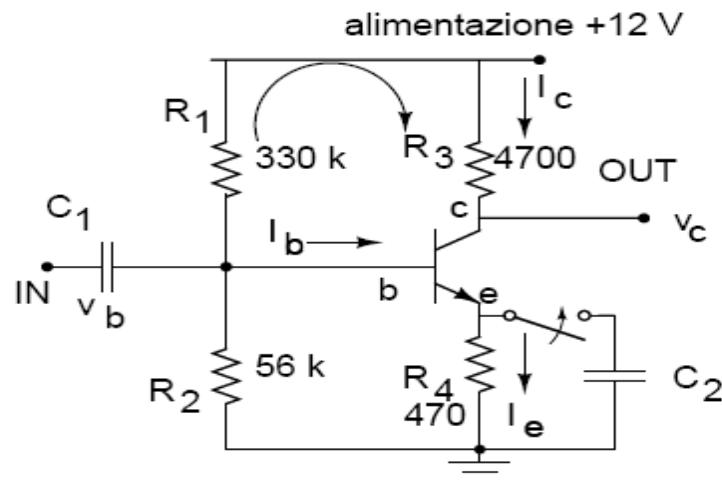
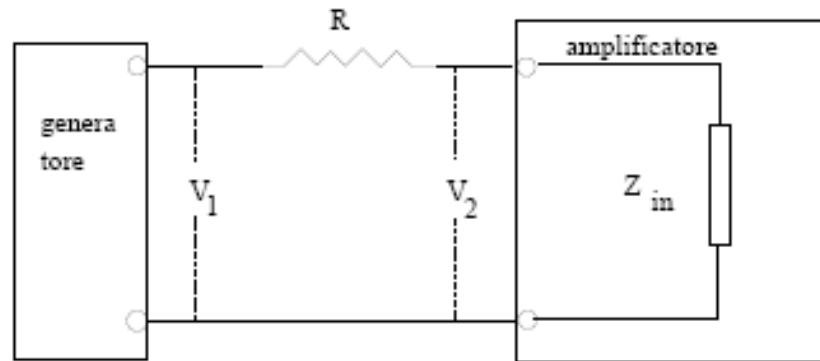


Figure 5.7: amplificatore ad emettitore comune

# Misure di impedenza di ingresso



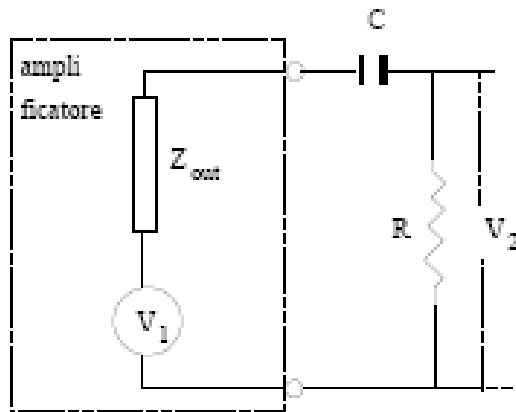
$$|V_2| = \frac{|V_1| |Z_{in}|}{|R + Z_{in}|}$$

e quindi, se  $|Z_{in}| \equiv Z_{in}$  è prevalentemente resistiva:

$$Z_{in} = \frac{R}{v_1/v_2 - 1} .$$



# Misure di impedenza di uscita



$$v_2 = \frac{v_1 R}{|R + Z_{out}|}$$

e quindi, supponendo  $|Z_{out}| \simeq Z_{out}$  solo resistiva:

$$Z_{out} = \left( \frac{v_1}{v_2} - 1 \right) R .$$

# Emitter follower (collettore comune)

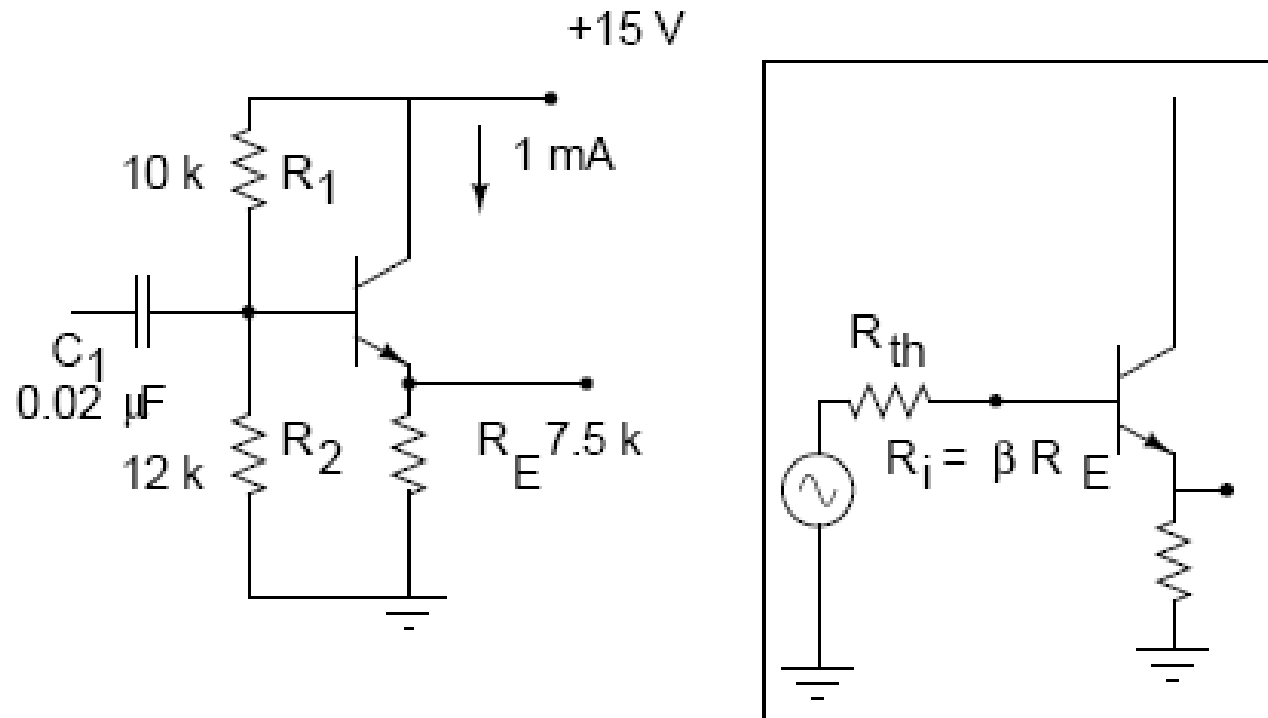
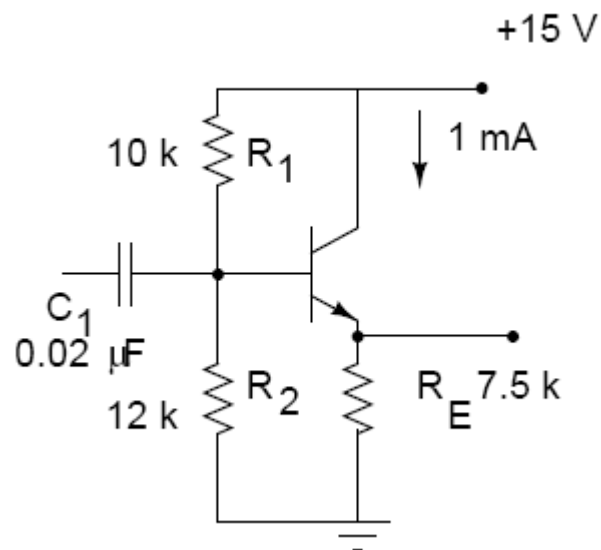


Figure 5.11: Emitter follower.



sulla base:

$$v_b = i_b h_{ie} + i_e R_E = i_b h_{ie} + (1 + \beta) i_b R_E$$

e il segnale presente in uscita sull'emettitore:

$$v_e = i_e R_E = (1 + \beta) i_b R_E .$$

Il rapporto vale:

$$G = \frac{v_e}{v_b} = \frac{(1 + \beta) R_E}{h_{ie} + (1 + \beta) R_E} = \frac{1}{1 + \frac{h_{ie}}{(1 + \beta) R_E}} \simeq 1 ,$$

dato che dalla (5.8)  $h_{ie}/[(1 + \beta) R_E] \simeq r_e/R_E \simeq 0.002$ .

# Emitter follower (collettore comune)

$$\frac{v_b}{i_b} \equiv R_i = \frac{v_{be} + i_e R_E}{i_b} \simeq h_{ie} + \beta R_E . \quad (5.35)$$

Con i valori scelti  $R_i \simeq h_{ie} + \beta R_E \simeq \beta R_E \simeq 800 \text{ k}\Omega$ . L'impedenza effettiva è però data dal parallelo  $R_1 // R_2 // R_i \simeq 5.5 \text{ k}\Omega$ . Va inoltre ricordato che se in uscita è presente un carico  $Z$ , allora si avrà anche una modifica della impedenza  $R_E$  secondo la formula del parallelo:

$$R_E \rightarrow R_E = \beta \frac{Z R_E}{Z + R_E} .$$

L'impedenza di uscita è data, come al solito, dal rapporto tra la tensione di uscita a vuoto, cioè  $v_e \simeq v_b$ , e la corrente di uscita di cortocircuito. Poiché il cortocircuito esclude  $R_E$ , questa corrente sarà data da  $\beta$  volte la corrente di base, cioè  $\beta v_b / h_{ie}$ ,

$$R_o = \frac{v_{out}}{i_{out}} = \frac{v_b}{\beta v_b / h_{ie}} = \frac{h_{ie}}{\beta} . \quad (5.36)$$

Con i valori di fig. 5.11 si ha  $R_o = 2500 / 200 \simeq 12.5 \Omega$ . Tale valore va corretto

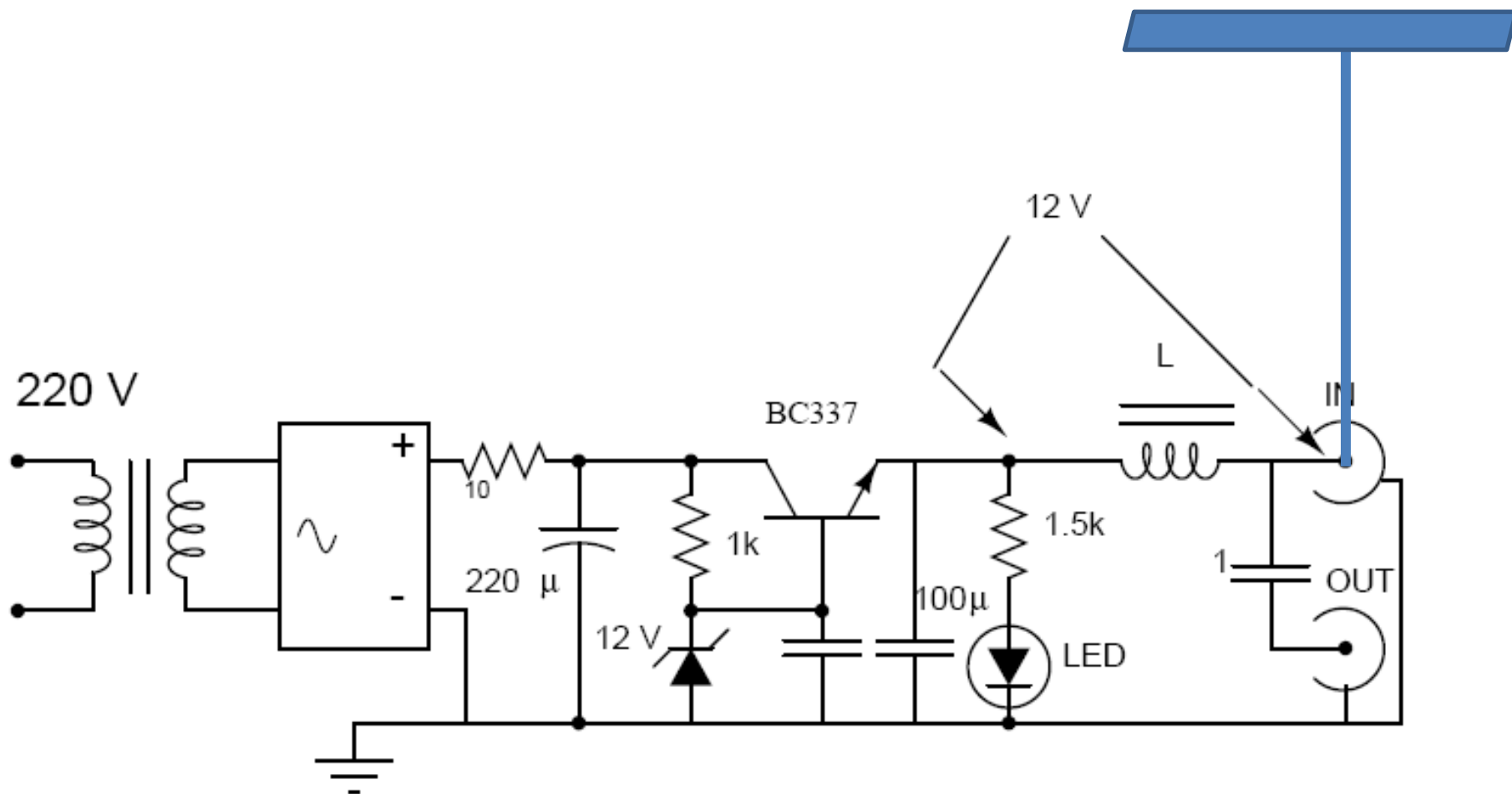


Figure 5.12: Alimentatore per amplificatore di antenna

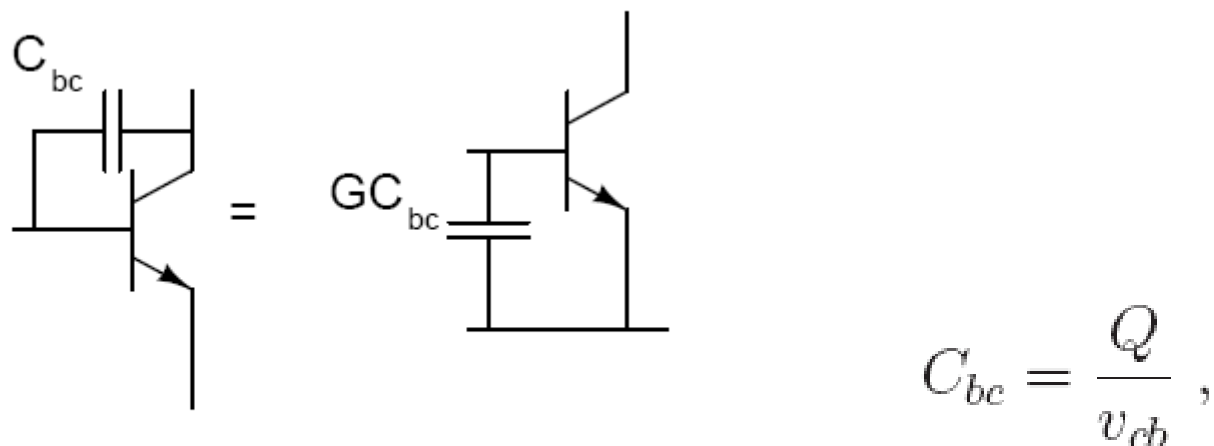


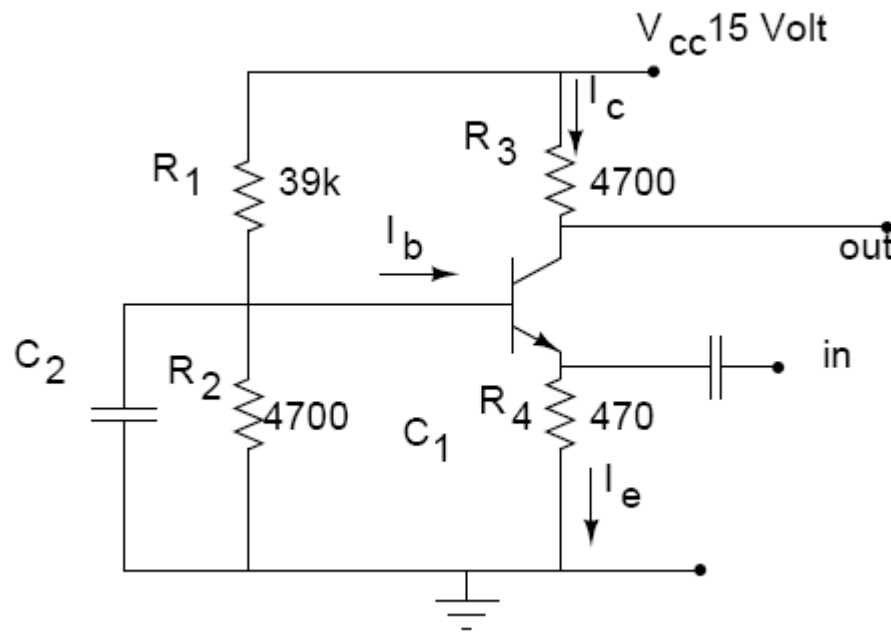
Figure 5.13: Effetto Miller

$$v_{cb} = v_{out} - v_{in} = -Gv_{in} - v_{in} = -(G + 1)v_{in},$$

$$C_{in} = \frac{Q}{v_{in}}.$$

$$C_{in} = \frac{Q}{v_{in}} = (G + 1) \frac{Q}{v_{cb}} = (G + 1) C_{bc} \simeq G C_{bc}$$

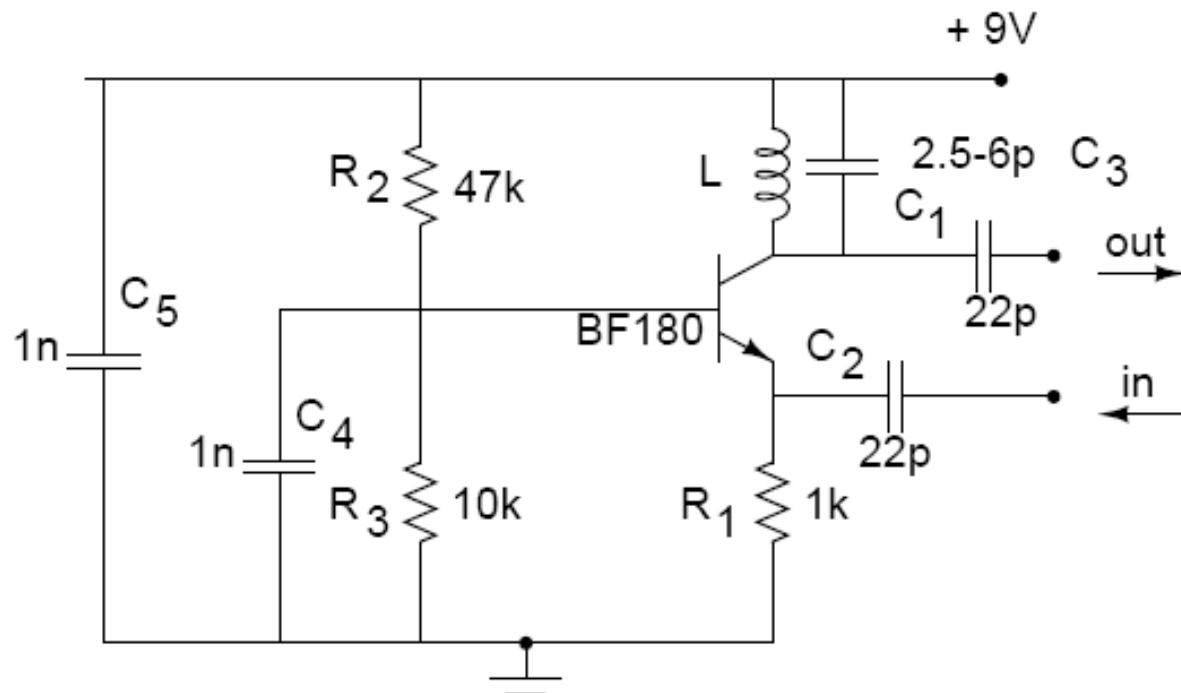
# Amplificatore a base comune



$$G = \frac{v_c}{v_e} = \frac{v_c}{-v_{be}} = \frac{-i_c R_3}{-i_b h_{ie}} \approx \frac{\beta R_3}{h_{ie}},$$

$R_4$  connesse con la terra, calcoliamo l'impedenza d'ingresso  $r_i$ :

$$r_i = \left| \frac{v_{be}}{i_e} \right| = \frac{i_b h_{ie}}{i_e} = \frac{i_e h_{ie}}{(\beta + 1) i_e} = \frac{h_{ie}}{\beta + 1} \approx \frac{2500}{201} = 12.4 \Omega$$



il carico di collettore non è resistivo, ma di tipo risonante. Per l'induttanza  $L$  sono sufficienti 3-4 cm di filo avvolto su un piccolo nucleo di ferrite. Questo carico risonante presenta una impedenza pari a:

$$\frac{\frac{i\omega L R_p}{i\omega L + R_p} \frac{1}{i\omega C_3}}{\frac{i\omega L R_p}{i\omega L + R_p} + \frac{1}{i\omega C_3}} = \frac{R_p i\omega L}{i\omega L + R_p(1 - \omega^2 LC_3)},$$

dove  $R_p$  tiene conto degli effetti dissipativi. Per  $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC_3}$ ,  $Z = R_n$  e il guadagno è massimo.



| tipo di circuito      | base<br>comune | emettitore<br>comune | collettore comune<br>(emitter follower) |
|-----------------------|----------------|----------------------|---|
| fase                  | $0^\circ$      | $180^\circ$          | $0^\circ$                               |
| guadagno in tensione  | alto           | alto                 | basso                                   |
| guadagno in corrente  | basso          | alto                 | medio                                   |
| guadagno in potenza   | basso          | alto                 | medio                                   |
| impedenza di ingresso | bassa          | media                | alta                                    |
| impedenza di uscita   | media          | media                | bassa                                   |

Table 5.2: Configurazioni degli amplificatori a transistor

# **Amplificatore operazionale**

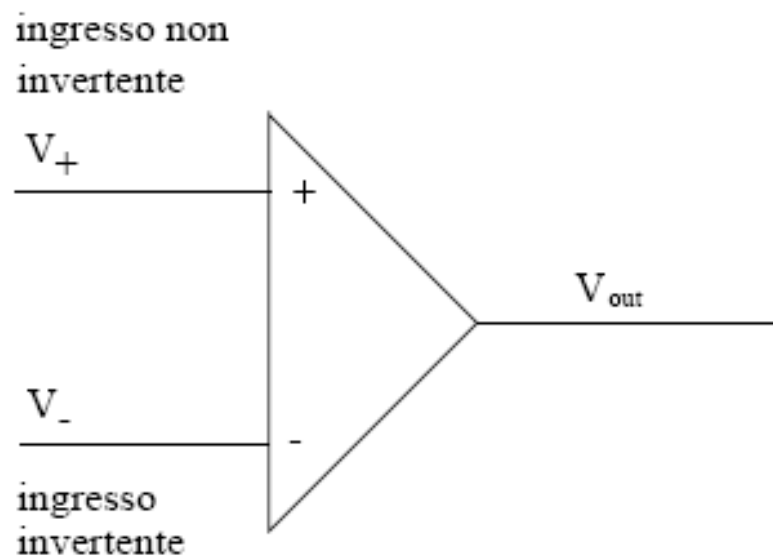
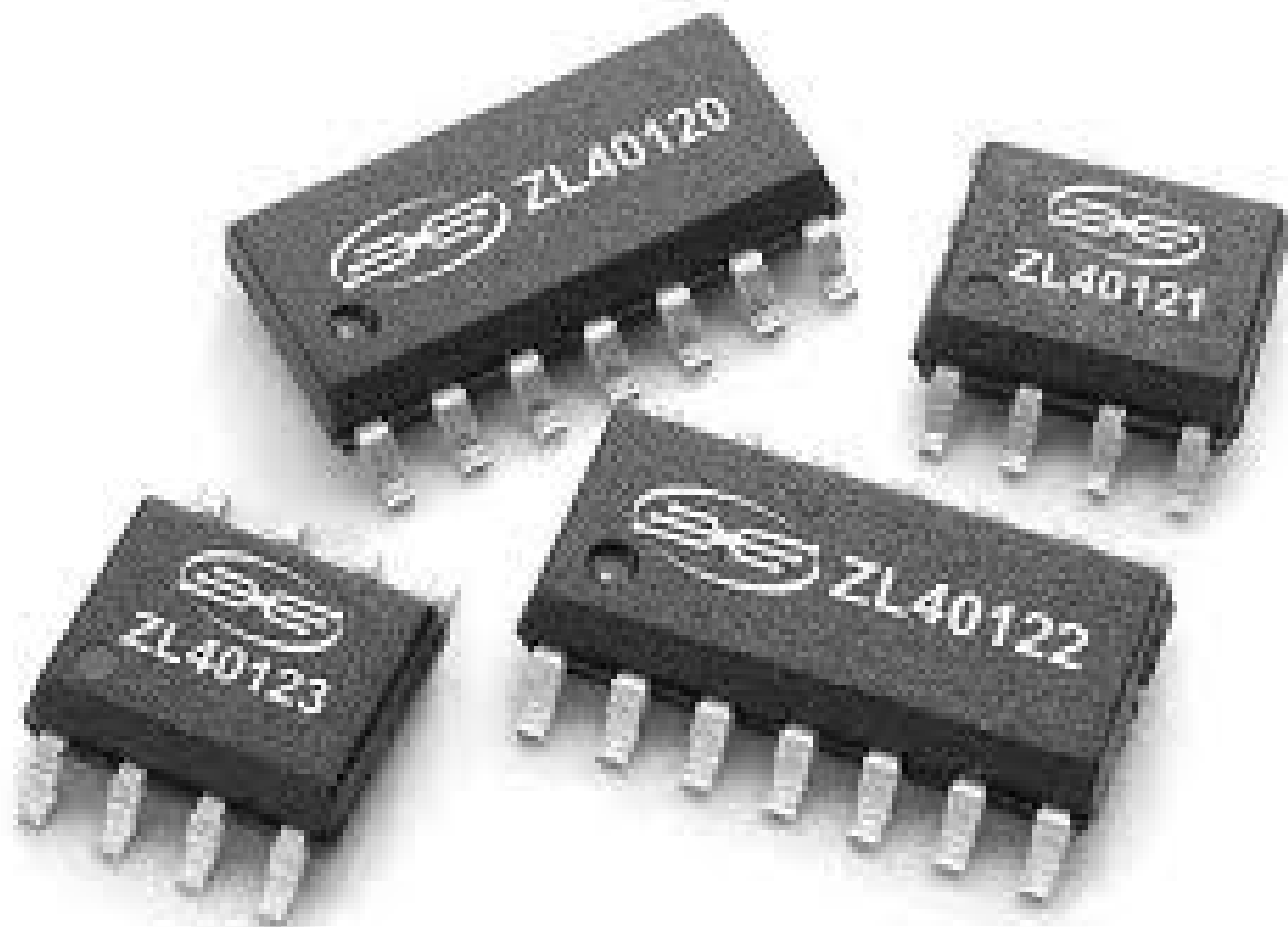


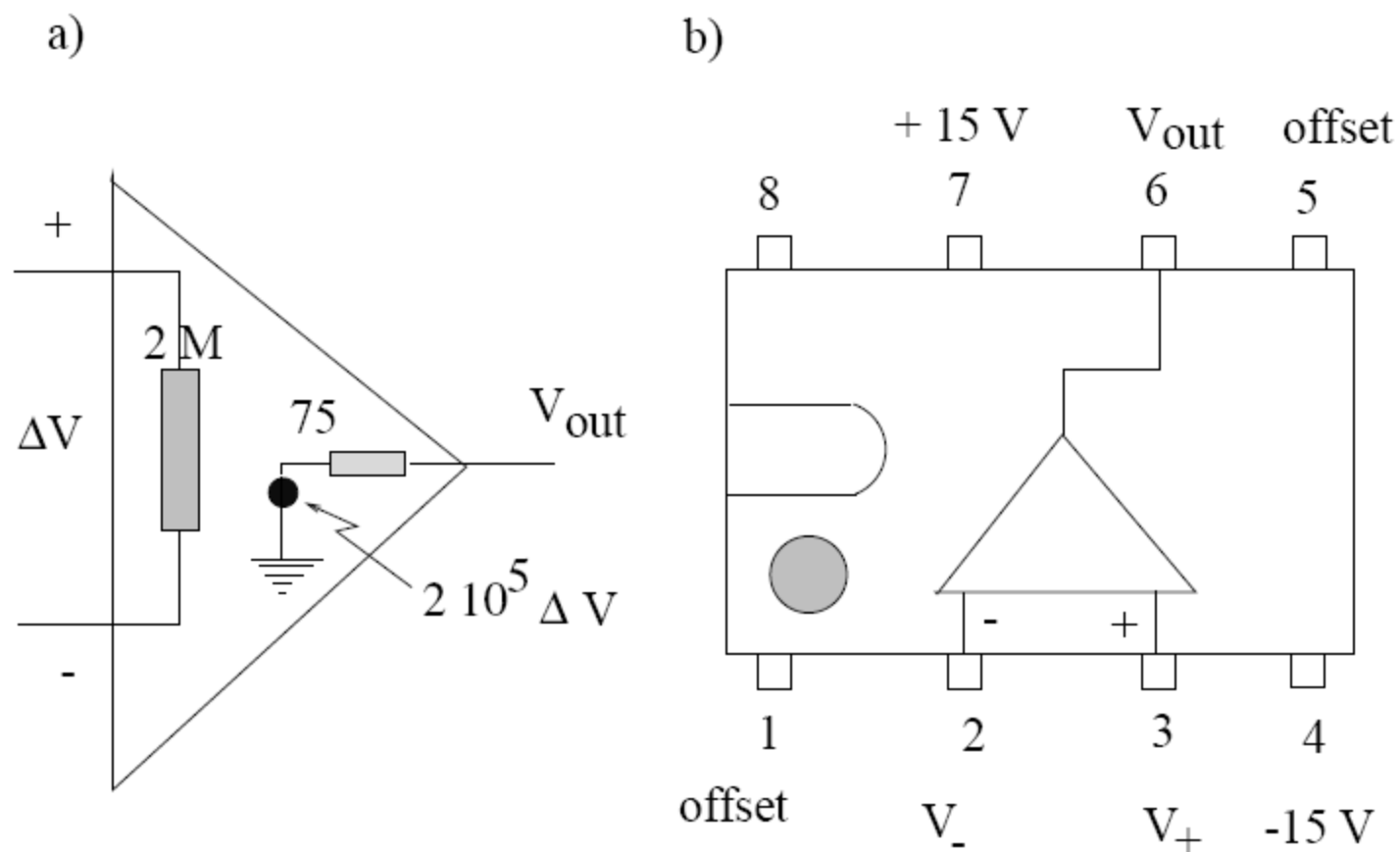
Figure 6.1: l'amplificatore operazionale

- guadagno ideale pari a  $\infty$ ; in realtà si ha

$$V_{out} = A(V_+ - V_-) \equiv A\Delta V, \quad \text{con } A \simeq 10^5 \quad (6.1)$$

- impedenza ideale di ingresso  $Z_i = \infty$ ; sono comuni valori reali tra 2 e 10 M $\Omega$ ;





## **alcuni importanti fatti:**

- **Reazione negativa**
- **Banda e guadagno**
- **Massa virtuale**

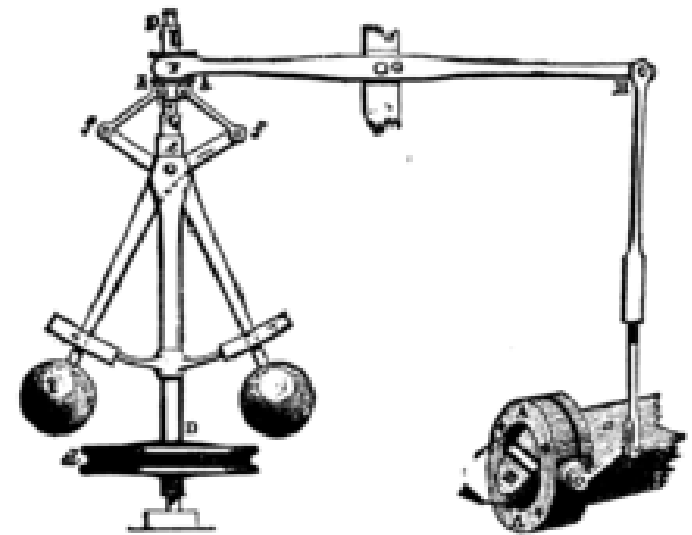
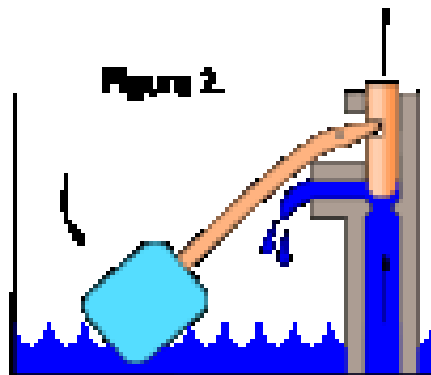
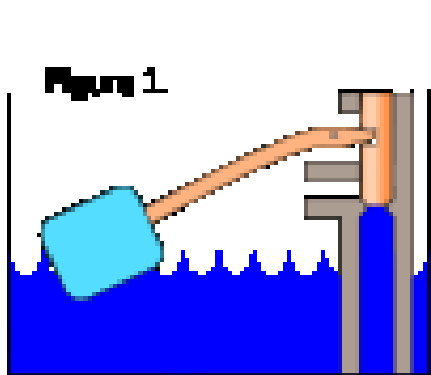


FIG. 4.—Governor and Throttle-Valve.



Born

Died

Nationality

Fields

[Alma mater](#)

Known for

April 14, 1898

[Leominster, Massachusetts](#)

December 11, 1983 (aged 85)

[Summit, New Jersey](#)

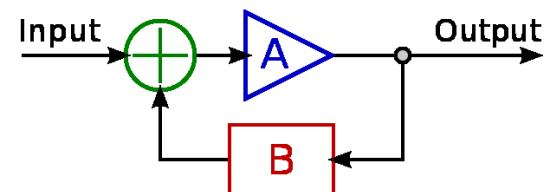
[United States](#)

[Electrical engineer](#)

[Worcester Polytechnic Institute](#)

[negative feedback](#)

Harold Stephen Black



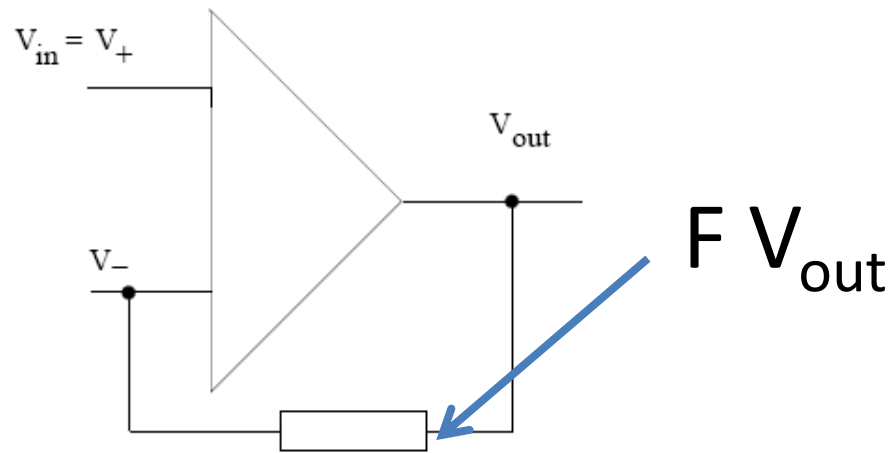


Figure 6.3: reazione negativa.

$$\begin{aligned}
 V_{out} &= A(V_+ - V_-) = AV_+ - AFV_{out} \\
 V_{out}(1 + FA) &= AV_+ \\
 \frac{V_{out}}{V_+} &= \frac{V_{out}}{V_{in}} = G_0 = \frac{A}{1 + FA} .
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dato che  $A \simeq 10^5$ , in pratica il rapporto tra tensione di ingresso e uscita vale  $1/F$ .

Quando  $F = 1$ ,  $A\Delta V = V_{out} \simeq V_{in} = V_+$  e quindi  $\Delta V \simeq 10^{-5}V_{in}$ , cioè  $V_+ \simeq V_-$  ed il guadagno è unitario.



## alcuni importanti fatti:

- **Reazione negativa**
- **Banda e guadagno**
- **Massa virtuale**

Quando invece  $F = 0$ , il guadagno  $V_{out}/V_{in} = A$  raggiunge il limite massimo consentito dall'amplificatore, che è detto guadagno ad anello aperto.

Il guadagno quindi diminuisce all'aumentare della frazione di retroazione  $F$ . Oltre a questa relazione fondamentale, il guadagno ha un legame funzionale importante con la banda passante, come ora mostriamo.

Dato che tutti i circuiti hanno una diminuzione di guadagno alle alte frequenze ed una pulsazione di taglio superiore  $\omega = 1/\tau_c$ , il guadagno dell'amplificatore operazionale, indicato semplicemente con  $A$  nella (6.2), è in realtà funzione della frequenza secondo la formula generale del passa-basso:

$$A = \frac{A_{op}}{1 + j\omega\tau_c} . \quad (6.3)$$

Sostituendo nella (6.2), si ottiene:

$$\begin{aligned}
 V_{out} &= A(V_+ - V_-) = AV_+ - AFV_{out} \\
 V_{out}(1 + FA) &= AV_+ \\
 \frac{V_{out}}{V_+} &= \frac{V_{out}}{V_{in}} = G_0 = \frac{A}{1 + FA} .
 \end{aligned}$$

Sostituendo nella (6.2), si ottiene:

$$G = \frac{A_{op}/(1 + \mathbf{j}\omega\tau_c)}{1 + FA_{op}/(1 + \mathbf{j}\omega\tau_c)} . \quad (6.4)$$

Moltiplicando il numeratore e denominatore per  $(1 + j\omega\tau_c)/FA_{op}$  e tenendo presente che  $FA_{op} \gg 1$  (e quindi  $(1 + j\omega\tau_c)/FA_{op} \simeq j\omega\tau_c/FA_{op}$ ), si può scrivere:

$$G \simeq \frac{1/F}{1 + \mathbf{j}\omega \frac{\tau_c}{FA_{op}}} . \quad (6.5)$$

La (6.5) corrisponde ad un guadagno massimo  $G_{op}$ , una frequenza di taglio

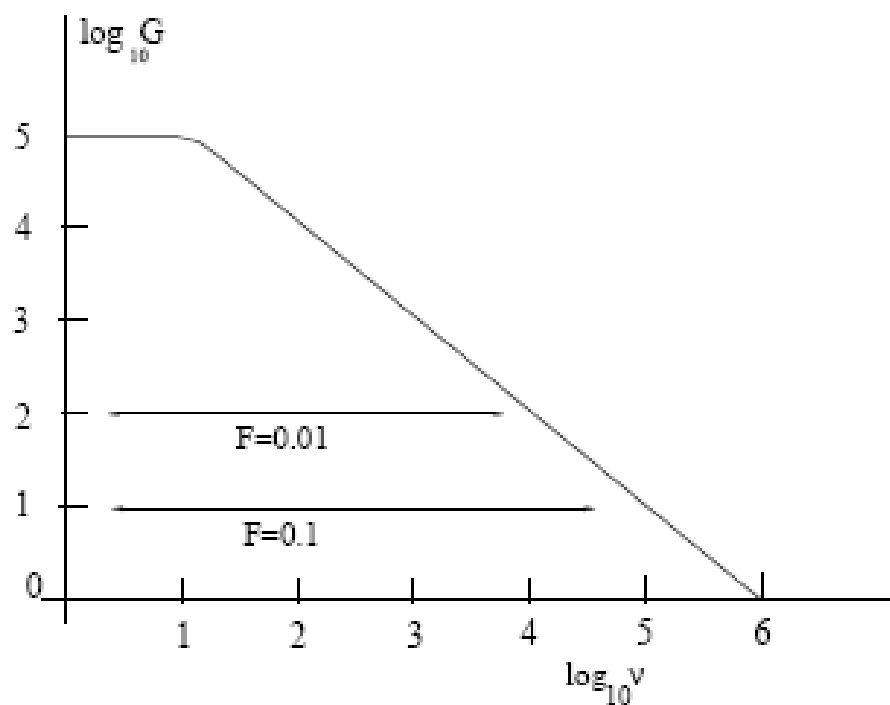
$\omega_{op}$  e una costante di tempo  $\tau_{op}$  rispettivamente pari a:

$$G_{op} = \frac{1}{F} , \quad \omega_{op} = \frac{FA_{op}}{\tau_c} , \quad \tau_{op} = \frac{\tau_c}{FA_{op}} .$$

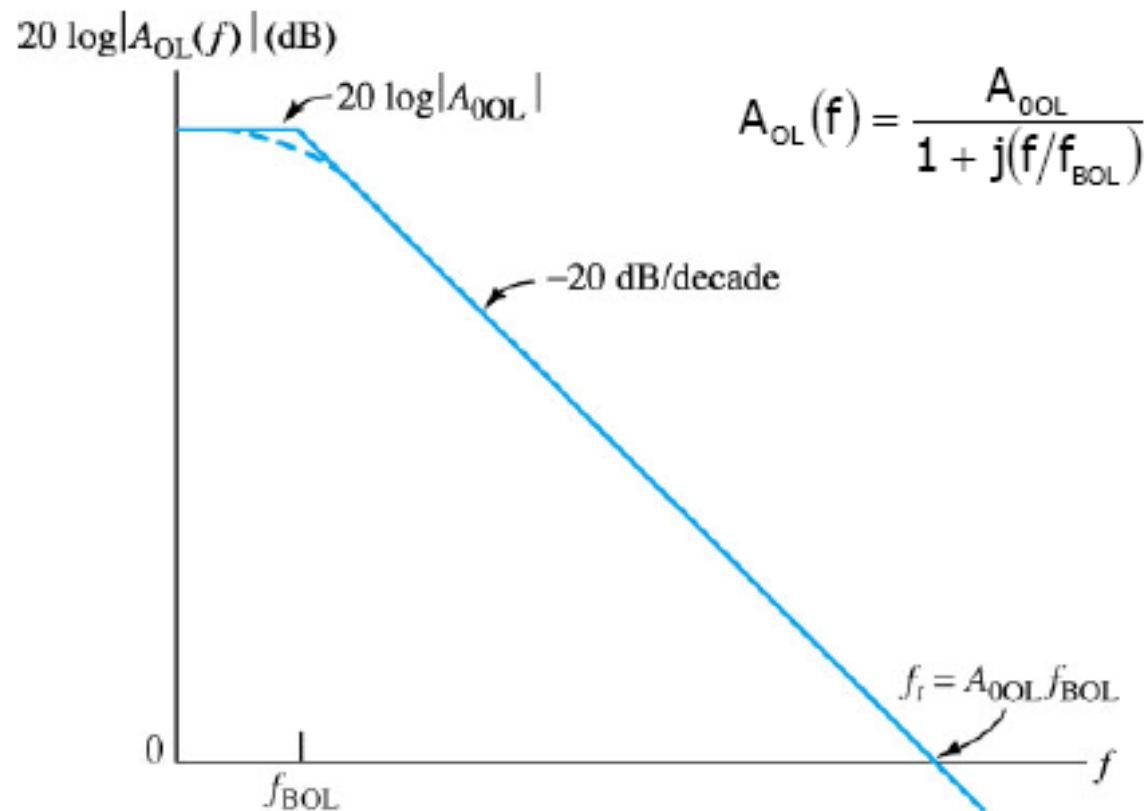
Le (6.6) mostrano pure che il prodotto del guadagno massimo per la larghezza di banda è una costante indipendente dalla frazione di retroazione:

$$G_{op} \omega_{op} = \frac{A_{op}}{\tau_c}, \quad (6.7)$$

pari al rapporto tra il guadagno massimo ad anello aperto ( $\simeq 10^5$ ) e la costante di tempo  $\tau_c$  dell'operazionale.

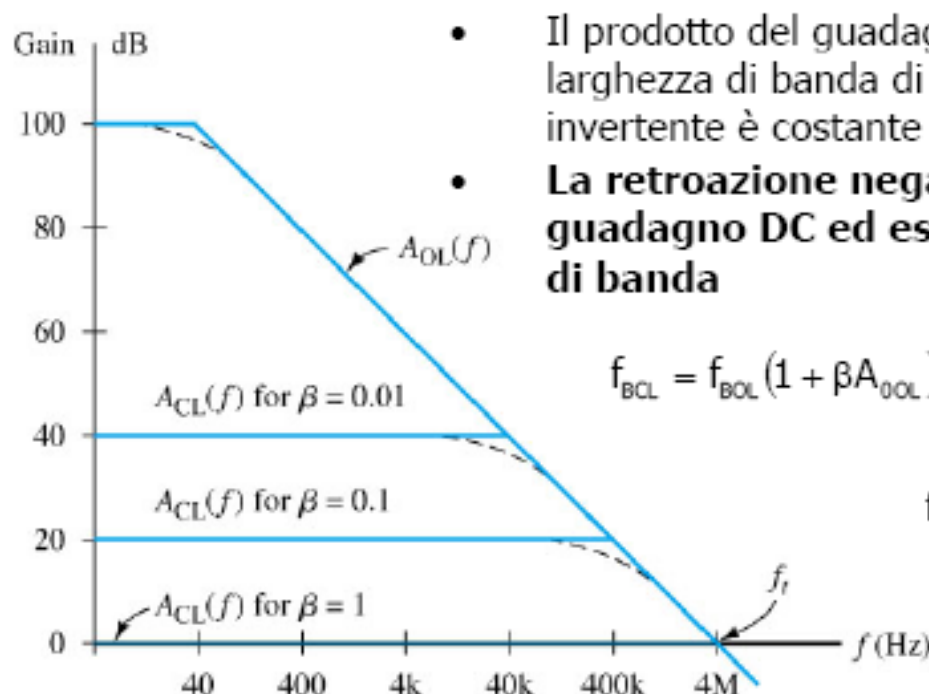


## NON-IDEALITÀ IN REGIONE LINEARE / 2



## NON-IDEALITÀ IN REGIONE LINEARE /5

- Dati op amp:  $A_{00L} = 10^5$  ;  $f_{BOL} = 40$  Hz
- Rete di retroazione:  $\beta = 1, 0.1, 0.01$



- Il prodotto del guadagno DC per la larghezza di banda di un amplificatore invertente è costante e **indipendente** da  $\beta$
- **La retroazione negativa riduce il guadagno DC ed estende la larghezza di banda**

$$f_{BCL} = f_{BOL} (1 + \beta A_{00L}) \quad A_{0CL} = \frac{A_{00L}}{1 + \beta A_{00L}}$$

$$f_t = f_{BOL} A_{00L} = f_{BCL} A_{0CL}$$

$$f_{BCL} = \frac{f_t}{A_{0CL}}$$

## alcuni importanti fatti:

- Reazione negativa
- Banda e guadagno
- **Massa virtuale**

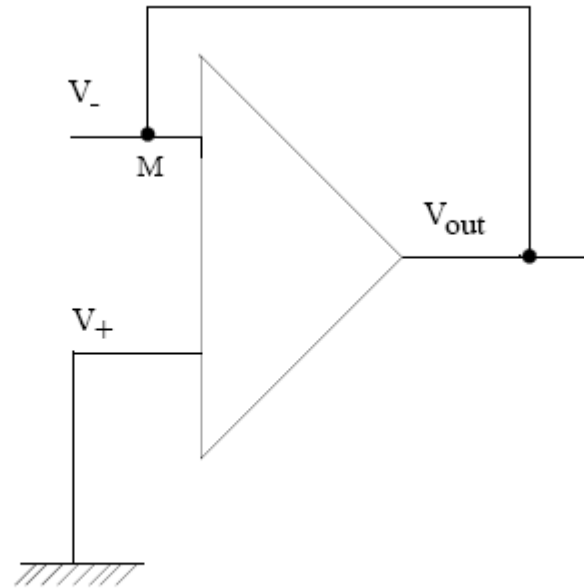


Figure 6.5: reazione negativa e massa virtuale.

$(V_+ - V_-) \simeq 10^{-5}V_-$  e quindi  $V_+ \simeq V_-$ . Se  $V_+$  è posto a terra, anche  $V_-$  si comporta come se fosse a massa. Questo punto (indicato con  $M$  in fig. 6.5), è detto *massa virtuale*, perché resta “agganciato” a 0 Volt per effetto della reazione negativa.



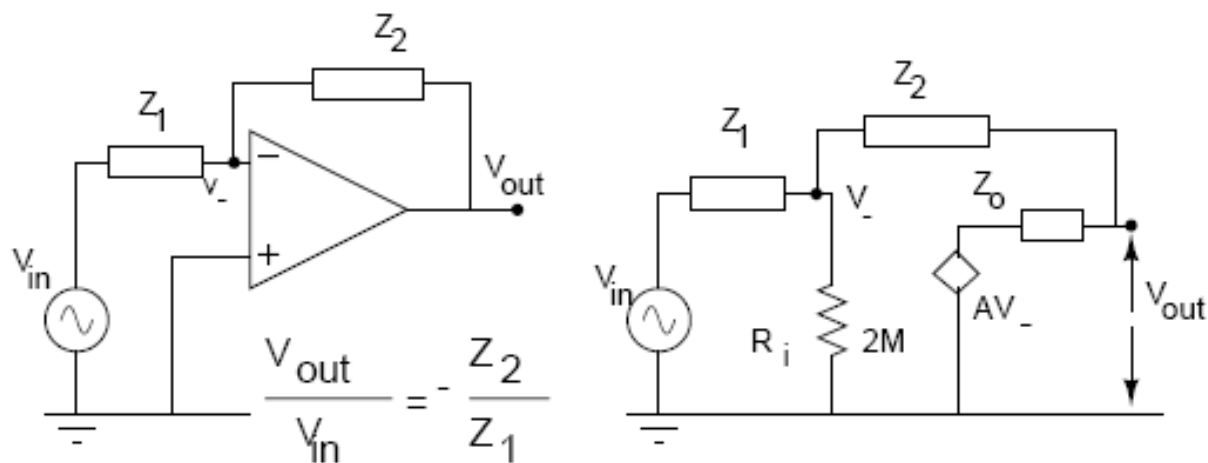


Figure 6.6: OP-AMP in reazione negativa con ingresso non invertente a terra e circuito equivalente.

$$\begin{aligned}
 V_- &= V_{in} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} + V_{out} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \\
 &= V_{in} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - AV_- \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2},
 \end{aligned}$$

da cui:

$$V_- \left( 1 + A \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) = V_{in} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

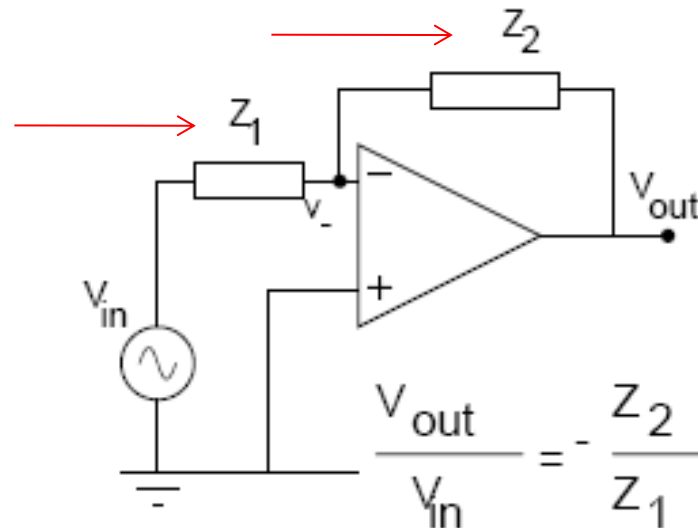
$$V_- \left( 1 + A \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) = V_{in} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} ,$$

e quindi

$$V_- = \frac{V_{in} Z_2}{(Z_1 + Z_2) + AZ_1} . \quad (6.8)$$

Se  $(Z_1 + Z_2) + AZ_1 \gg Z_2 \rightarrow Z_1(A+1) \gg 0$ , si ha  $V_- \sim 0$ . Dato che  $A \simeq 10^5 \gg 1$  la condizione è sempre verificata. Risulta quindi che  $V_-$  è sempre circa a tensione zero, cioè molto vicino al potenziale di terra. In pratica, *anche in questo caso vale il principio della massa virtuale*:  $V_+ \simeq V_-$  e tra i terminali

# La relazione fondamentale: guadagno

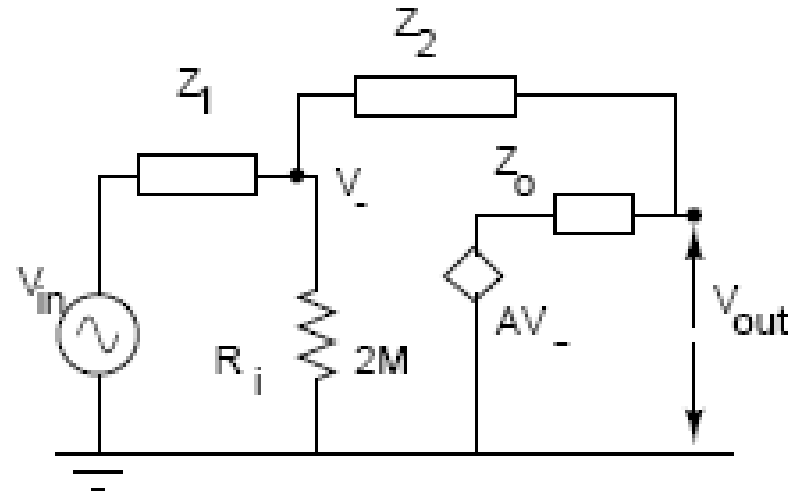


**Considero la corrente** 
$$\frac{(V_- - V_{out})}{Z_2} = \frac{(V_{in} - V_-)}{Z_1} .$$

Poiché  $V_- \simeq 0$  per la massa virtuale, avremo

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_2}{Z_1} ,$$

# Impedenza di ingresso



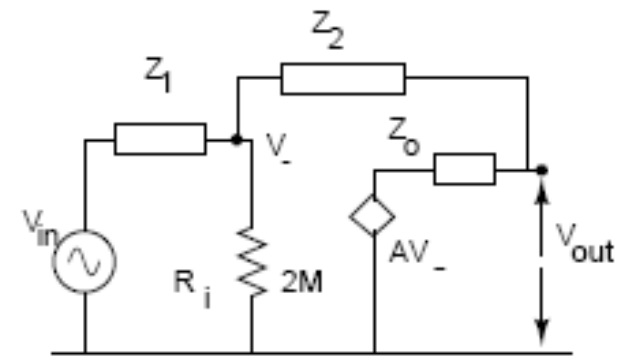
È anche facile calcolare la impedenza di ingresso del circuito di fig. 6.6; infatti,

$$Z_i = \frac{V_{in}}{I_i}, \quad I_i Z_1 = V_{in} - V_- ,$$

da cui, dato che  $V_- \simeq 0$ :

$$Z_i = \frac{V_{in} Z_1}{V_{in} - V_-} \simeq Z_1 . \quad (6.11)$$

# Impedenza di uscita



L'impedenza di uscita, per il circuito di fig. 6.6, si trova considerando il rapporto tra la tensione a circuito aperto  $V_{out}$  e la corrente di corto circuito di uscita  $I_{cc}$ . Indicheremo con  $Z_0$  la impedenza interna di uscita dell'OP-AMP (indicata col valore indicativo di  $75 \Omega$  in fig. 6.2). Il valore della corrente di uscita va calcolato considerando che, quando l'uscita è cortocircuitata, la tensione di uscita va a zero e quindi il fattore di retroazione si annulla perchè tutta la corrente di uscita fluisce a terra. In queste condizioni, l'amplificatore torna alla configurazione ad anello aperto. Dal circuito equivalente di fig. 6.6 è facile ricavare l'espressione per la corrente  $I_{cc}$ :

$$I_{cc} = \frac{AV_-}{Z_0} = AV_{in} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{1}{Z_0} . \quad (6.12)$$

Dal valore di  $V_{out}$  della (6.10) otteniamo allora il valore dell'impedenza di uscita:

$$Z_{out} = \frac{|V_{out}|}{I_{cc}} = V_{in} \frac{Z_2 (Z_1 + Z_2) Z_0}{Z_1 AV_{in} Z_2} = \frac{(Z_1 + Z_2) Z_0}{AZ_1} \simeq 0 , \quad (6.13)$$

dove l'ultima approssimazione a zero vale a causa dell'elevato valore di  $A \simeq 10^5$ .

# Reazione negativa

## Banda e guadagno

### Massa virtuale

- guadagno  $G = -Z_2/Z_1$ ;
- impedenza di ingresso  $Z_{in} = Z_1$ ;
- impedenza di uscita estremamente bassa (pochi  $\Omega$ ):  $Z_{out} \simeq 0$ .
- $G_{op} \omega_{op} = \frac{A_{op}}{\tau_c}$

# AMPLIFICATORE invertente

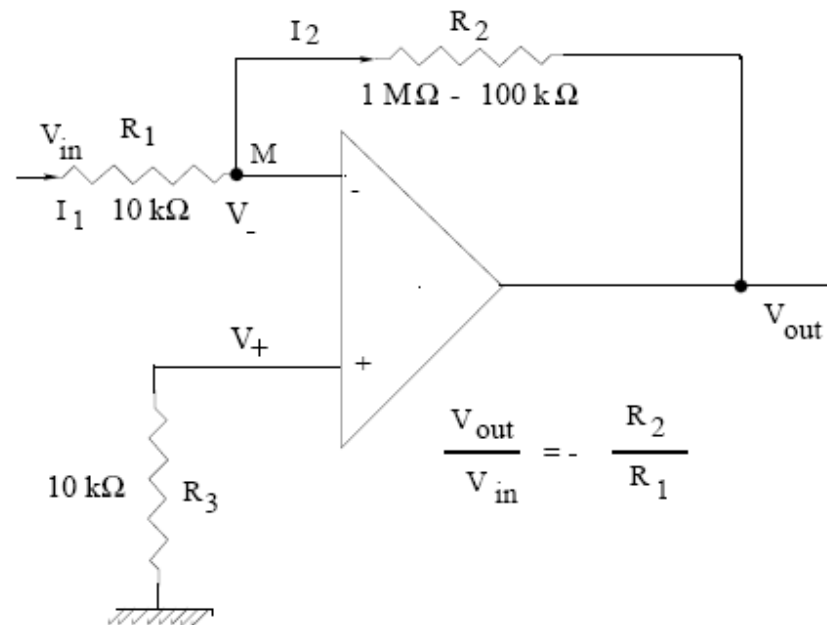


Figure 6.7: amplificatore invertente.

guadagno

$$G = -R_2/R_1 ;$$

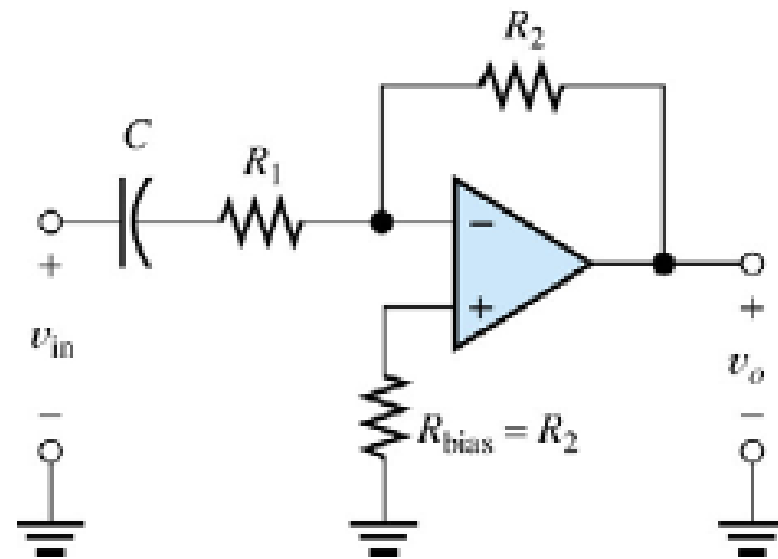
impedenza di ingresso  $Z_{in} = R_1$ ;

impedenza di uscita  $Z_{out} \simeq 0$

# AMPLIFICATORI INVERTENTE AC

- La versione dell'amplificatore invertente accoppiato in AC si può ottenere da quella classica aggiungendo in serie al resistore  $R_1$  il condensatore  $C$
- $R_{bias} = R_2$  compensa l'effetto delle correnti di polarizzazione
- Questo tipo di amplificatore è utile quando il segnale di ingresso contiene una componente DC indesiderata
- A centro banda:

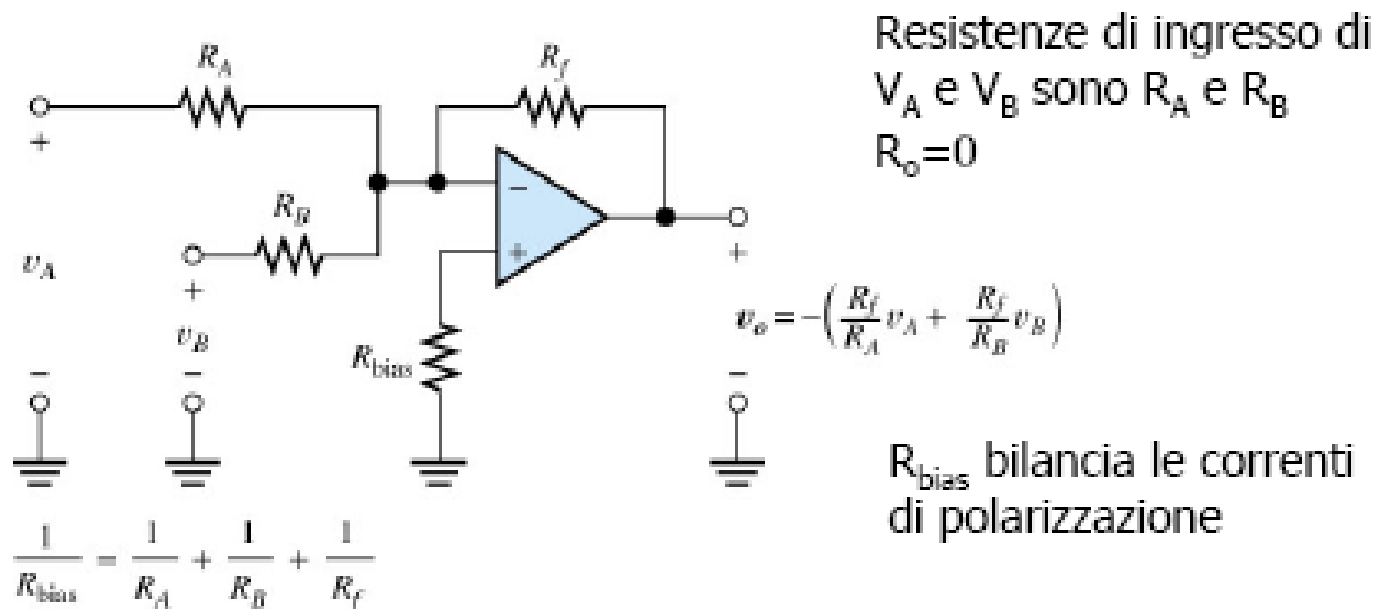
$$A_v = -\frac{R_2}{R_1}$$





# SOMMATORE

- L'amplificatore sommatore (invertente) in figura si analizza assumendo che l'op amp sia ideale e applicando o la sovrapposizione degli effetti o costruendo il generatore di Thevenin dei due generatori indipendenti in ingresso
- La tensione di uscita è **proporzionale alla somma "pesata"** delle tensioni di ingresso



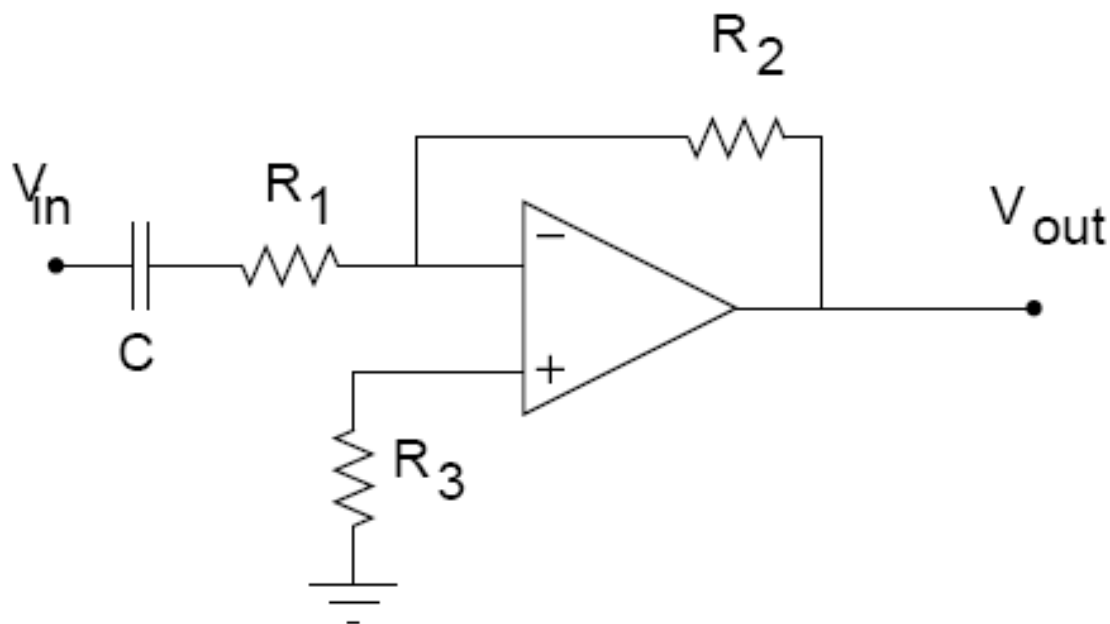


Figure 6.11: amplificatore invertente con capacità in ingresso

otteniamo il circuito di fig. 6.11 e il guadagno diventa:

$$G = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_2}{R_1 + 1/(i\omega C)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{\omega R_1 C}{\omega R_1 C - i}, \quad (6.15)$$

di modulo pari a

$$|G| = \frac{R_2}{R_1} \frac{\omega R_1 C}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}}. \quad (6.16)$$

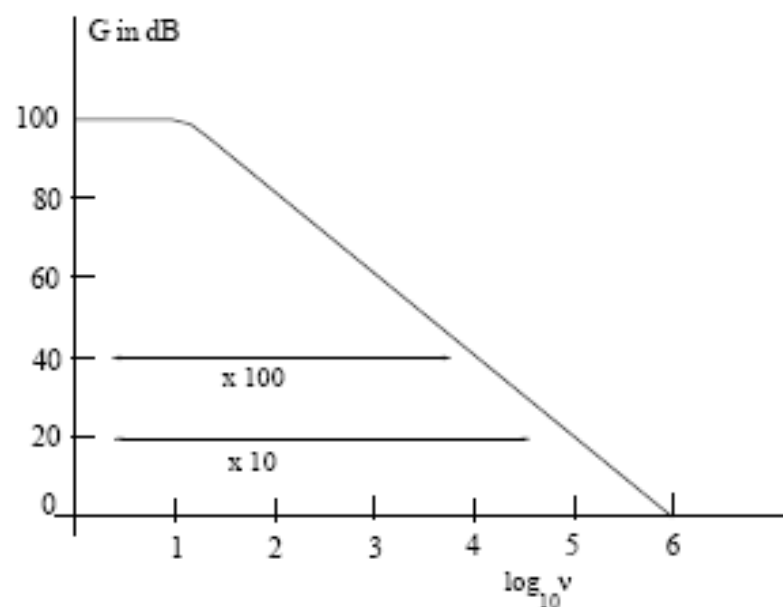


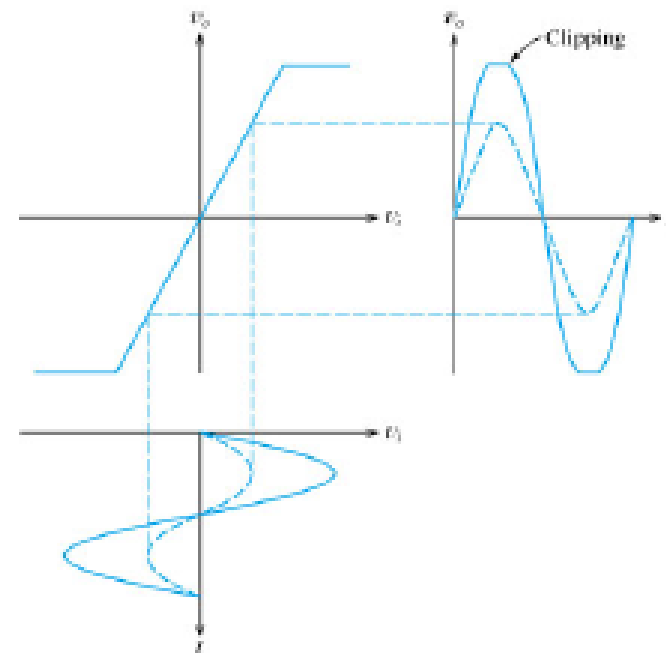
Figure 6.8: diagramma di Bode dell'OP-AMP  $\mu 741C$ .

Il diagramma di Bode tipico del circuito è mostrato in fig. 6.8. Sull'asse delle ordinate di questo diagramma è riportato il guadagno in decibel:

$$G(dB) = 20 \log_{10} \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| ,$$

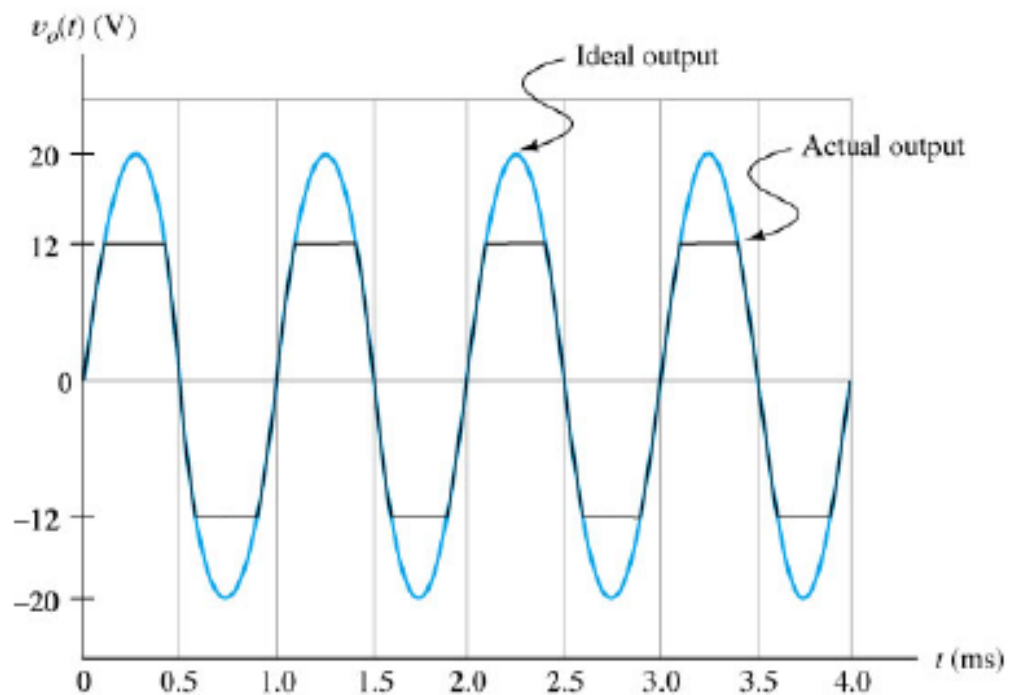
## CARATTERISTICHE NON-LINEARI

- Ci sono molti **modi non-lineari** in cui un op amp reale può operare: il segnale  $v_o$  e la corrente  $i_o$  di uscita che l'op amp può fornire al carico hanno un limite massimo e minimo
- Se il segnale di ingresso è così ampio che il segnale d'uscita amplificato eccede uno di questi limiti:  $v_o$  satura al suo valore massimo (**clipping**)
- Tale valore dipende da: resistenza di carico, alimentazione, tipo di op amp (es: -12/12V se alimentazione -15/15V)



## CARATTERISTICHE NON-LINEARI / 2

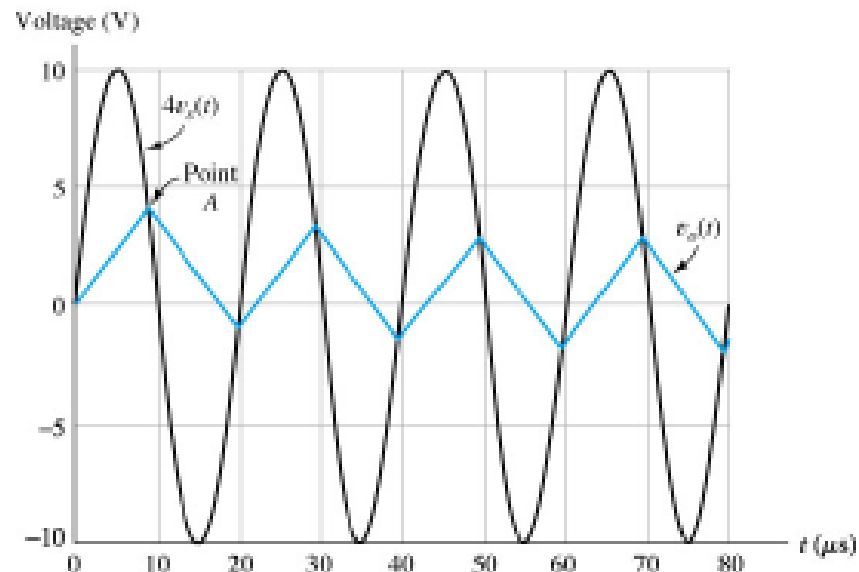
Es: *clipping* segnale d'uscita a  $-12/12V$



$$SR = \max \left( \left| \frac{dv_{out}(t)}{dt} \right| \right)$$

## CARATTERISTICHE NON-LINEARI / 3

- Negli op amp reali la velocità con cui può cambiare il segnale di uscita è limitata:  $v_o$  non può aumentare o diminuire ad una velocità che eccede tale limite, chiamato **slew rate**,  $SR \sim 10^5$  V/s
- Se il segnale di ingresso varia troppo velocemente, lo slew rate modifica la forma d'onda di  $v_o$  (es: da sinusoidale a triangolare)
- **Full-power bandwidth** = intervallo di frequenze per cui l'op amp produce in uscita un segnale non-distorto (si ricava da SR e  $v_{o,max}$ )



Slew Rate = Maximum rate at which the output voltage of an op amp can change

Ranges: A few volts /  $\mu\text{s}$  to several thousand volts /  $\mu\text{s}$

For a sine wave,  $V_{\text{out}} = V_p \sin 2\pi f t$

$$dV/dt = 2\pi f V_p \cos 2\pi f t$$

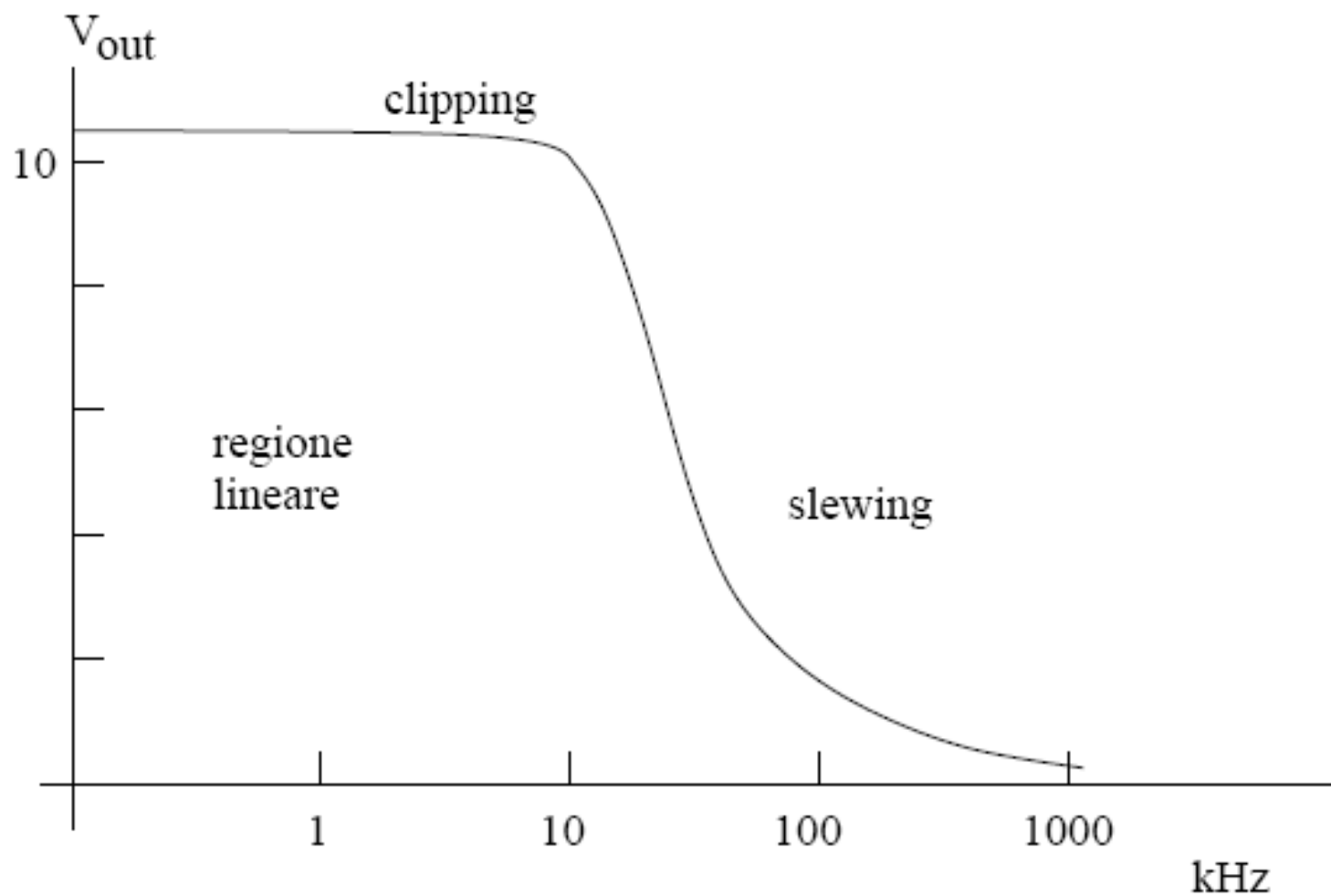
$$(dV/dt)_{\text{max}} = 2\pi f V_p$$

If  $2 V_p =$  full output span of op amp, then

$$\text{Slew Rate} = (dV/dt)_{\text{max}} = 2\pi * \text{FPBW} * V_p$$

$$\text{FPBW} = \text{Slew Rate} / 2\pi V_p$$

**Figure 1.67:** Slew Rate and Full Power Bandwidth





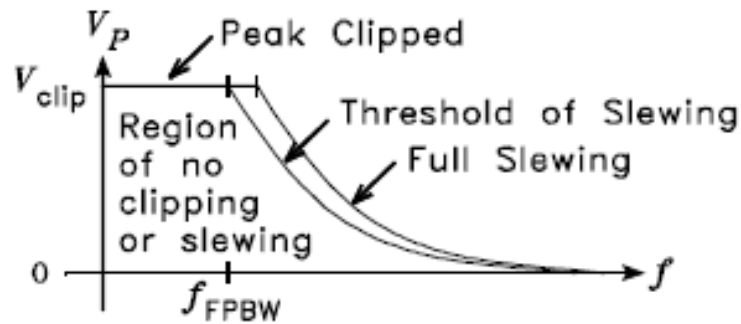


Figure 7: Maximum sine wave output voltage as a function of frequency.

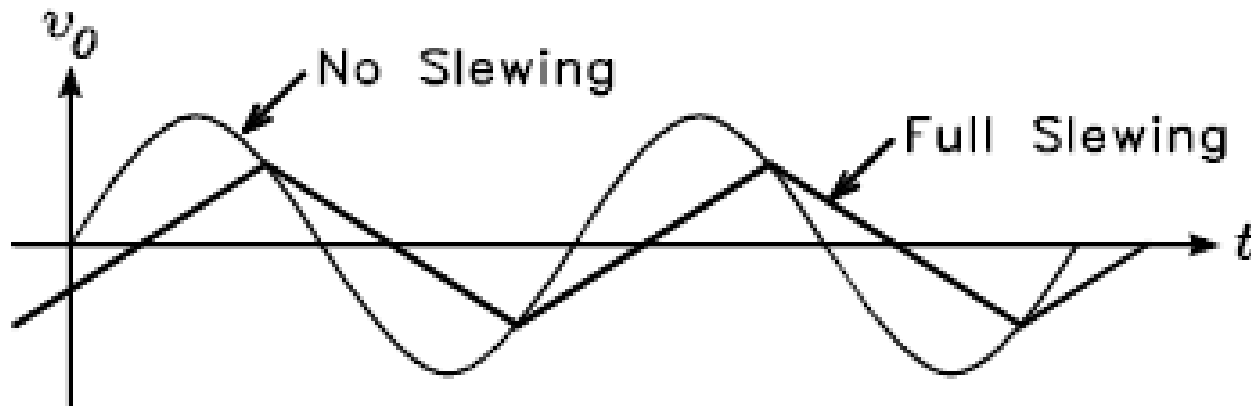


Figure 6: Non-slewing and full slewing output voltage waveforms.

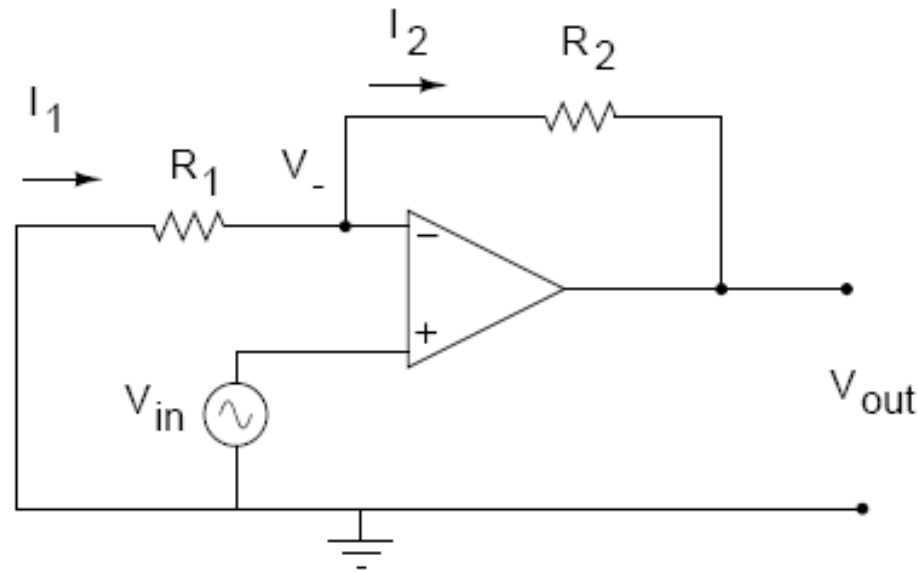


Figure 6.12: amplificatore non invertente.

basta ripetere il ragionamento fatto nel caso dell'amplificatore invertente, tenendo presente che questa volta  $V_- \neq 0$ :

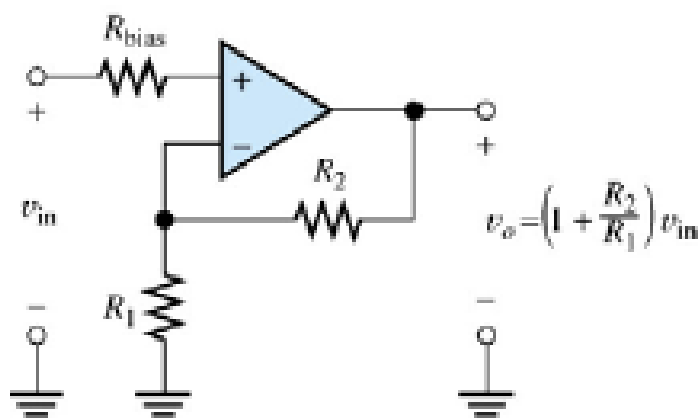
$$I_1 = I_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{-V_-}{R_1} = \frac{V_- - V_{out}}{R_2}, \quad (6.17)$$

da cui, dato che  $V_- = V_{in}$  per la reazione negativa:

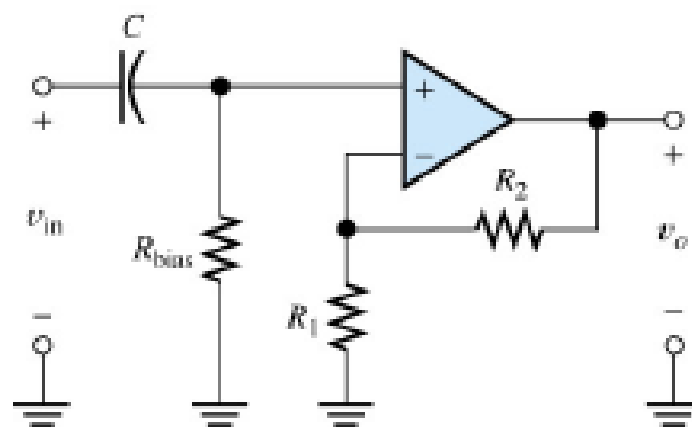
$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{in}. \quad (6.18)$$

# AMPLIFICATORE NONINVERTENTE AC

- Amp. noninvertente:  $R_{in} = \infty$  ;  $R_o = 0$  ( $\sim$  amplificatore ideale)
- Per accoppiare AC l'amp., va aggiunto il condensatore C
- $R_{bias}$  ( $= R_{in}$ ) è necessaria per scaricare a massa la corrente di polarizzazione (DC), altrimenti  $I_B$  carica C fino a portar l'op amp fuori dal suo range di funzionamento utile
- Svantaggi dell'amplificatore noninvertente AC:  $R_{in} = R_{bias}$  ( $\neq \infty$ )



$$R_{bias} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



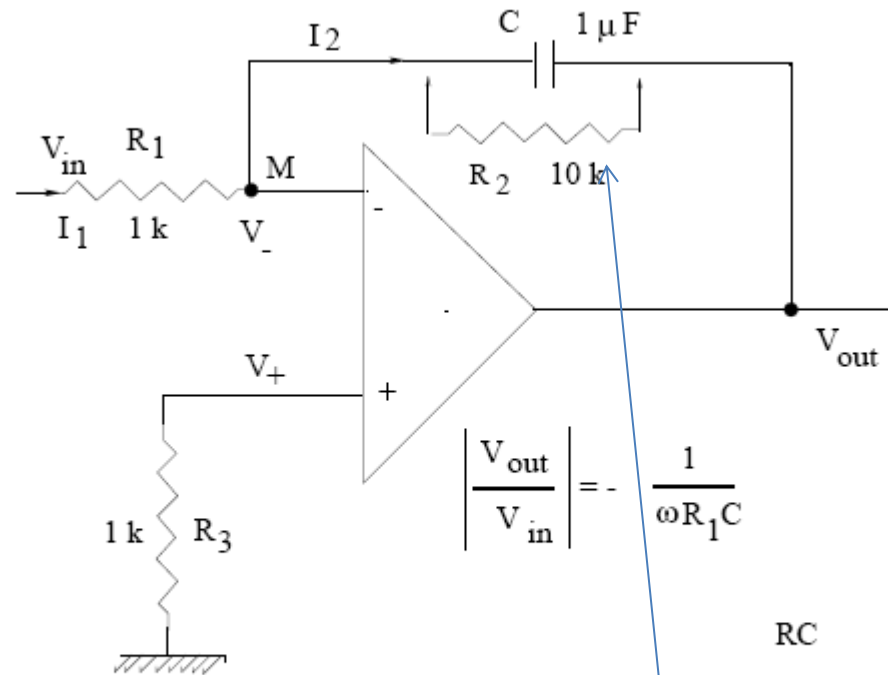
$$R_{bias} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

# integratore

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_1} = I_2 = -\frac{C dV_{out}}{dt},$$

$$V_{out} = -\frac{1}{R_1 C} \int V_{in} dt$$

$$V_{out} = -\frac{1}{i\omega R_1 C} V_{in} .$$



$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = -\frac{1}{\omega R_1 C}$$

Figure 6.14: circuito integratore con un OP-AMP.

Utilizzato nei  
rivelatori di carica

$$G = -\frac{Z_2}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + i\omega C R_2} .$$

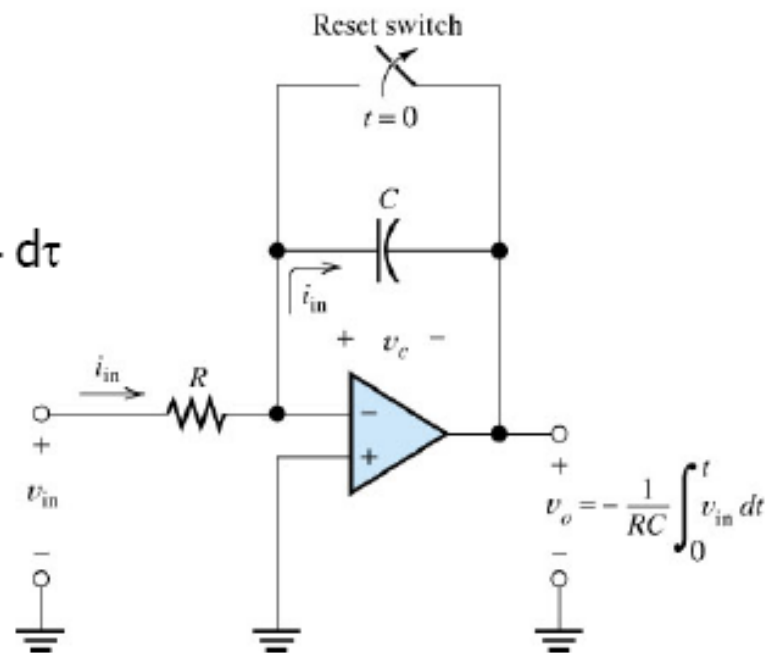
# INTEGRATORE

- Un integratore è un circuito che produce in uscita una tensione proporzionale all'integrale di quella in ingresso
- È usato in sistemi di strumentazione: ad esempio, il segnale proveniente da un accelerometro è integrato per dare un segnale proporzionale alla velocità
- C'è retroazione negativa attraverso C e assumendo ideale l'op amp:

$$i_{in} = \frac{v_{in}(t)}{R} \quad v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_{in}(\tau) \cdot d\tau$$

$$v_o(t) = -v_c(t)$$

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_{in}(\tau) \cdot d\tau$$



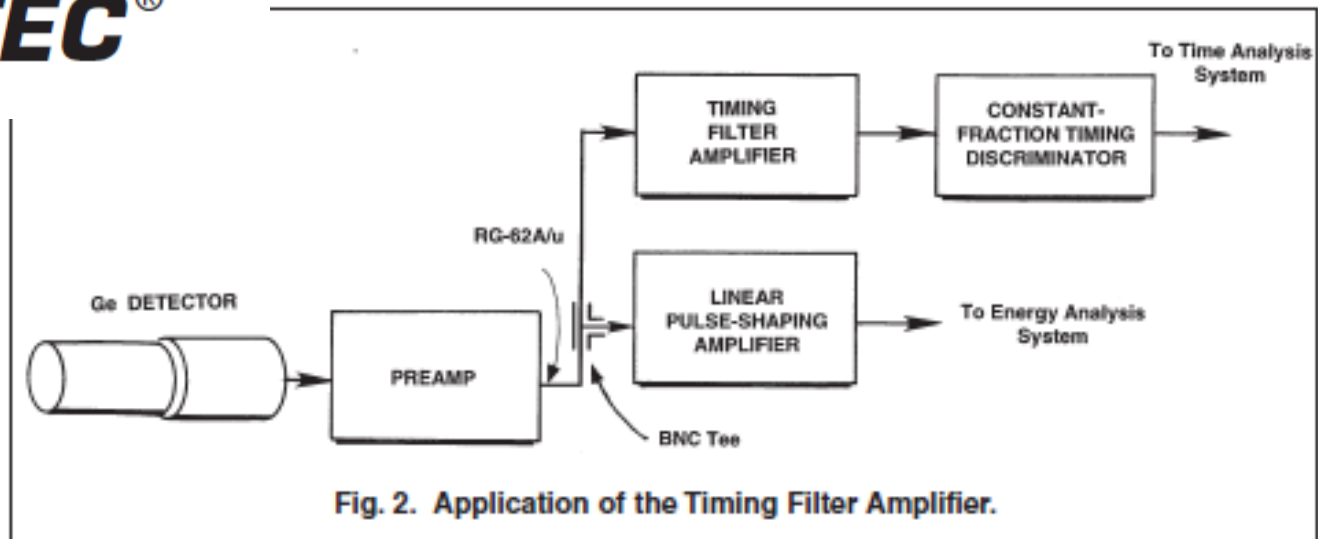


Fig. 2. Application of the Timing Filter Amplifier.

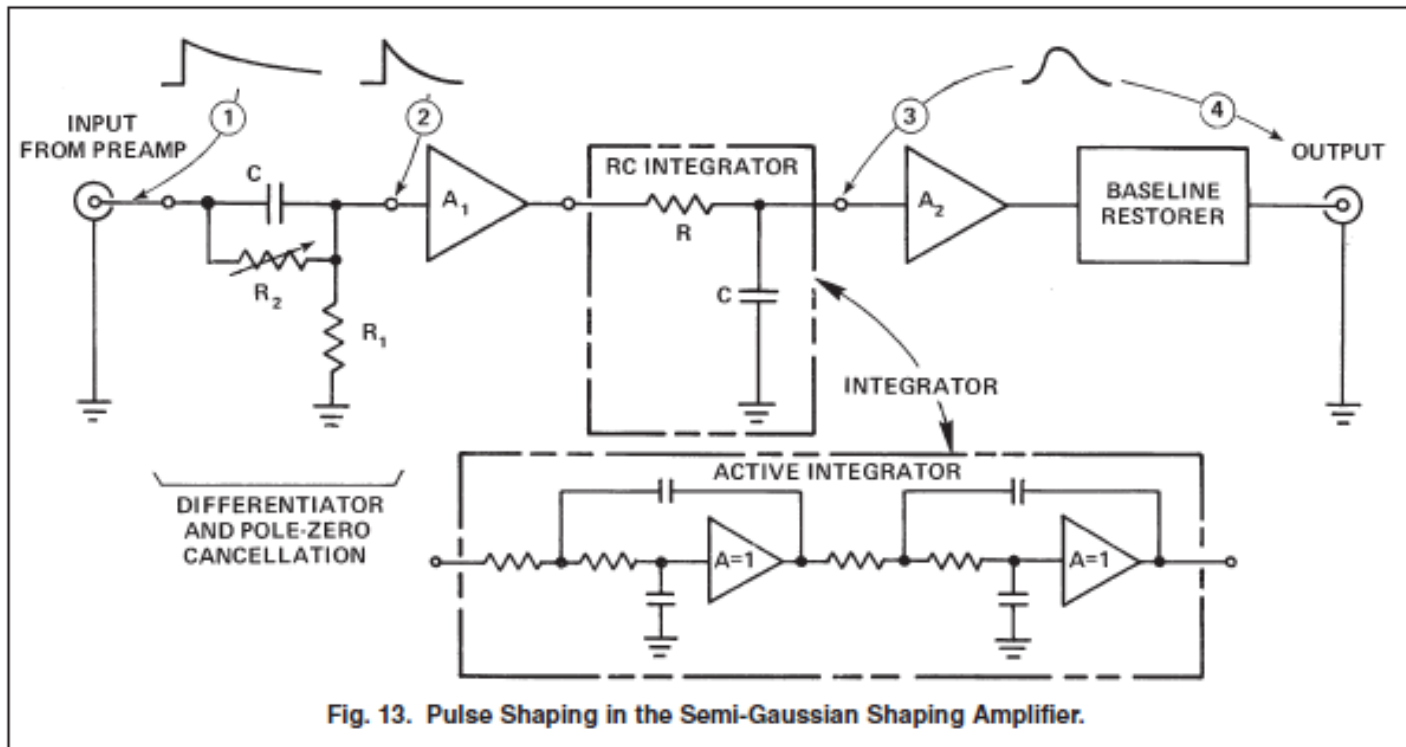


Fig. 13. Pulse Shaping in the Semi-Gaussian Shaping Amplifier.

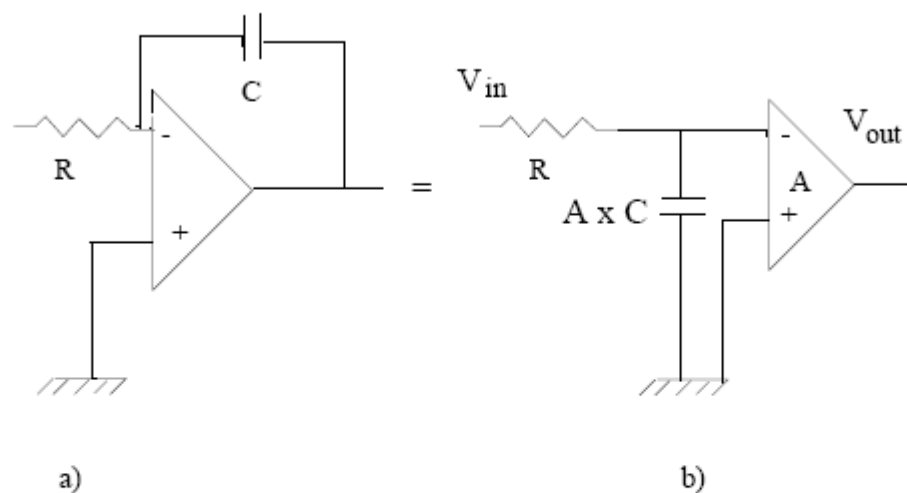


Figure 6.15: circuito integratore reazionato a) e corrispondente circuito equivalente b).

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -A \frac{1}{1 + i\omega R A C} \simeq -\frac{A}{i\omega R A C} = -\frac{1}{i\omega R C} ,$$

# derivatore

$$C \frac{dV_{in}}{dt} = -\frac{V_{out}}{R_2}$$

$$V_{out} = -R_2 C \frac{dV_{in}}{dt}$$

$$V_{out} = -i\omega R_2 C V_{in} .$$

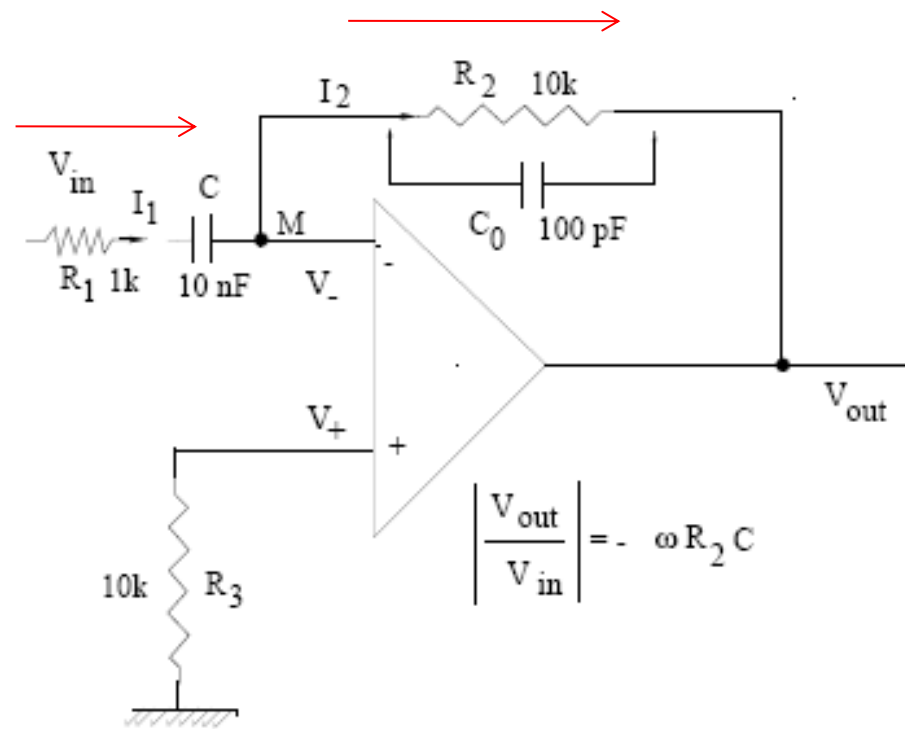


Figure 6.16: circuito derivatore con OP-AMP.

$$G = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{i\omega R_2 C}{(1 + i\omega R_2 C_0)(1 + i\omega R_1 C)}$$



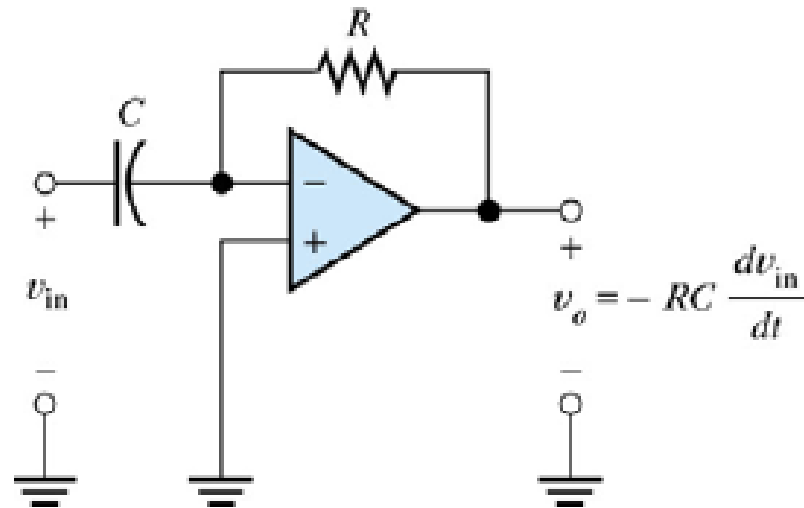
# DERIVATORE

- Il circuito in figura è un derivatore, che produce un segnale in uscita proporzionale (a meno di  $-RC$ ) alla derivata di quello d'ingresso  $v_{in}$
- Dato che c'è retroazione negativa e assumendo ideale l'op amp:

$$i_{in}(t) = C \frac{dv_{in}}{dt}$$

$$v_o(t) = -R \cdot i_{in}(t)$$

$$v_o(t) = -RC \frac{dv_{in}}{dt}$$



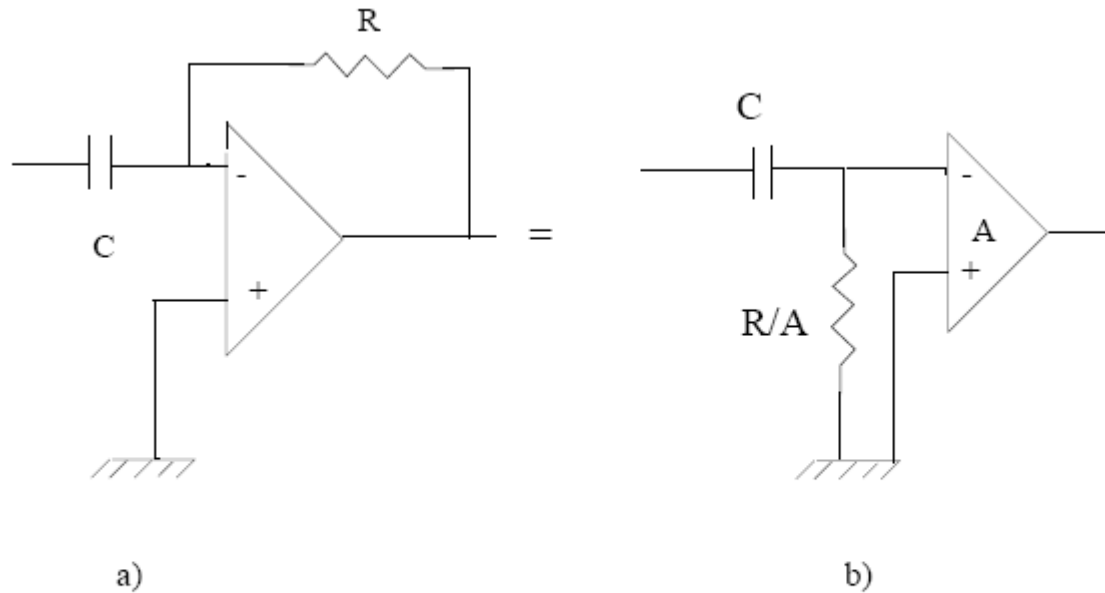
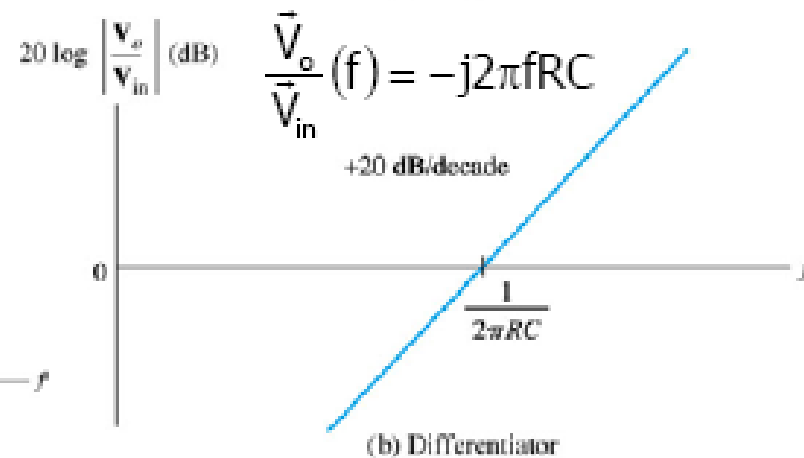
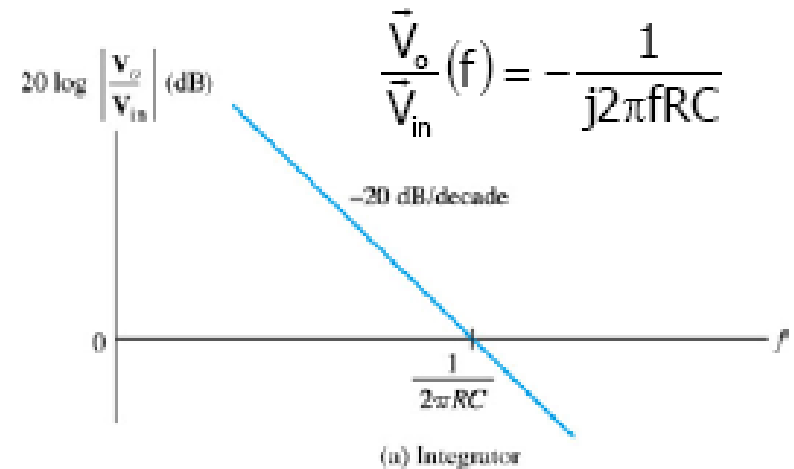
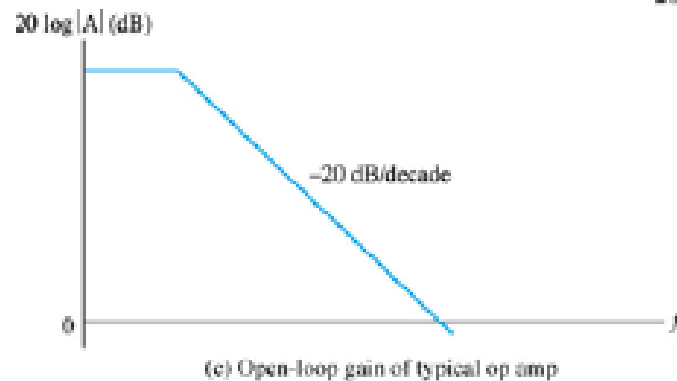


Figure 6.17: circuito derivatore con OP-AMP a) e circuito equivalente b).

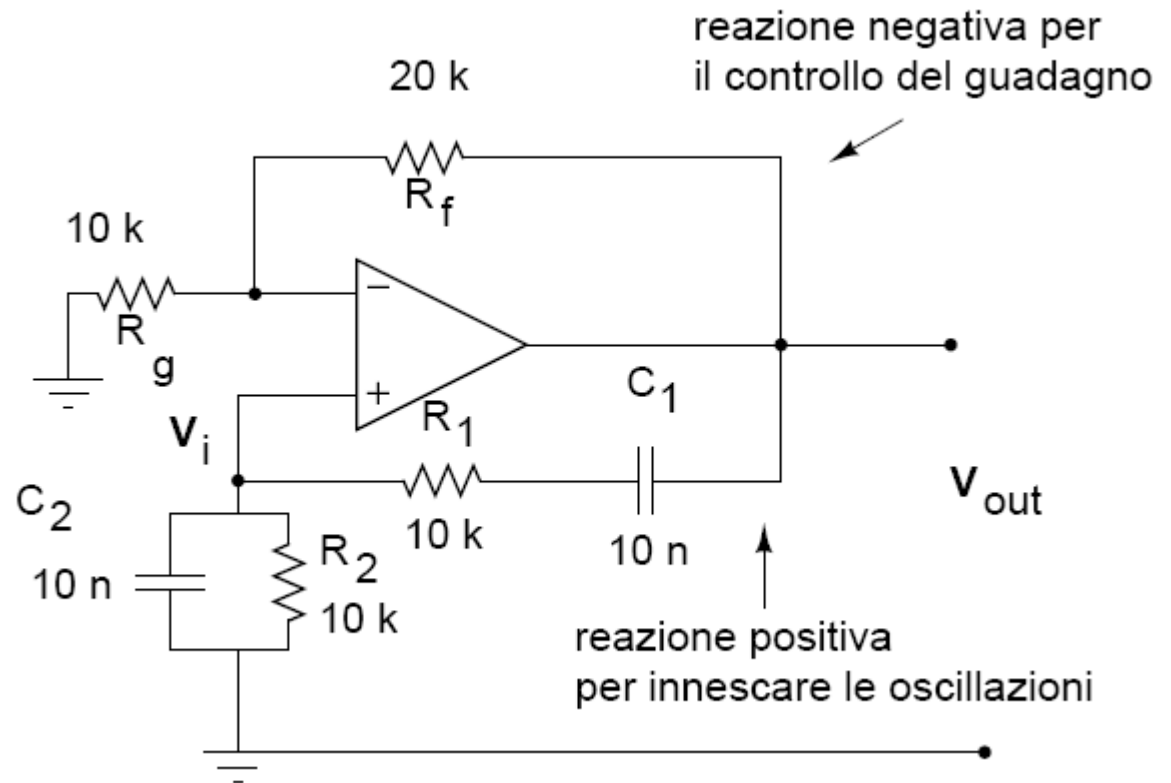
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -A \frac{R/A}{R/A + 1/(i\omega C)} = \frac{-i\omega RC}{1 + i\omega RC/A} \simeq -i\omega RC$$

# RISPOSTA IN FREQUENZA

- È difficile realizzare un buon derivatore perchè deve avere guadagno elevato ad alte frequenze, mentre gli op amp reali hanno un comportamento tipo passa-basso (il guadagno decresce con f)!



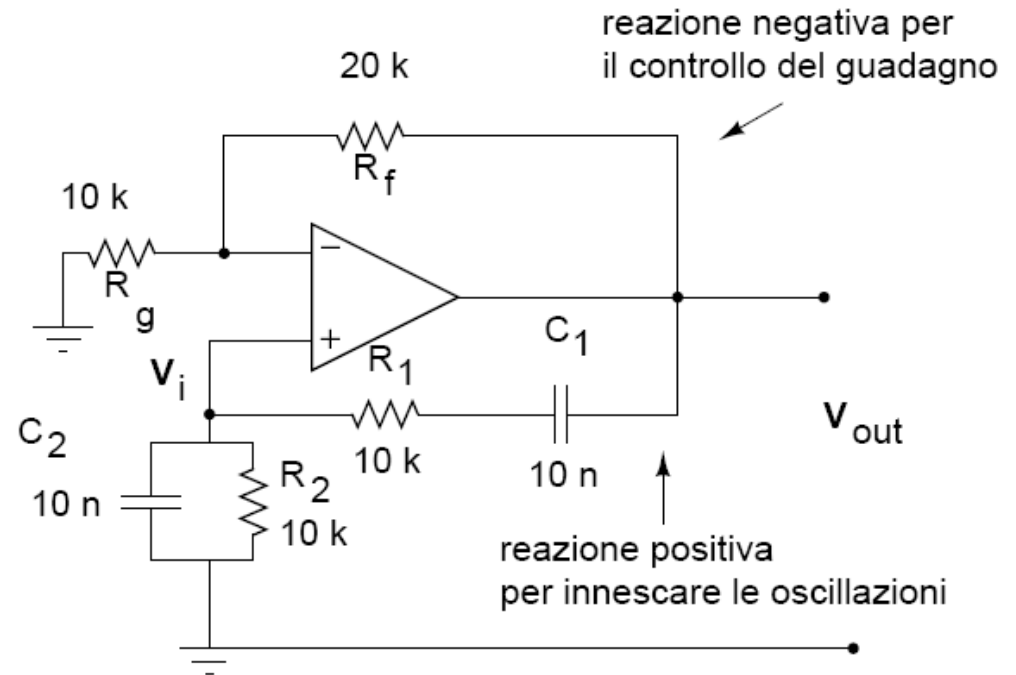
# Oscillatore



itiva e negativa. Fisicamente, accade quanto segue: un minimo sbilanciamento delle tensioni in ingresso (dovuto alla fase di accensione oppure ad un segnale spurio  $V_i$  sempre presente nella vita reale) passa in uscita e torna all'ingresso perfettamente in fase col segnale di innesco  $V_i$  (secondo criterio di Barkhausen). Il sistema tende a smorzarsi in assenza di amplificazione. A questo punto interviene la reazione negativa, che fornisce, con le resistenze  $R_f$  ed  $R_g$ , l'amplificazione necessaria a mantenere le oscillazioni (primo criterio di Barkhausen).

$$Z_s = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} = R_1 - \frac{i}{\omega C_1}$$

$$Z_p = R_2 \parallel \frac{1}{i\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + i\omega R_2 C_2}$$



$$\frac{V_i}{V_{out}} = \frac{Z_p}{Z_s + Z_p} = \frac{R_2}{R_2 + (R_1 - i/\omega C_1)(1 + i\omega R_2 C_2)}$$

$$= \frac{\omega R_2 C_1}{\omega(R_2 C_1 + R_1 C_1 + R_2 C_2) + i(\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1)}$$

$$\omega_0^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1 = 0 \longrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \cdot \frac{V_i}{V_{out}} = \frac{1}{3}$$

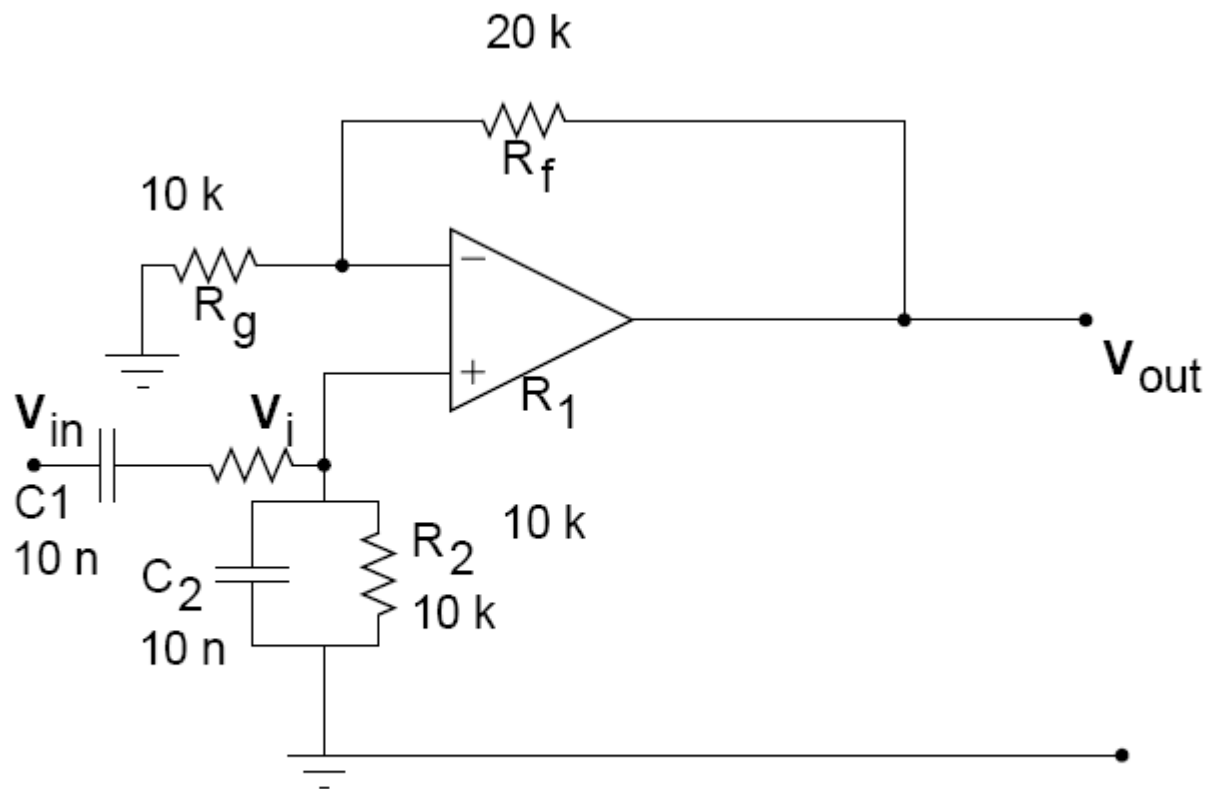


Figure 6.19: Circuito aperto corrispondente all'oscillatore a ponte di Wien

$$\frac{V_{out}}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_g} = 3, \quad R_f = 2 R_g$$

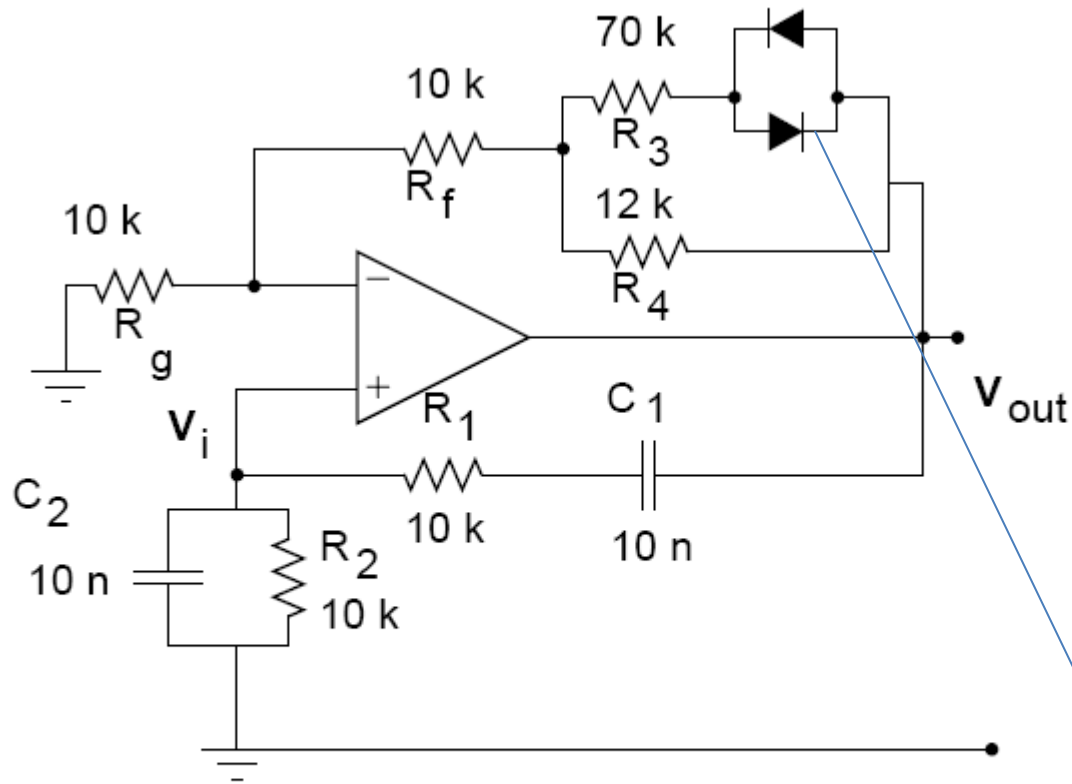
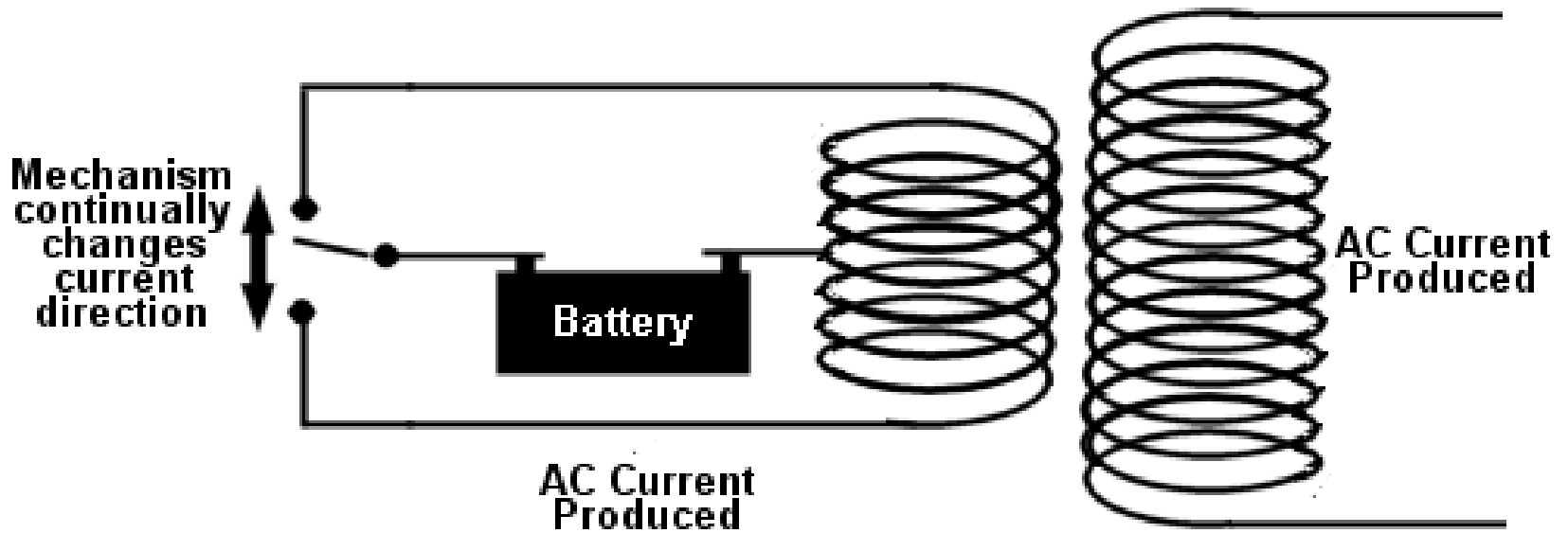


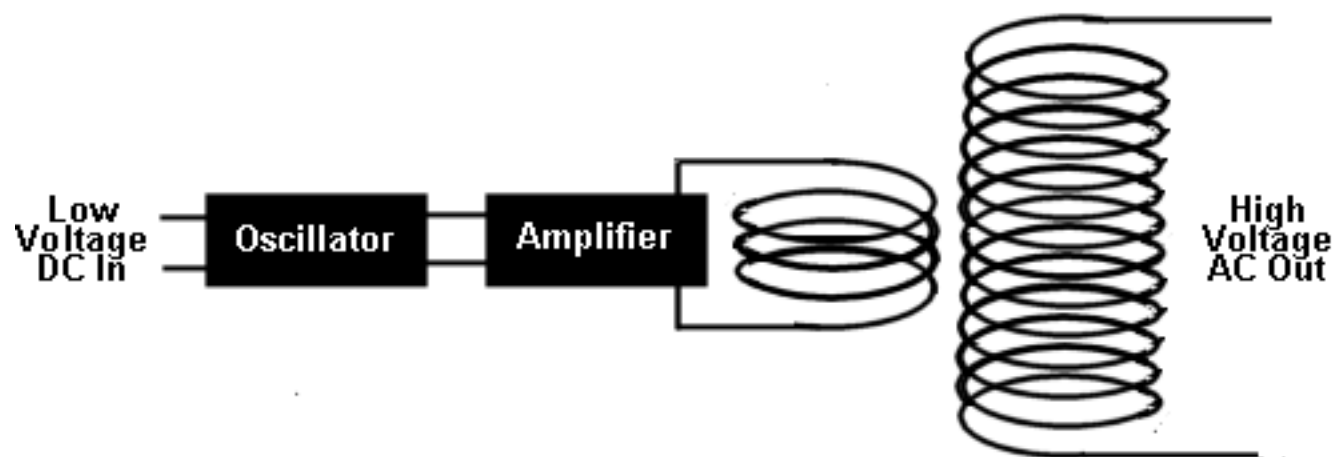
Figure 6.20: Oscillatore a ponte di Wien con stabilizzatore a diodi.

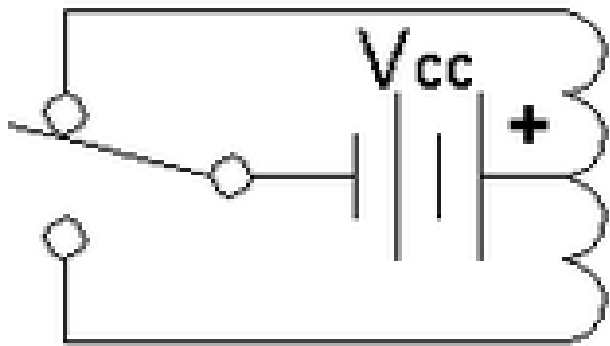
$$G = 1 + \frac{R_f + R_4}{R_g} \simeq 3.2 .$$

$$G = 1 + \frac{R_f + R_3 || R_4}{R_g} \simeq 3.02 .$$

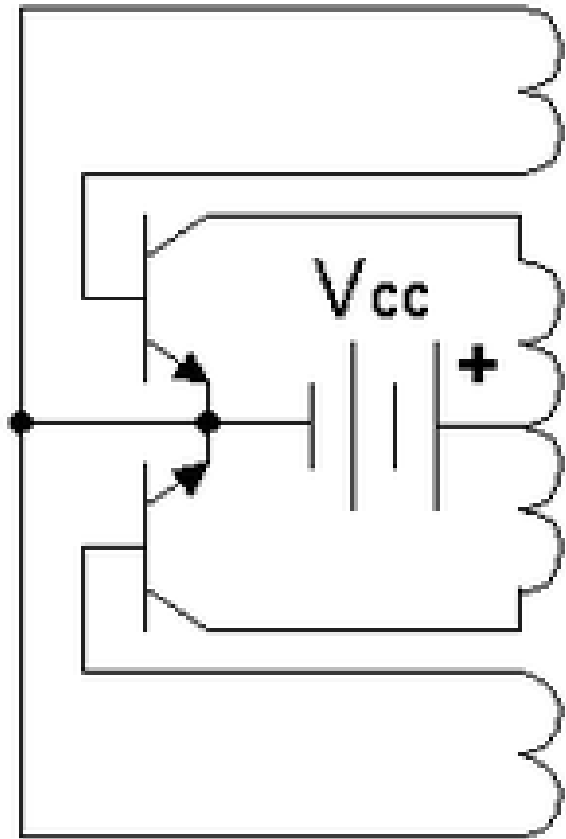








Output

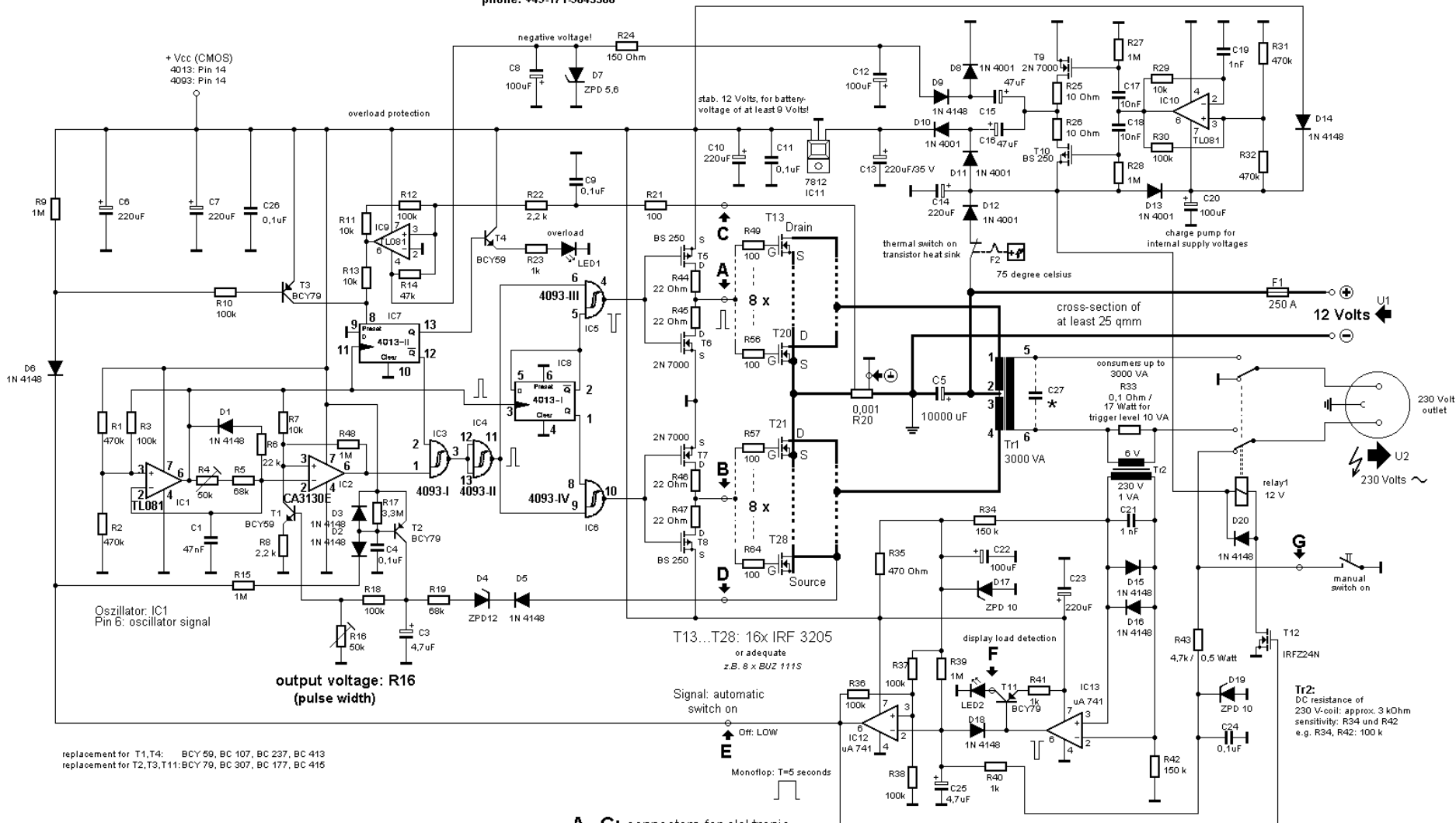


Output

# 3000 VA Power-Inverter 12 V -> 230 V "modified sinus"

professional edition

phone: +49-171-9843586



replacement for T1,T4: BCY 59, BC 107, BC 237, BC 413  
 replacement for T2,T3,T11: BCY 79, BC 307, BC 177, BC 415

output voltage: R16  
 (pulse width)

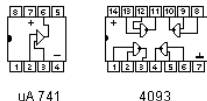
T13...T28: 16x IRF 3205  
 or adequate  
 z.B. 8 x BUZ 111S

Signal: automatic  
 switch on

Dr: LOW

Monoflop: T=5 seconds

A...G: connectors for electronic  
 between A and C a 100uA-meter may be connected



automatic load detection (Option)

if connection on "E" will be disconnected the inverter would work continuously. The load must then be connected to 5 and 6 of the transformer. (all parts of the load-detection will be obsolete)

\*: C27: 100 pF ... 100 nF / 250 V ~

if load detection would switch off no more condenser C27 must be connected in parallel to the transformer coil. The exact value must be determined by experiment. In most cases no condenser will be required.

|  |
|--|
| Erstellt von: W.-G. Gfrörer  |
| Erstellt am: 04.12.98  |
| Geändert am: 20.01.2002  |
| 50 Hz-Rechteckwechsellrichter für ohmsche u. induktive Last<br>12 V / 230 Veff<br>Tp=25%<br>Us=325V ("modified Sinus 230") |

**Radio**

**Ricevitore**

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(i_C + i_S) \quad \text{tale che:}$$

$i_S = 0$  e  $i_C \neq 0$  in casi stazionari

$i_S \neq 0$  e  $i_C = 0$  in casi non-stazionari

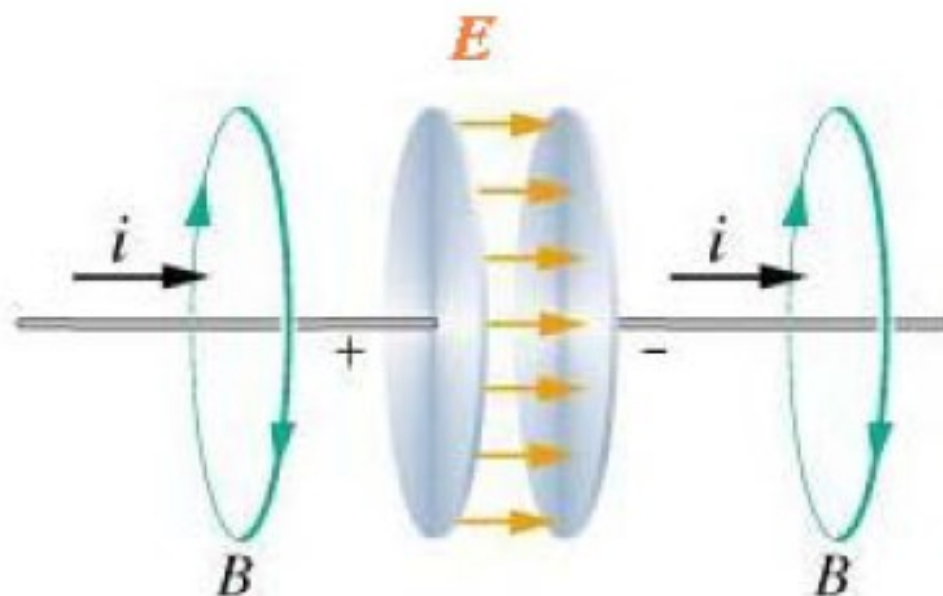


Fig. 2

$$V(t) = E(t)d \quad \text{e} \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \Rightarrow q(t) = CV(t) = \frac{\epsilon_0 S}{d} E(t)d = \epsilon_0 SE(t) \Rightarrow q(t) = \epsilon_0 SE(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d(\epsilon_0 SE(t))}{dt} = \epsilon_0 \frac{dSE(t)}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E(t)}{dt}$$

Se scriviamo le quattro equazioni precedenti per uno spazio vuoto dove non ci sono nè cariche elettriche ( $q = 0$ ) nè correnti ( $i = 0$ ) otteniamo delle equazioni completamente simmetriche :

$$1) \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

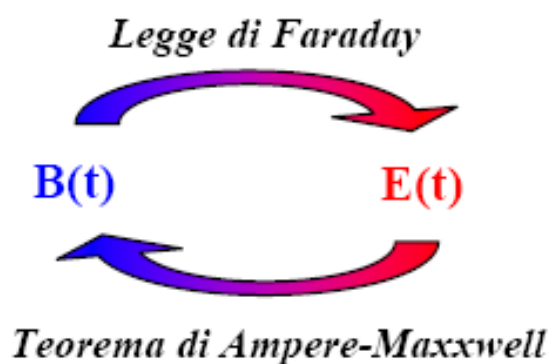
$$3) \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$2) \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

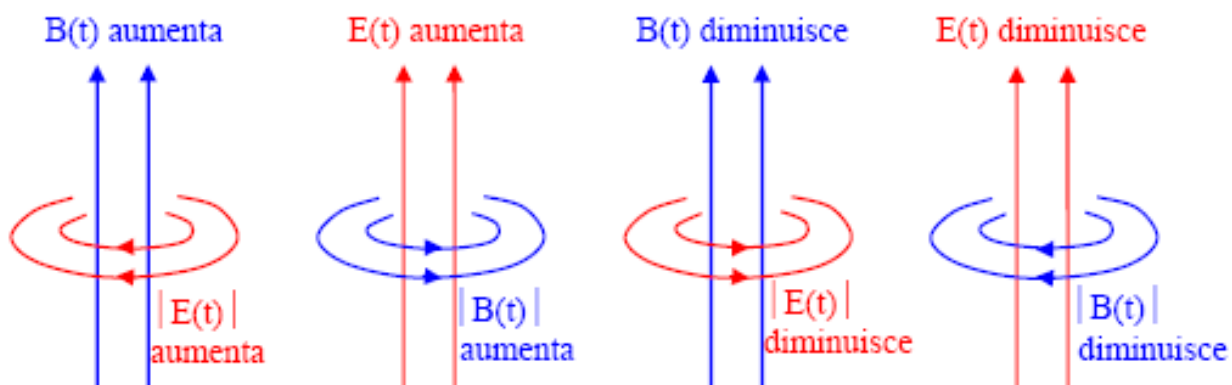
$$4) \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Esse dicono che:

- a) un campo  $\vec{B}(t)$  genera, tramite l'equazione 2, un campo  $\vec{E}(t)$  che genera, tramite l'equazione tramite 4, un campo  $\vec{B}(t)$  ecc, ecc,.....

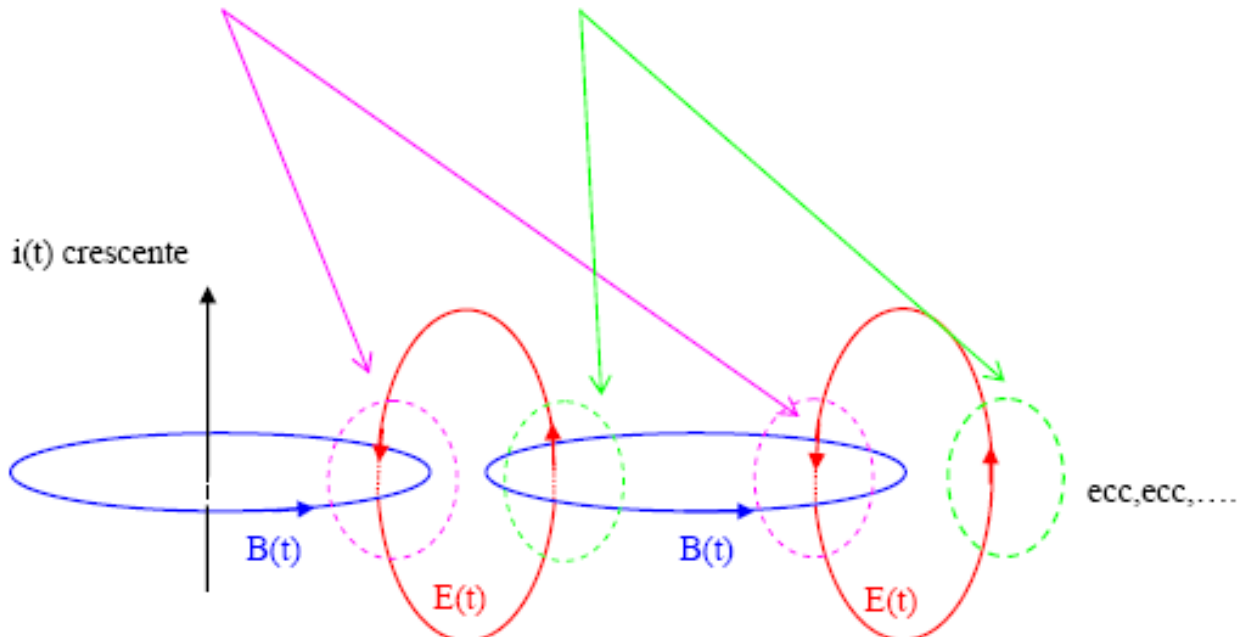


***I campi si autogenerano e autosostengono***



Legge di Faraday

Legge di Ampere-Maxwell



Questa nuova realtà fatta di campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  che esistono nello spazio vuoto, che si autogenerano e autosostengono sono **le onde elettromagnetiche**.

Nome

Forma differenziale

Forma integrale

[Teorema di Gauss](#) per il campo elettrico

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

[Teorema del flusso](#) per il campo magnetico

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0$$

[Legge di Faraday](#)

(circuitazione del campo elettrico)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

[Legge di Ampère](#)

(circuitazione del campo magnetico)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I + \mu \epsilon \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$



$$\mathbf{E} = \nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \nabla\Phi,$$

$$\phi = \phi_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

Fissando la relazione detta gauge di Lorentz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,$$

dove  $\mu$  ed  $\epsilon$  sono la permeabilità magnetica ed elettrica del mezzo, che è omogeneo ed isotropo, sostituendo in essa le (7.3, 7.4) si ottiene per  $\Phi$ :

$$\nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla A_0 + \mu\epsilon \frac{\partial \phi_0}{\partial t} ,$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} ,$$

$$\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho ,$$

# EQUAZIONI DI MAXWELL ①

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$c^2 \underline{\nabla} \times \underline{B} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\underline{E} = - \underline{\nabla} \phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

Sostituendo nelle equazioni di Maxwell con il gauge di Lorentz

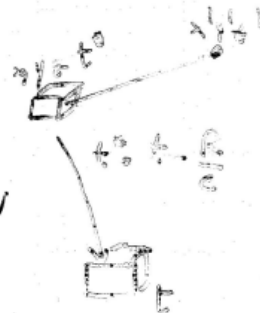
$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 \underline{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = - \mu \underline{J}$$

$$\nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = - \rho / \epsilon$$

$$A(x', t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\underline{J}(x, y, z, t^*)}{R} dV$$

$$\phi(x', t) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \int_V \frac{\rho(x, y, z, t^*)}{R} dV$$



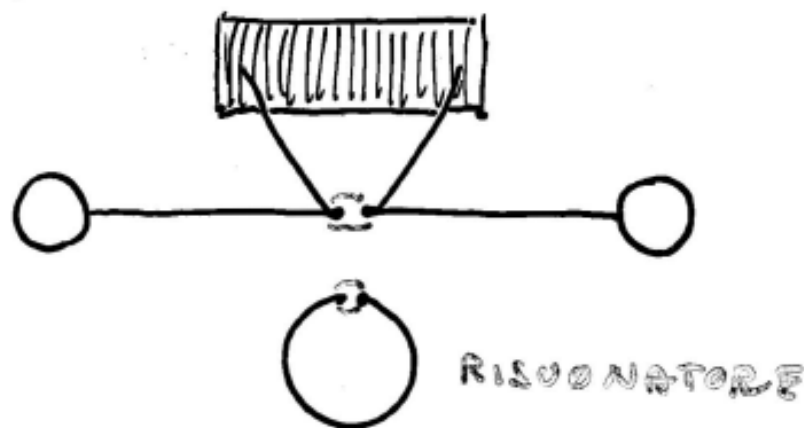
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}', t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(x, y, z, t^*)}{R} dx dy dz ,$$

$$\phi(\mathbf{x}', t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(x, y, z, t^*)}{R} dx dy dz .$$

$$t^* = t - \frac{R}{c}$$

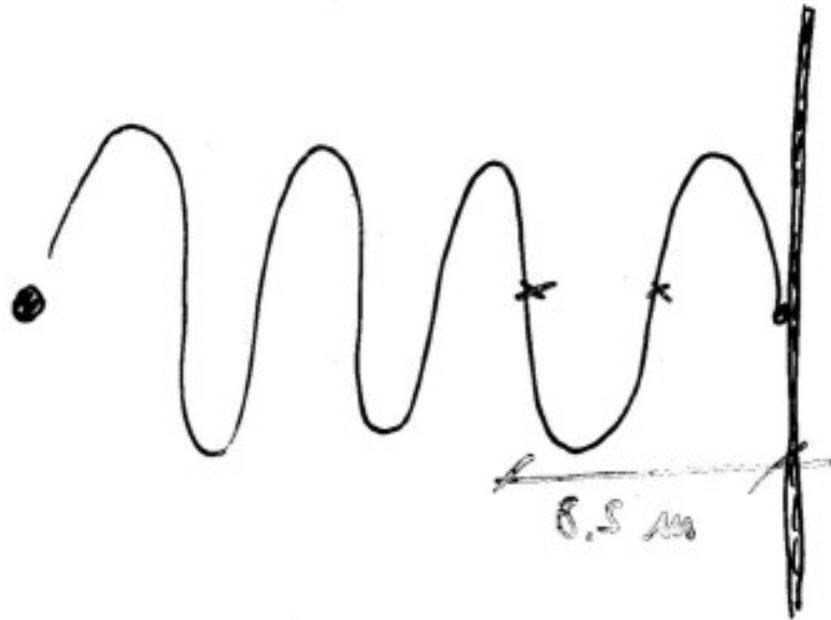
# LE ESPERIENZE DI HERTZ <sup>(2)</sup> (1888)

Circuito oscillante aperto:  $\underline{E}$  e  $\underline{B}$  localizzati  
nella stessa regione ed  $\approx$  ortogonali tra loro



$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 40 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

Misura della Velocità



lo schermo  
crea onde  
stazionarie

$$v = \lambda \nu = 8.5 \cdot 40 \cdot 10^6 \approx 3.4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

---

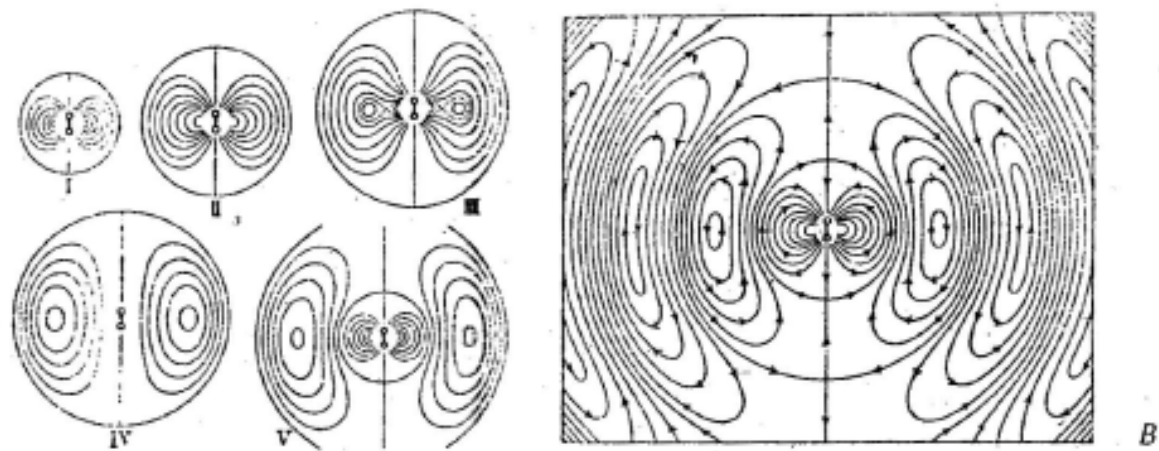
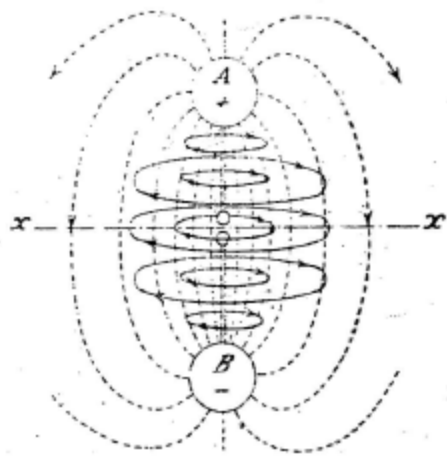


Figura 10.24

*A — Le linee del campo elettrico e del campo magnetico nei dintorni all'oscillatore di Hertz.*

*B — L'andamento delle linee del campo elettrico prodotto dall'oscillatore di Hertz a tempi successivi. In IV la situazione ad 1/4 di periodo, quando l'oscillatore è elettrostaticamente scarico ed il campo elettrico preesistente non è più ad esso connesso. Nel riquadro dopo due periodi di oscillazione.*

*Da Hertz, 1892.*

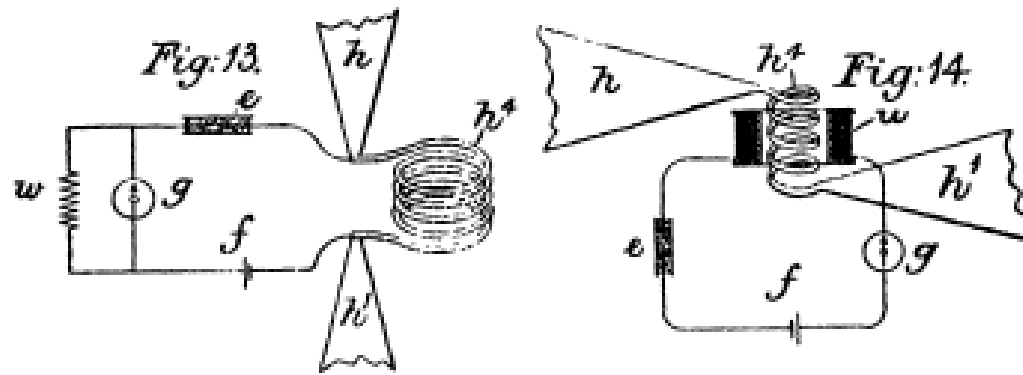


Fig. VIa. Lodge's Coupled-circuit Receiver (see page 130).

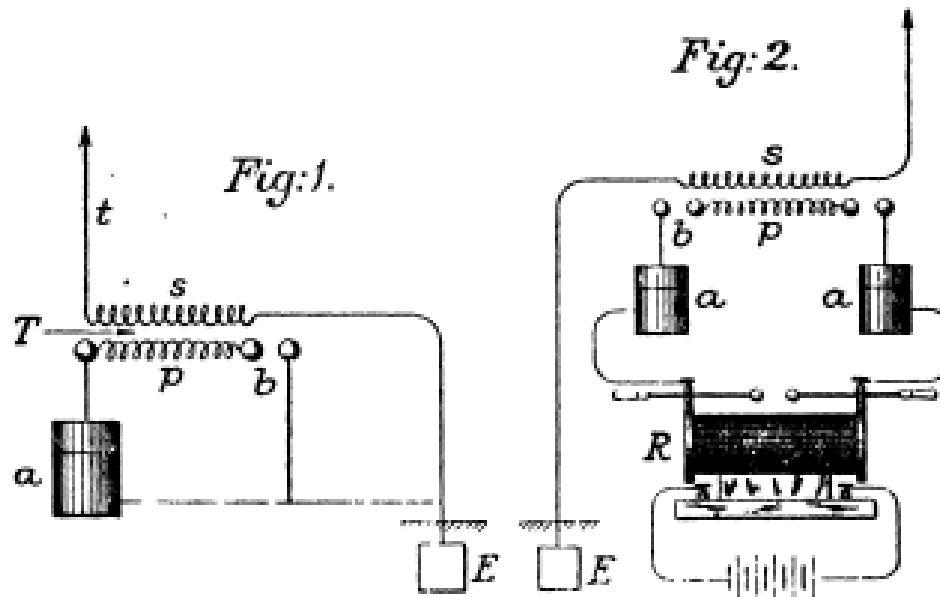
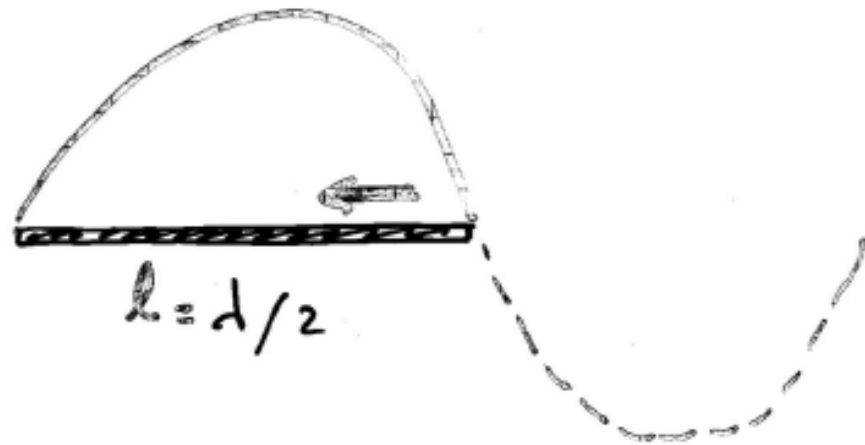


Fig. VII. Braun's Coupled-circuit Transmitter.





$$1 \text{ MHz} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2.99 \cdot 10^8 \text{ m}}{10^6} \approx 299 \text{ m}$$

Antenna ideale  $\approx 150 \text{ m}$ .

# antenne

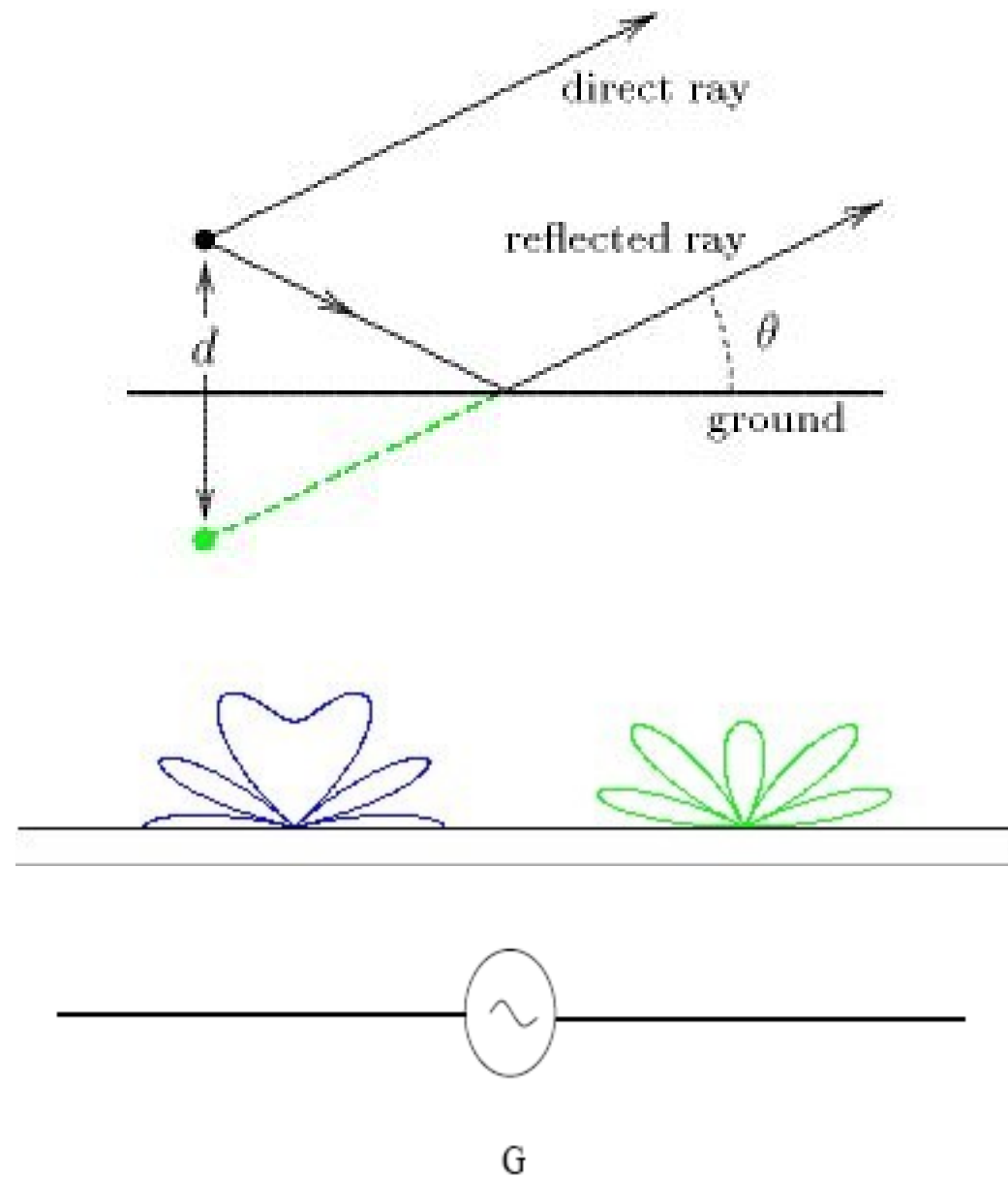


Figure 7.1: Antenna dipolare

# Modulazione di ampiezza

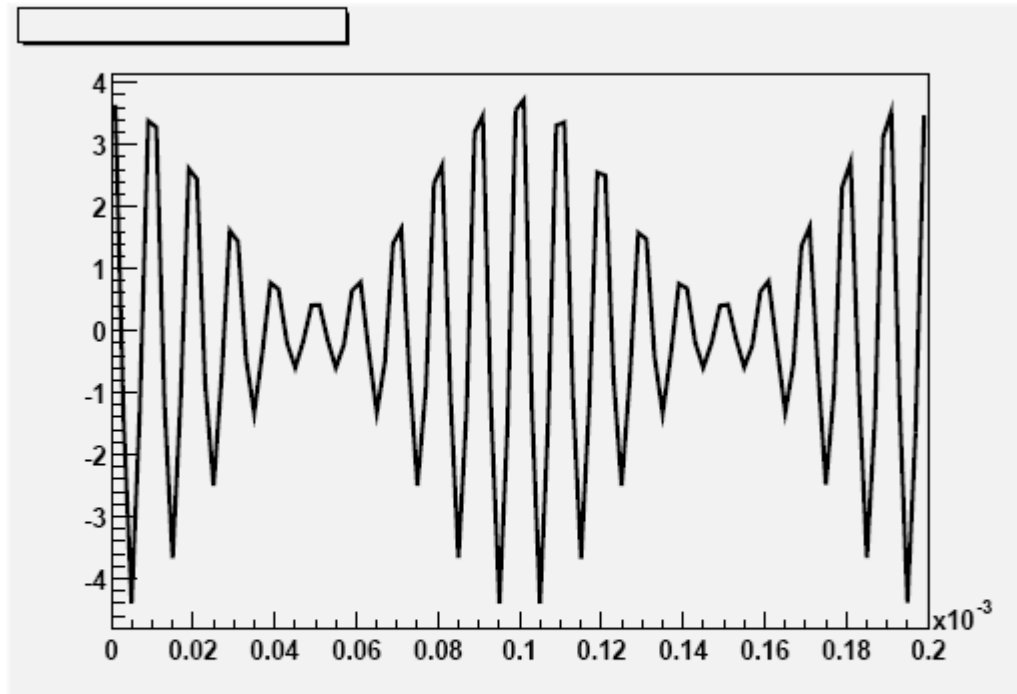


Figure 7.2: Segnale modulato in ampiezza, che rappresenta un'onda portante di frequenza  $\nu_p = 10^5 \text{ Hz}$  ed ampiezza  $V_p = 2.5 \text{ V}$  modulata da un segnale di frequenza  $\nu_m = 10^4 \text{ Hz}$  e coefficiente di modulazione  $m = 0.8$ .

$$\begin{aligned} V &= V_p \cos(\omega_p t) + V_m \cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t) \\ &= V_p [1 + m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t), \quad m = \frac{V_m}{V_p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_p[1 + m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t) &= V_p \cos(\omega_p t) \\
 &+ \frac{m V_p}{2} \cos[(\omega_p - \omega_m)t] \\
 &+ \frac{m V_p}{2} \cos[(\omega_p + \omega_m)t] .
 \end{aligned}$$

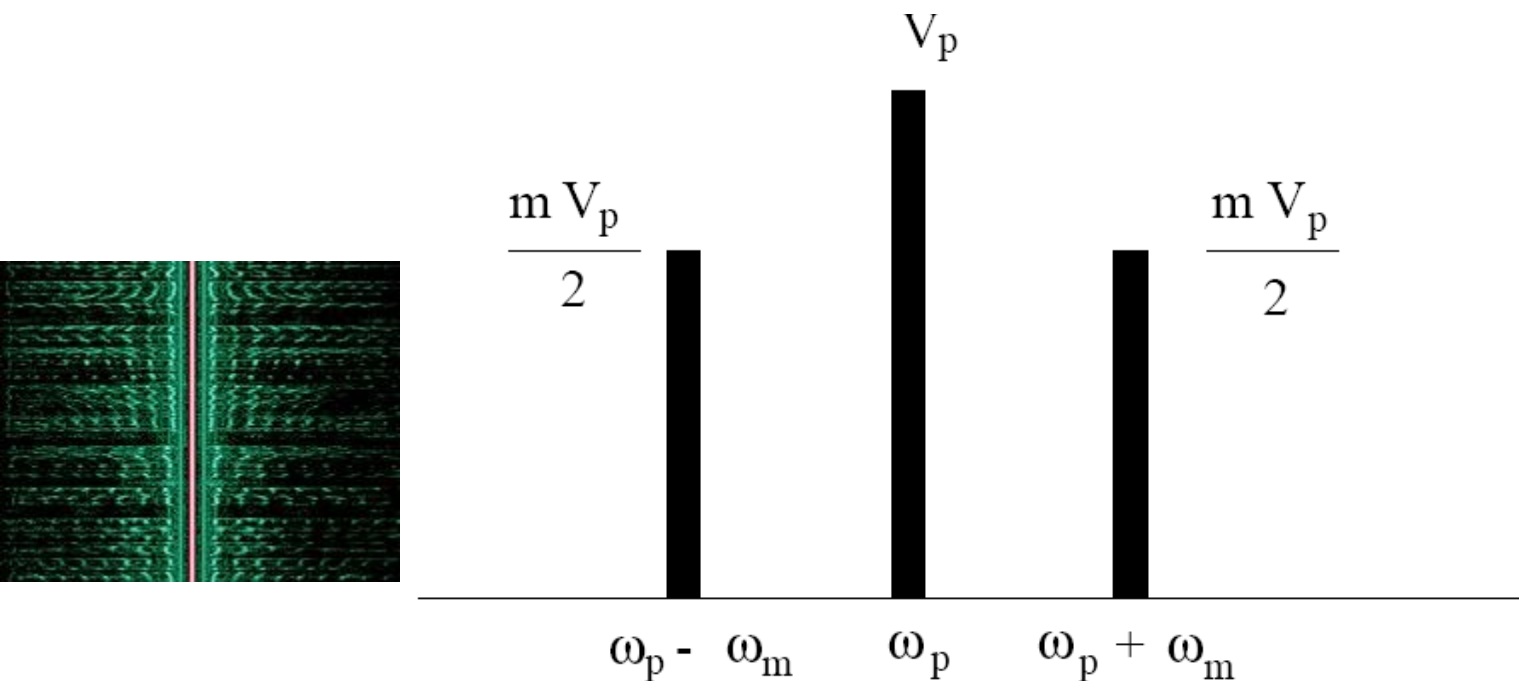
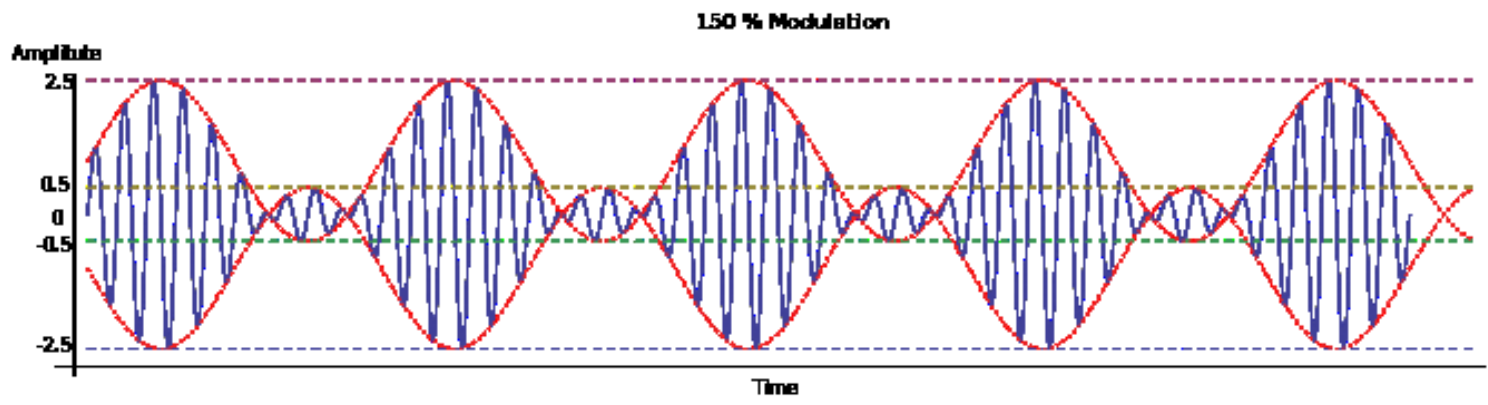
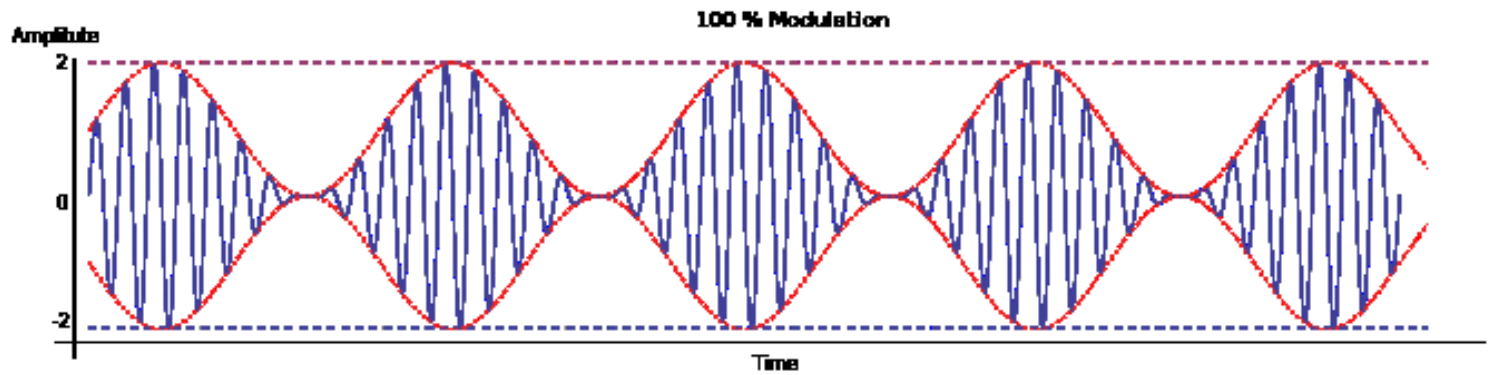
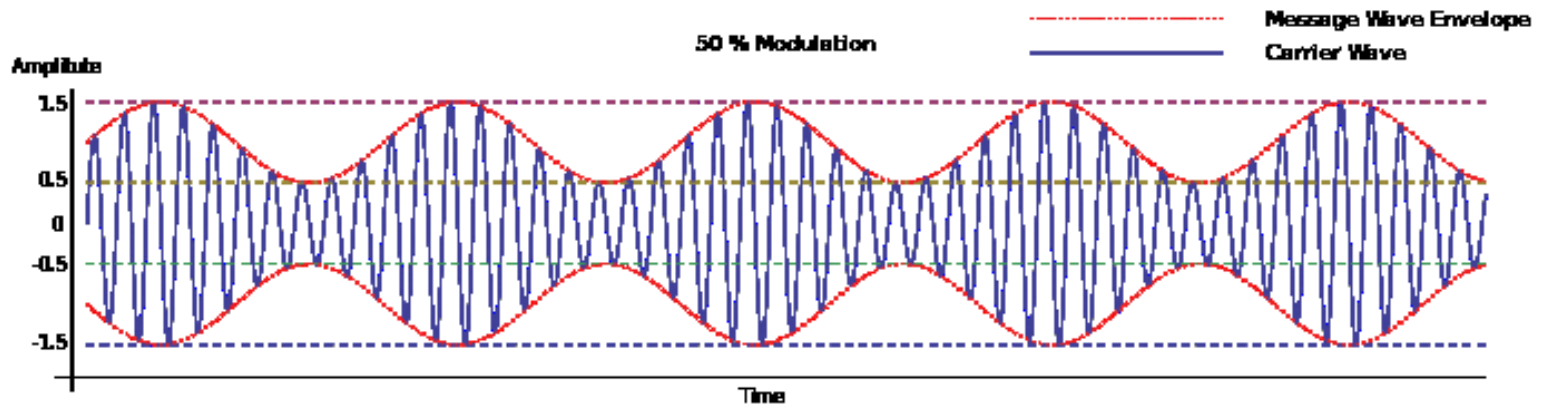


Figure 7.3: Spettro di un segnale modulato.



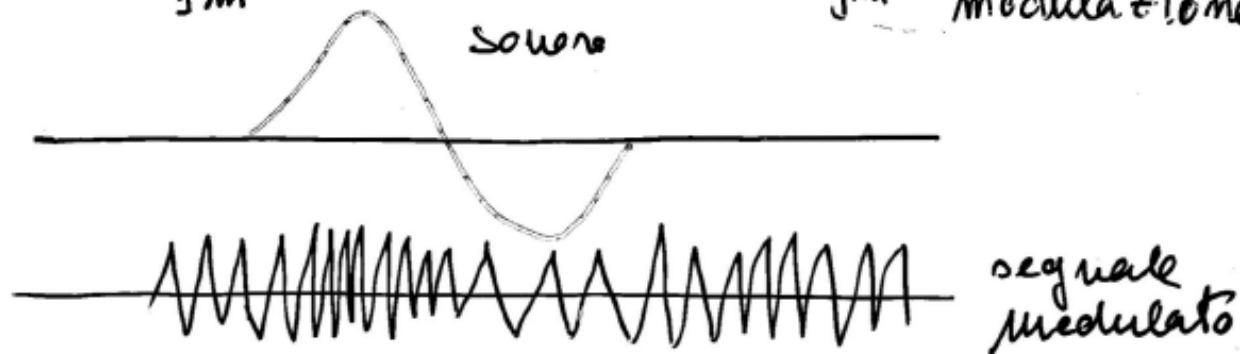
<http://ocw.mit.edu/resources/res-6-007-signals-and-systems-spring-2011/video-lectures/lecture-14-demonstration-of-amplitude-modulation>

# Modulazione di frequenza

$$A \cos\left[\left(\omega_p + k V_m \cos \omega_m t\right) t\right]$$

$$f = f_p + \frac{\Delta f}{f_m} \cos \omega_m t$$

$\frac{\Delta f}{f_m}$  indice di modulazione

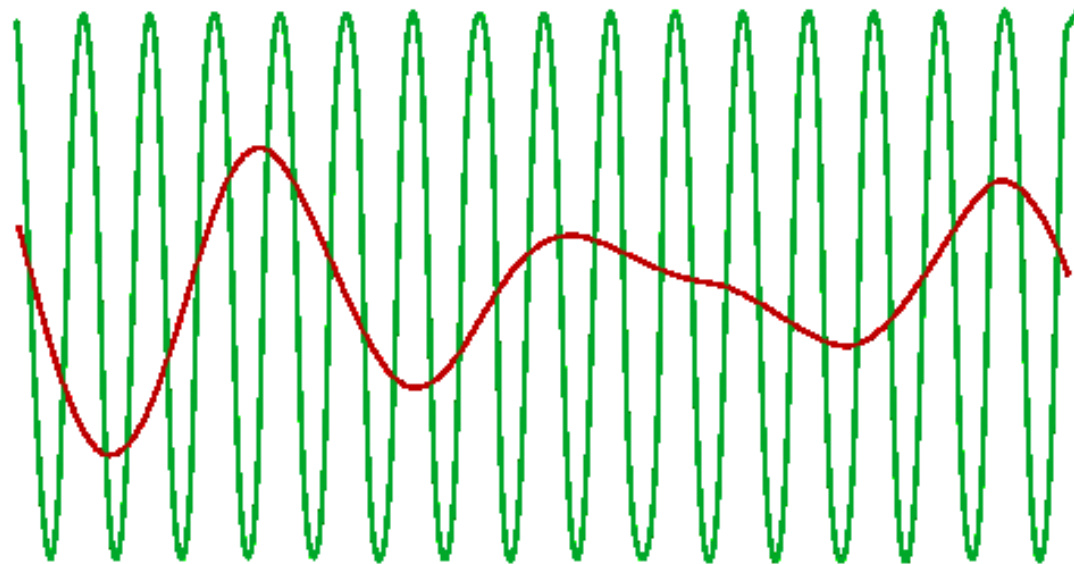


Vi sono molte bande laterali

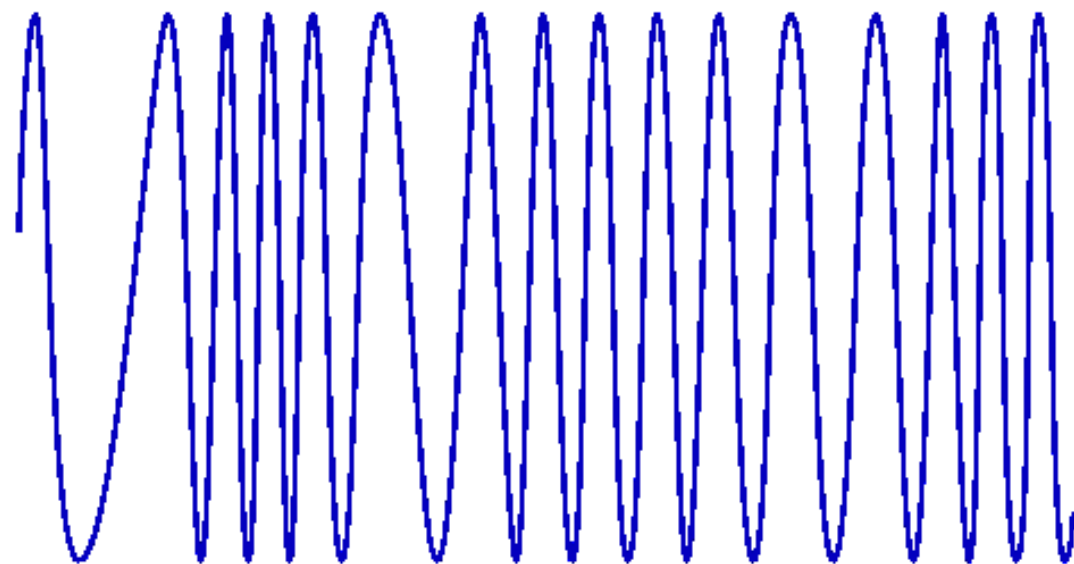
$$\begin{array}{ccccccc} \omega_p & (\omega_p - \omega_m) & (\omega_p + \omega_m) & (\omega_p - 2\omega_m) & (\omega_p + 2\omega_m) & & \\ & (\omega_p - 3\omega_m) & (\omega_p + 3\omega_m) & \dots & & & \end{array}$$

carrier —

signal —



output —







Larghezza di banda:  $B = 2(\Delta f + f_m)$

$$\Delta f \approx 75 \text{ kHz} \rightarrow B \approx 180 \text{ kHz} = 0.18 \text{ MHz}$$

Necessaria una portante di alta frequenza.

FM      87 - 108      MHz

passi di 500 kHz

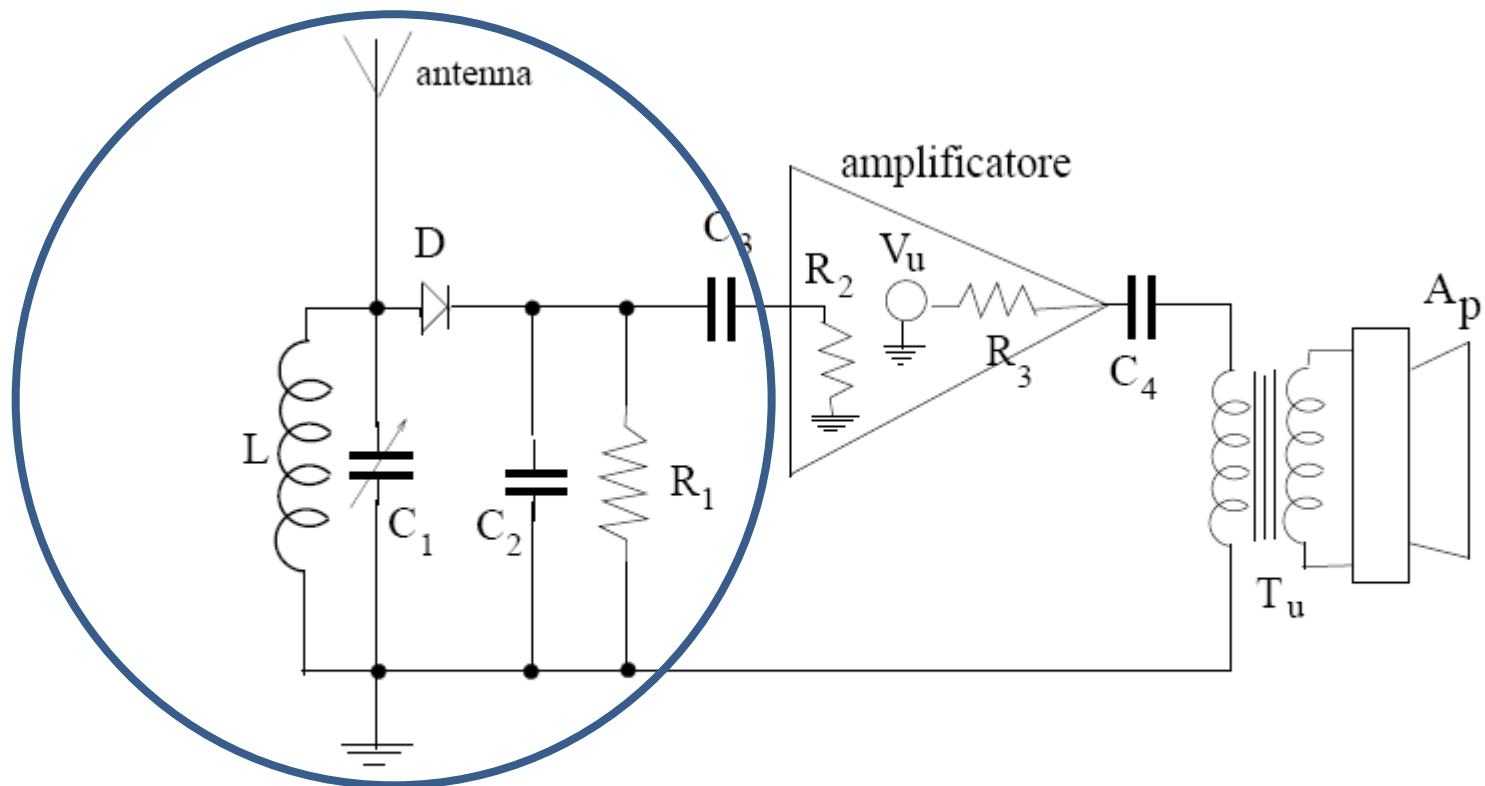


Figure 7.4: Circuito ricevente elementare per modulazione di ampiezza.  $L = 220 \mu H$ ,  $R_1 = 47 k\Omega$ ,  $C_2 = 1000 pF$ .

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C_1 + \frac{1}{R_p} . \quad (7.17)$$

Con la formula del partitore si calcola la tensione di uscita  $V$ , che è quella riferita a terra, in ingresso al diodo  $D$  di fig 7.4:

$$V = E \frac{Z}{Z + 1/(i\omega C_A)} = E \frac{1}{1 + 1/(i\omega C_A Z)} \quad (7.18)$$

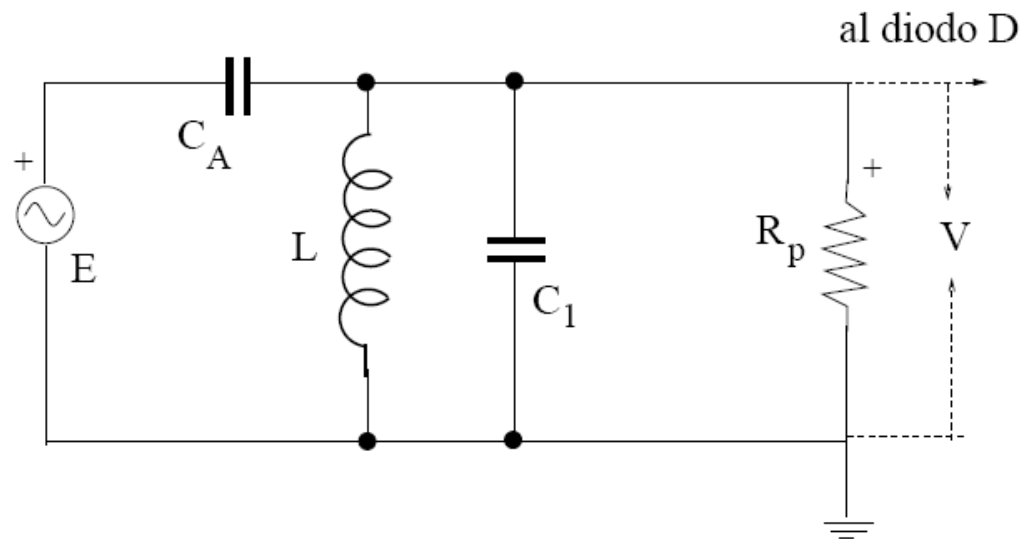


Figure 7.5: Circuito equivalente di ingresso per il ricevitore di fig. 7.4.

$$\frac{V}{E} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega^2 LC_A} + \frac{C_1}{C_A} - i \frac{1}{\omega C_A R_p}} .$$

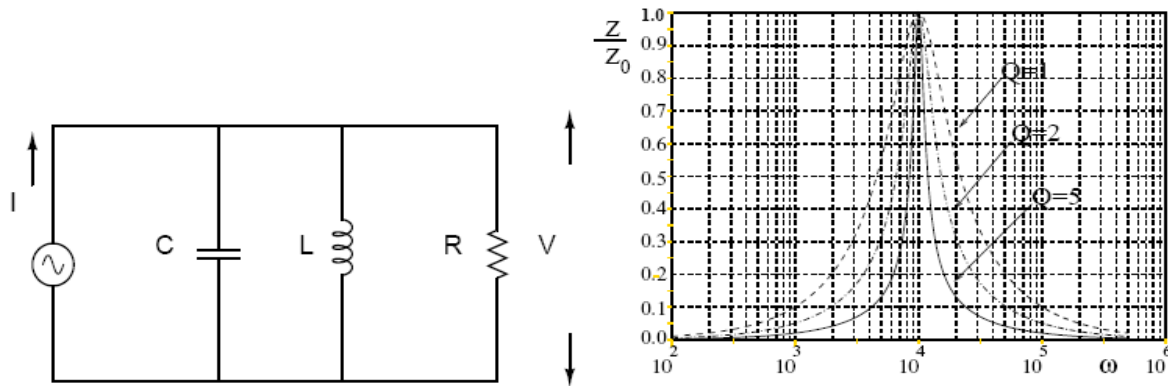
$$Q = \frac{R_p}{\omega_0 L} \gg 1 , \quad (7.22)$$

si trova:

$$\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = Q , \quad (7.23)$$

cioè la (7.22) esprime il fattore di merito del circuito di ingresso e  $\omega_2$  ed  $\omega_1$  sono simmetriche rispetto ad  $\omega_0$ . Si noti che il fattore di merito della (7.22) è l'inverso di quello del circuito  $RLC$  serie. Esso si può anche esprimere come:

$$Q = \omega_0 (C_A + C_1) R_p . \quad (7.24)$$



## 2.8 $RCL$ in parallelo con segnali sinusoidali

Possiamo brevemente identificare le proprietà del circuito  $RCL$  in parallelo di fig. 2.6 attraverso il principio di dualità di tab. 2.1.

In questo caso l'ammettenza totale del circuito

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) . \quad (2.55)$$

è *minima* (e quindi l'impedenza è *massima*) quando

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ,$$

in accordo con la tab. 2.1. In questo caso la tensione raccolta ai capi del parallelo è massima. L'andamento della tensione nel circuito parallelo è quindi simile a quello della corrente nel circuito serie. Alla risonanza, il parallelo

Inserendo in questa equazione il valore di  $Z$  della (7.17) si ottiene:

$$\frac{V}{E} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega^2 LC_A} + \frac{C_1}{C_A} - i \frac{1}{\omega C_A R_p}} . \quad (7.19)$$

Calcolando il modulo della (7.19) ed azzerando la derivata prima rispetto ad  $\omega$ , troviamo il valore della pulsazione di risonanza  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{[L(C_A + C_1) - L^2/(2R_p^2)]^{1/2}} , \quad (7.20)$$

dove si suppone che il valore  $R_p$  renda il radicando maggiore di zero. In corrispondenza di  $\omega_0$  il guadagno di ingresso assume il valore massimo, dato da:

$$\left[ \frac{V}{E} \right]_{\omega=\omega_0} = \frac{C_A R_p}{[LC_A + C_1) - L^2/(4R_p^2)]^{1/2}} . \quad (7.21)$$

$$V(\omega_0) = |\bar{Z}(\omega_0)| I = R I . \quad (2.56)$$

In base alla dualità applicata alla (2.39), gli estremi della banda passante sono in questo caso

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (2.57)$$

ed il fattore di merito (2.23) diventa:

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC . \quad (2.58)$$

È facile vedere che la (2.41) rimane invariata.

Utilizzando il fattore di merito, è facile vedere che l'andamento dell'impedenza complessa con la pulsazione segue una curva di tipo risonante:

$$\bar{Z} = \frac{R}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} , \quad (2.59)$$

il cui andamento diviso per  $Z_0 = R$  è riportato per valori diversi di  $Q$  in

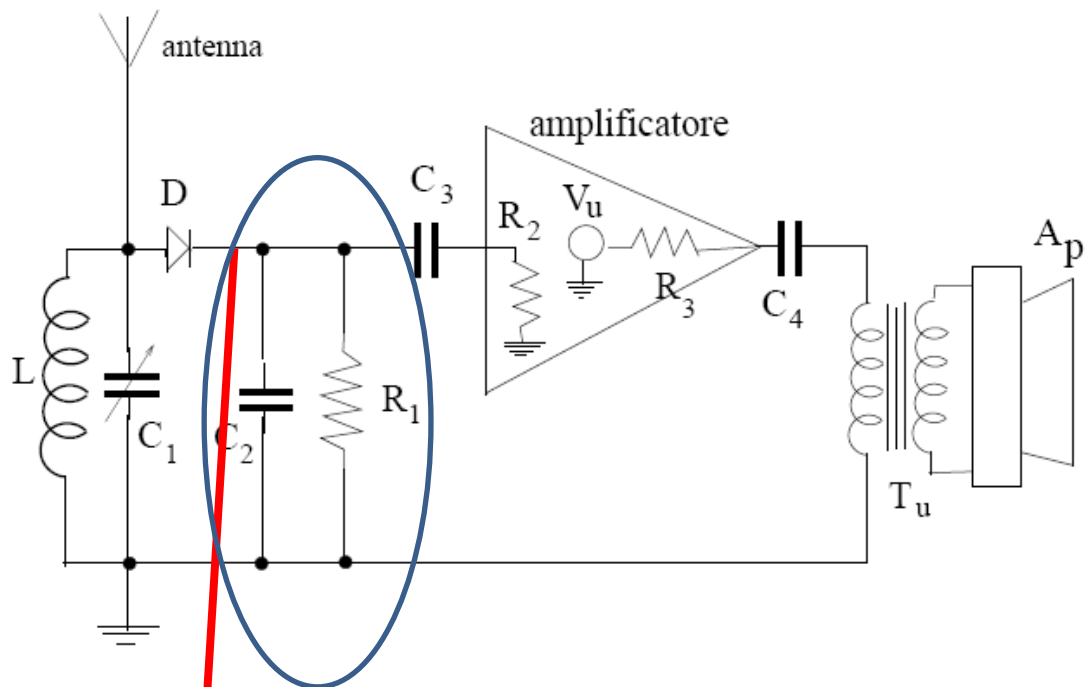


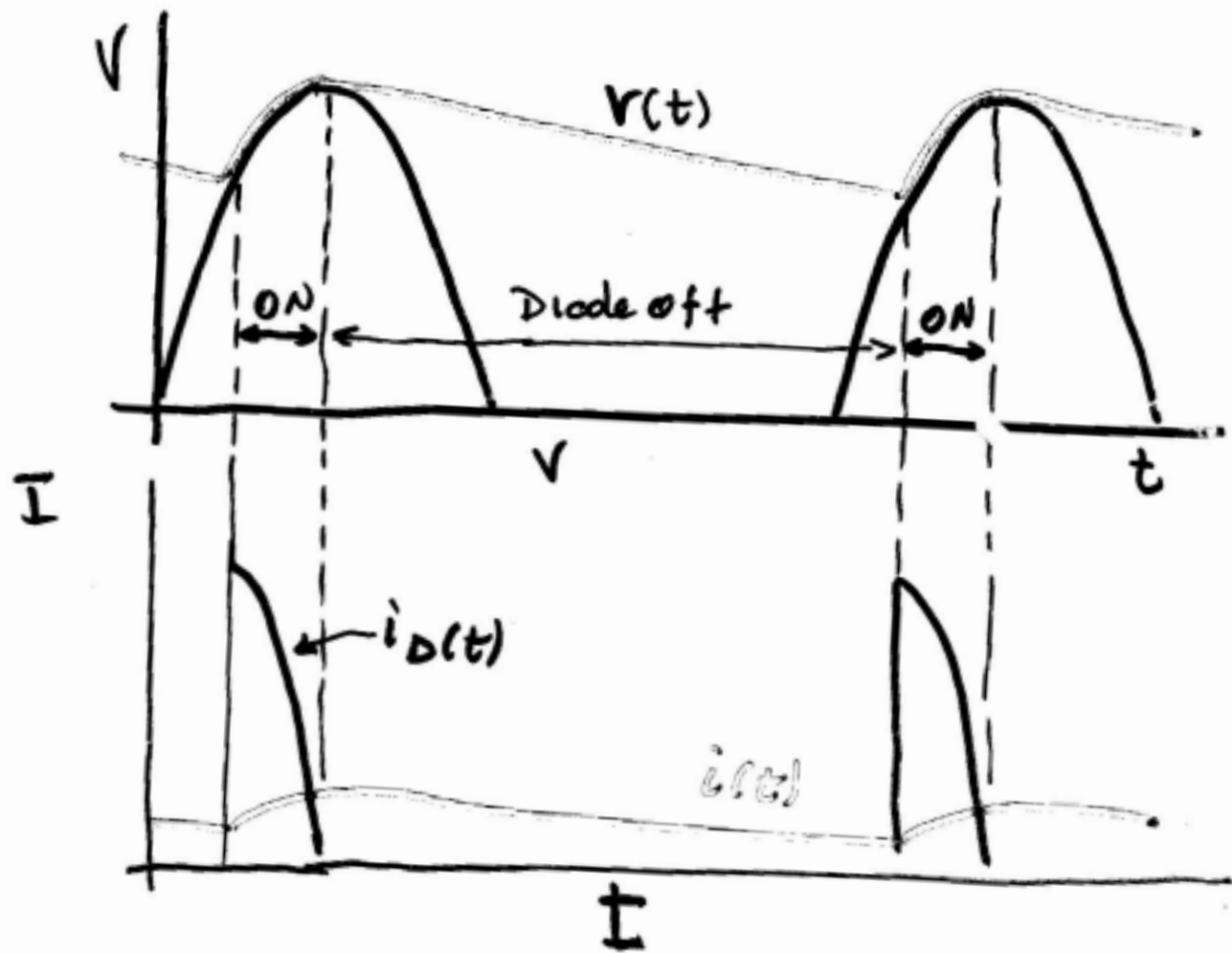
Figure 7.4: Circuito ricevente elementare per modulazione di ampiezza.  $L = 220 \mu H$ ,  $R_1 = 47 k\Omega$ ,  $C_2 = 1000 pF$ .



$$\omega_p R_1 C_2 \gg 1, \quad \text{ovvero} \quad R_1 C_2 \gg \frac{T_p}{2\pi},$$

$$\omega_m R_1 C_2 \ll 1, \quad \text{ovvero} \quad R_1 C_2 \ll \frac{T_m}{2\pi},$$





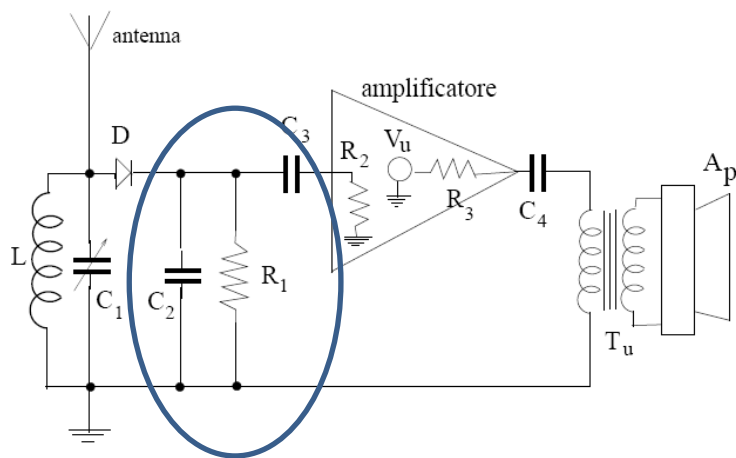


Figure 7.4: Circuito ricevente elementare per modulazione di ampiezza.  $L = 220 \mu H$ ,  $R_1 = 47 k\Omega$ ,  $C_2 = 1000 pF$ .

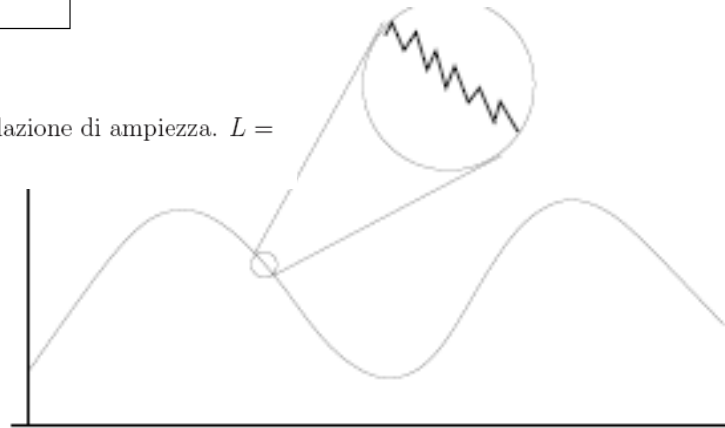


Figure 7.8: segnale di ingresso all'amplificatore. La struttura a tratti è visibile solo espandendo la scala a tempi molto inferiori a  $T_m$ .

- c) L'azione di  $R_1$  e  $C_2$  può anche essere vista in termini filtro passa-basso all'uscita del diodo  $D$ , calcolando l'impedenza parallelo di  $R_1$  e  $C_2$ :

$$|Z_{R//C}| = \left| \frac{R_1/(i\omega C_2)}{R_1 + 1/(i\omega C_2)} \right| \simeq \frac{R_1}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C_2)^2}} = \begin{cases} R_1 & \text{se } R_1 C_2 \ll T \\ 0 & \text{se } R_1 C_2 \gg T \end{cases} .$$

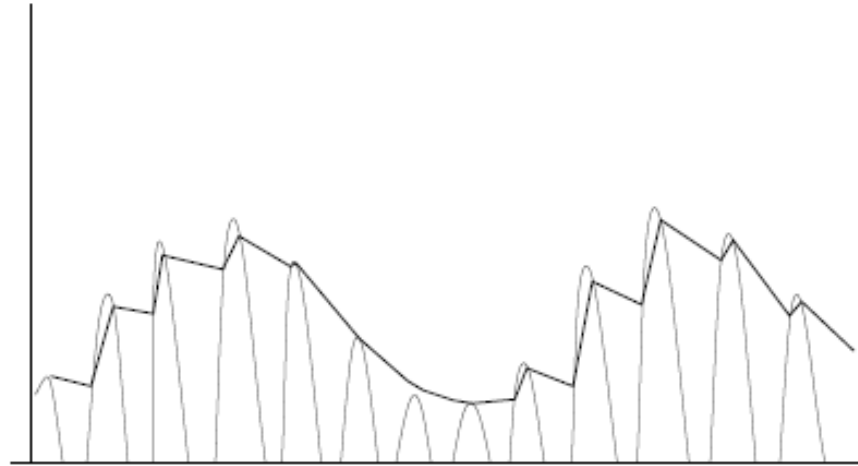


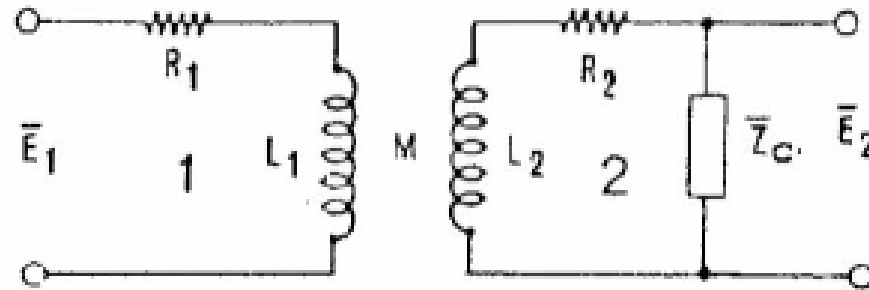
Figure 7.7: Demodulazione del segnale (linea a tratti in grassetto).

Grazie alle condizioni (7.25, 7.26), che possiamo riassumere come

$$T_p \ll R_1 C_2 \ll T_m , \quad (7.27)$$

$$\omega_m \ll \omega_o = \frac{1}{R_1 C_2} \ll \omega_p , \quad (7.28)$$

# Trasformatore di uscita: adattamento di impedenza



$$\begin{cases} -E + j\omega MI_2 + I_1 Z_1 = 0 \\ j\omega MI_1 + I_2 Z_2 = 0 \end{cases}$$

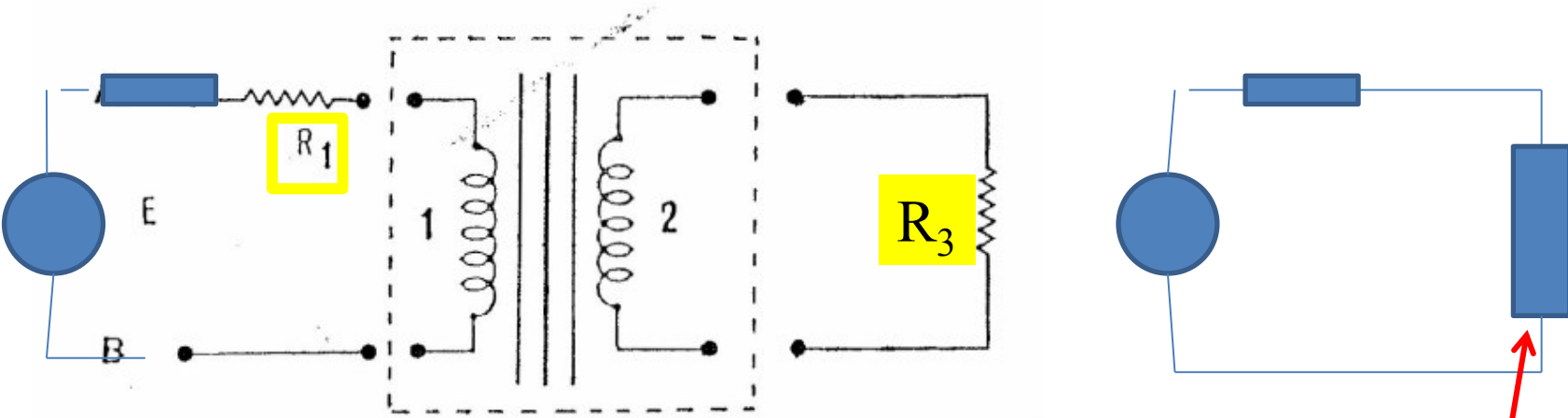
$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad Z_2 = R_2 + j\omega L_2 + Z_c$$

$$\begin{cases} -E + j\omega MI_2 + I_1 Z_1 = 0 \\ j\omega MI_1 + I_2 Z_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_2 = -\frac{j\omega M I_1}{Z_2} \Rightarrow I_1 = \frac{E}{Z_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2}}$$

$$Z_{eq} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + R_3} \quad Z_c = R_3$$

$$Z_{eq} = \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} = R \frac{\omega^2 M^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2} - j\omega L_2 \frac{\omega^2 M^2}{R^2 + \omega^2 L_2^2}$$



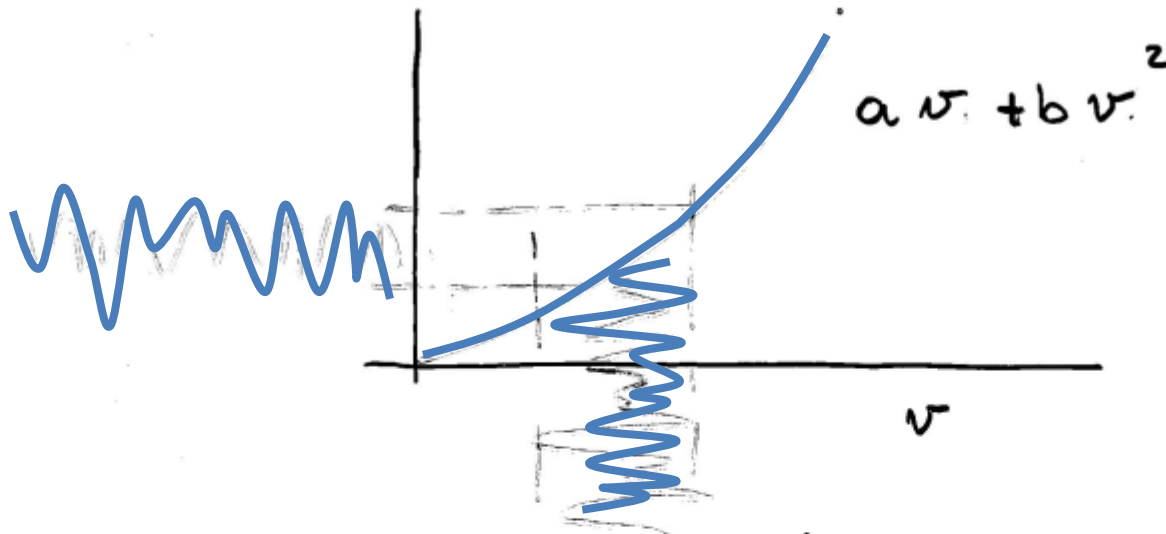
$$Z_{eq} = \frac{\omega^2 M^2}{R_3 + j\omega L_2} = R_3 \frac{\omega^2 M^2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} - j\omega L_2 \frac{\omega^2 M^2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2}$$

$$L = L_1 + L_{eq} = L_1 - L_2 \frac{\omega^2 M^2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} \xrightarrow{R_3 \ll \omega L_2} L_1 - L_2 \frac{\omega^2 M^2}{\omega^2 L_2^2} = 0$$

$$R = R_1 + R_3 \frac{\omega^2 M^2}{R_3^2 + \omega^2 L_2^2} \xrightarrow{R \approx R_3 \ll \omega L_2} R_1 + R_3 \frac{L_1}{L_2} = R_1 + R_3 \frac{N_1^2}{N_2^2}$$



# SUPERETERODINA



$$v_1 = V_1 \cos \omega_1 t, \quad v_2 = V_2 \cos \omega_2 t$$

$$V = a(v_1 + v_2) + b(v_1 + v_2)^2 =$$

$$\frac{1}{2} b(V_1^2 + V_2^2) + aV_1 \cos \omega_1 t + aV_2 \cos \omega_2 t +$$

$$\frac{1}{2} bV_1^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{2} bV_2^2 \cos 2\omega_2 t + bV_1 V_2 \cos(\omega_1 + \omega_2)t$$

$$+ bV_1 V_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t$$



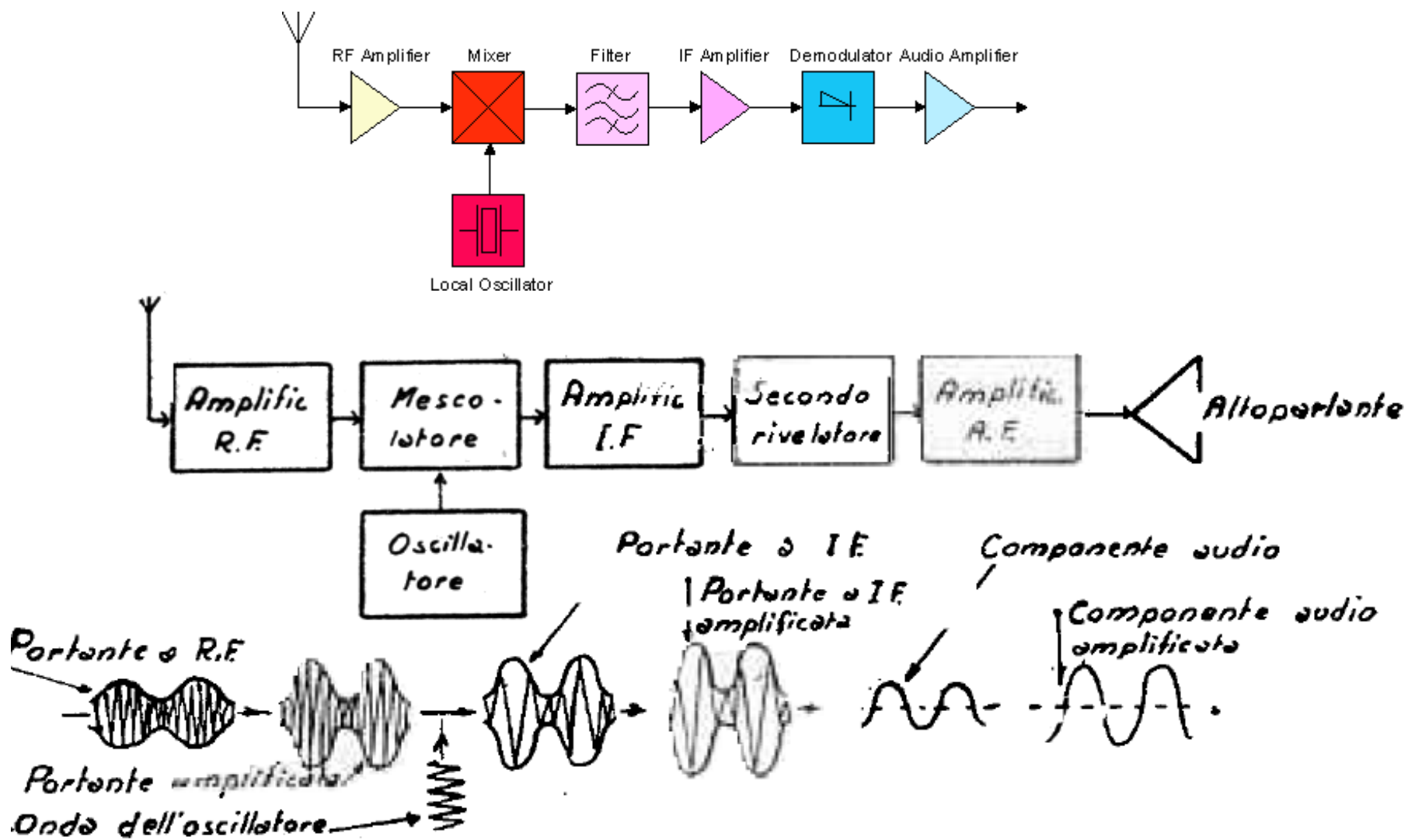
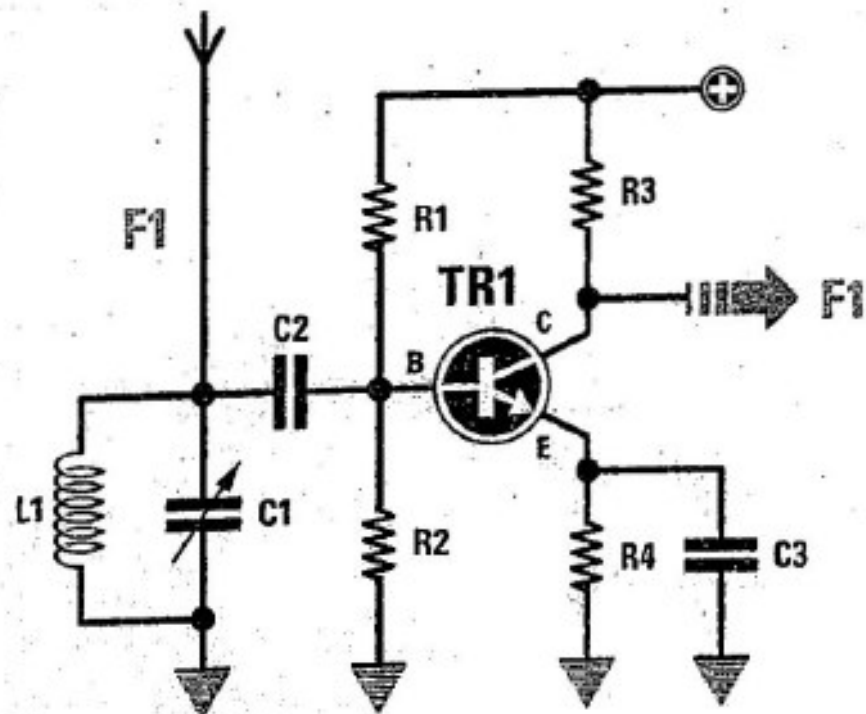
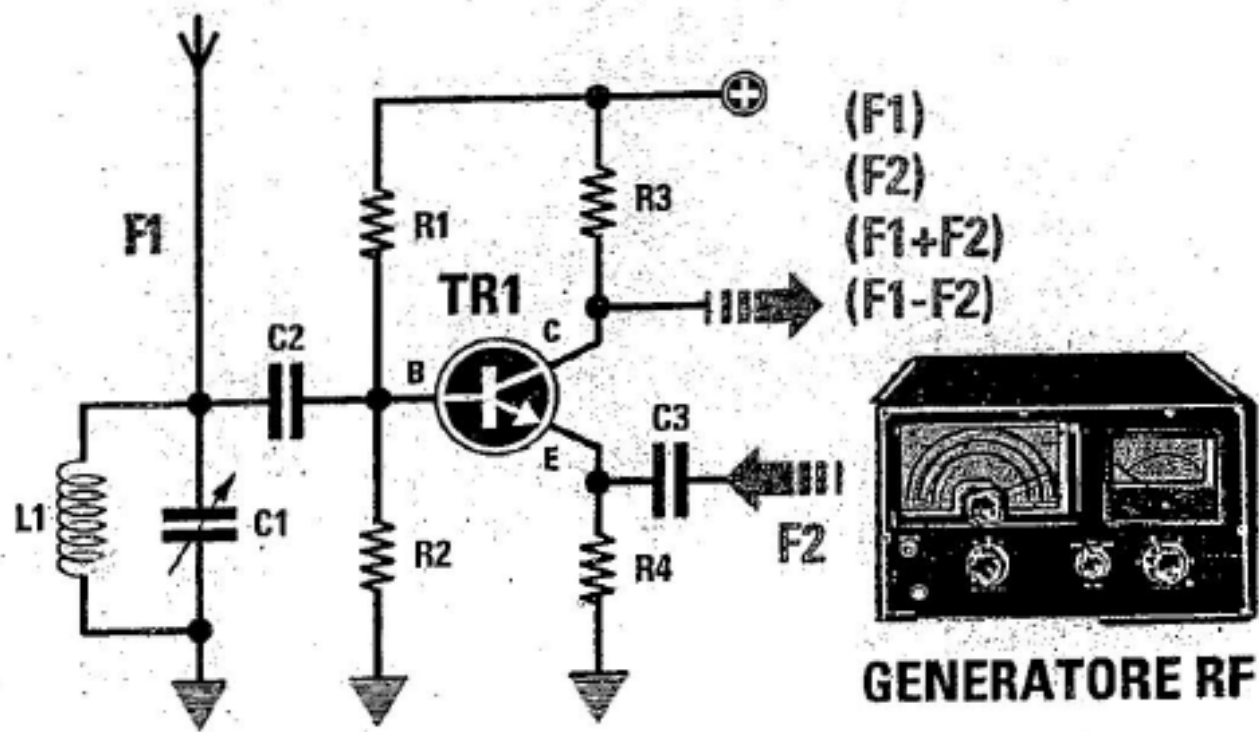


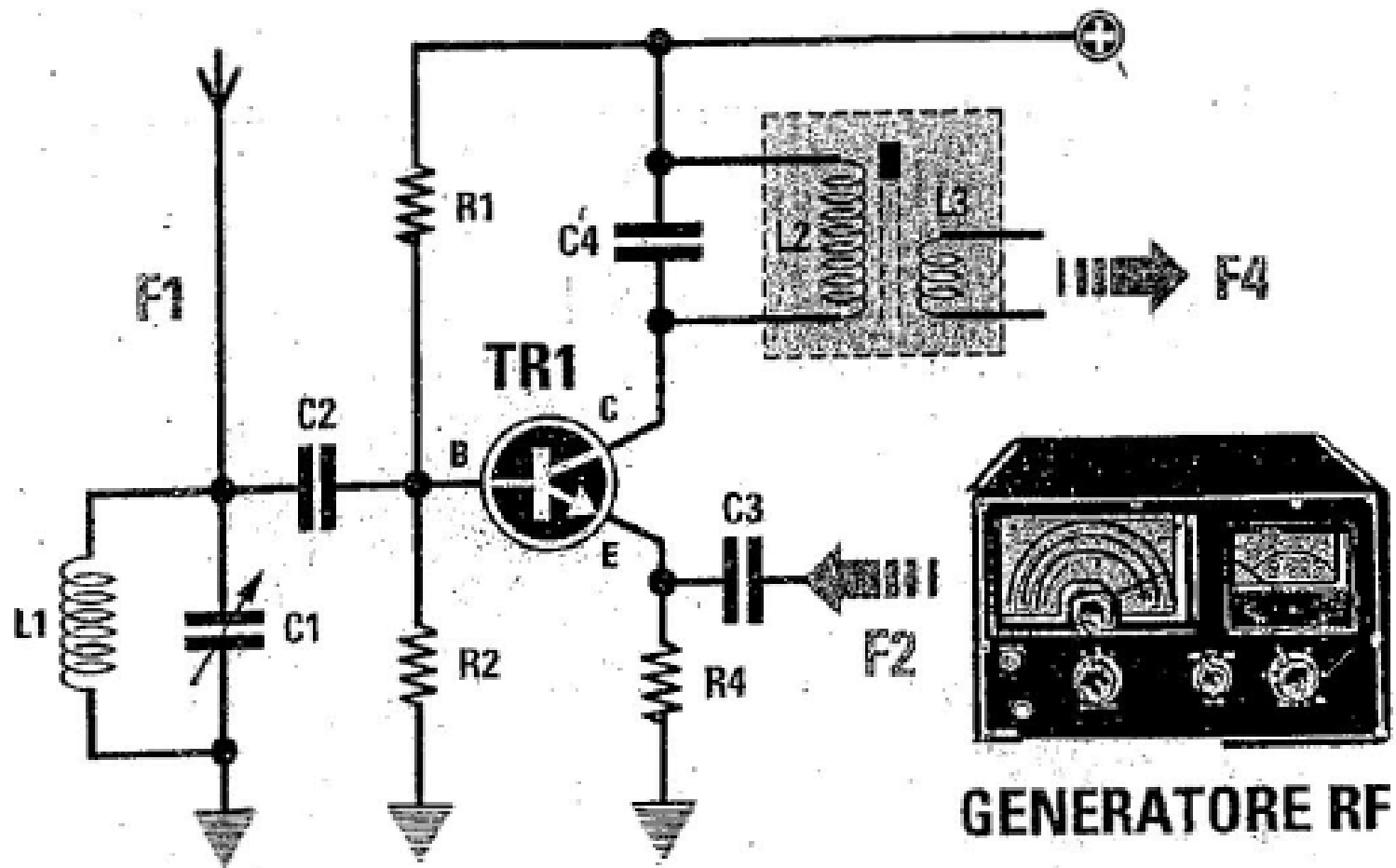
FIG. 121 - Diagramma a blocchi di un ricevitore a supereterodina mostrando il segnale mentre passa nel ricevitore.



**Fig.365 Sul Collettore del transistor di un comune stadio preamplificatore RF, è presente la medesima frequenza sintonizzata per mezzo di L1 - C1.**



**Fig.366** Applicando sull'Emettitore del transistor un segnale prelevato da un Generatore RF, sul suo Collettore saranno presenti ben quattro diverse frequenze.



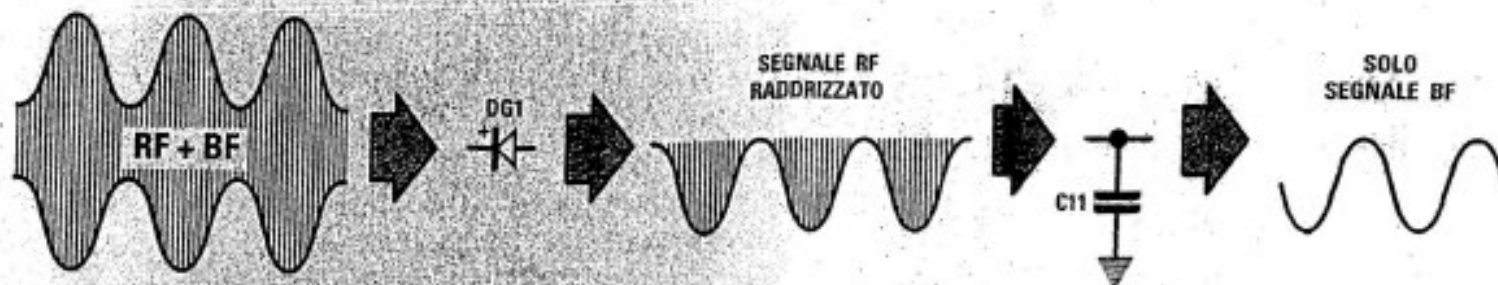


Fig.381 Dal secondario della MF2 fuoriesce un segnale RF come visibile nel disegno di sinistra. Il diodo DG1 elimina le semionde positive. Collegando tra il diodo e la massa un condensatore da 15.000 pF, questo scaricherà a massa la sola frequenza RF perchè per i 455 KHz questa capacità si comporta come una resistenza di pochi ohm, mentre per la BF questa capacità si comporta come una resistenza da 1.000 ohm.

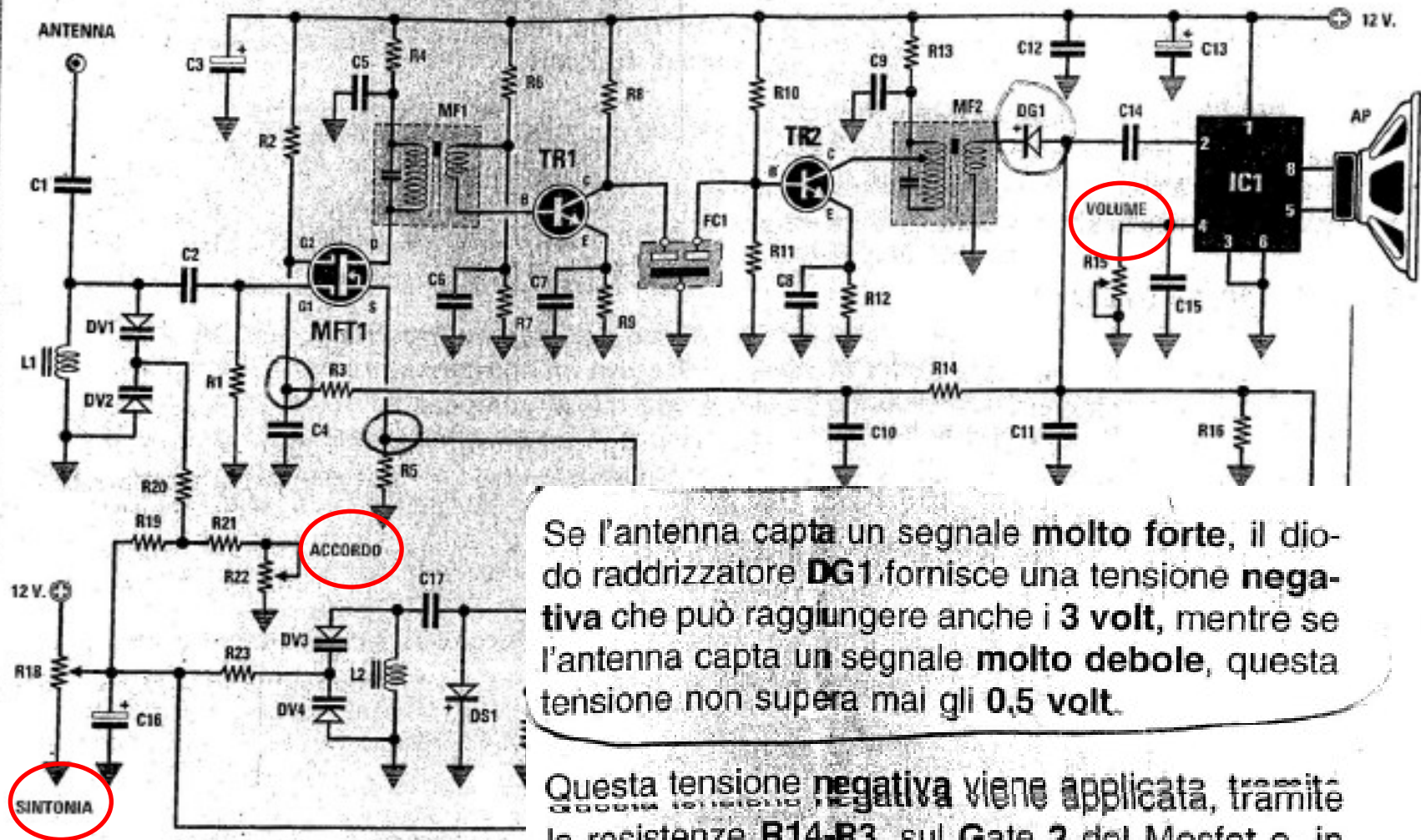
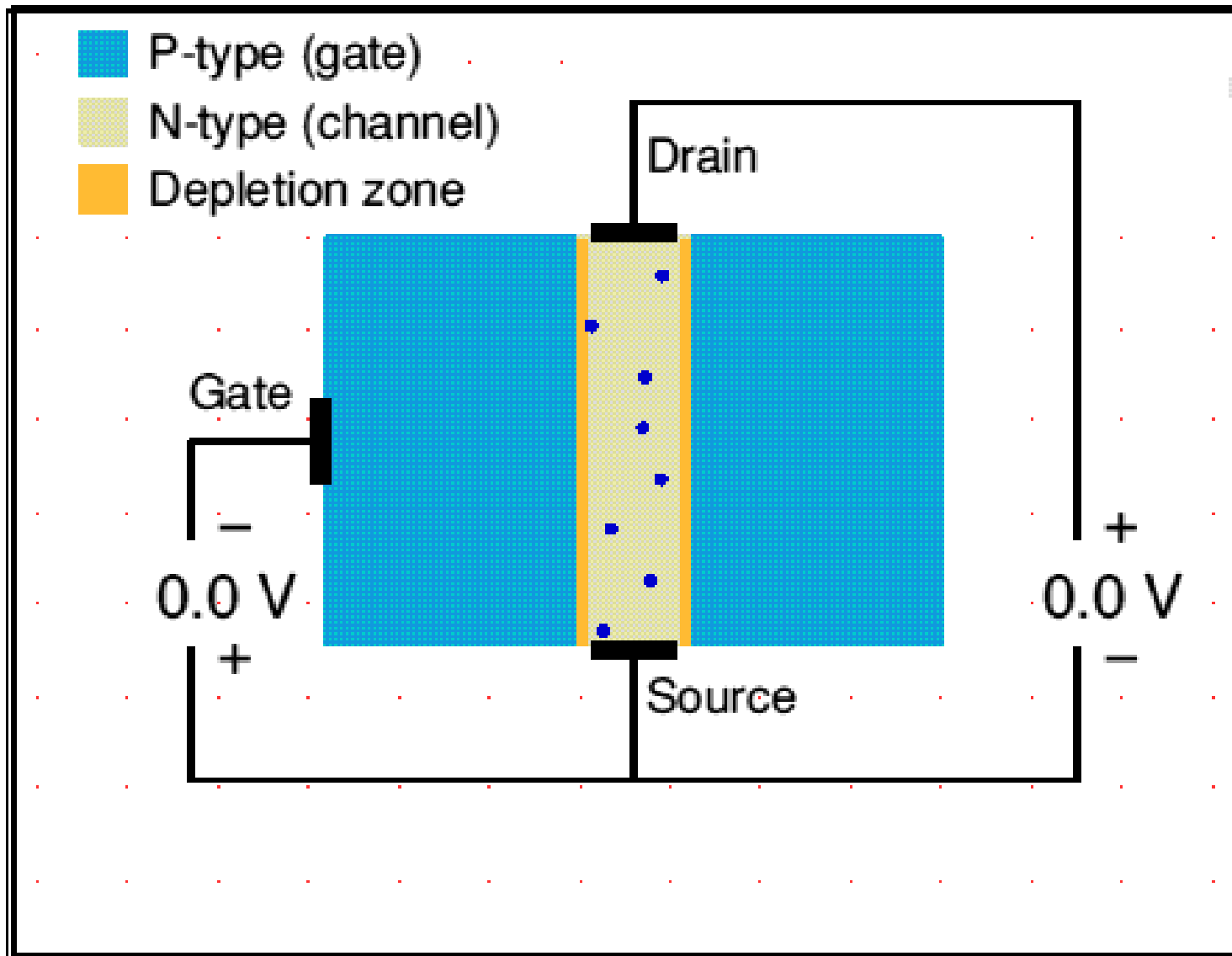


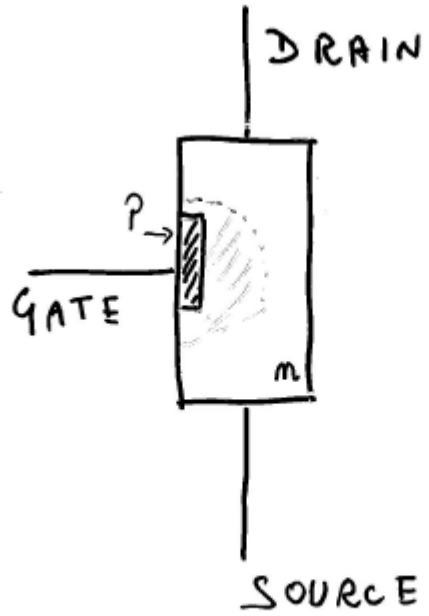
Fig.376 Schema elettrico del ricev transistor, un integrato (vedi IC1) nello schema in basso) per stabili:

Se l'antenna capta un segnale **molto forte**, il diodo raddrizzatore **DG1** fornisce una tensione **negativa** che può raggiungere anche i **3 volt**, mentre se l'antenna capta un segnale **molto debole**, questa tensione non supera mai gli **0,5 volt**.

Questa tensione **negativa** viene applicata, tramite le resistenze **R14-R3**, sul **Gate 2** del Mosfet e, in questo modo, **viene ridotta** la tensione **positiva** applicata su questo terminale.

# Transistor FET

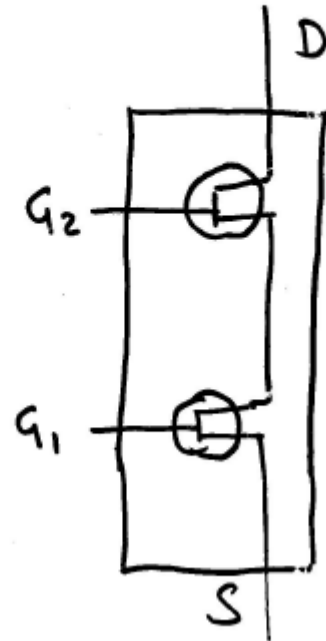




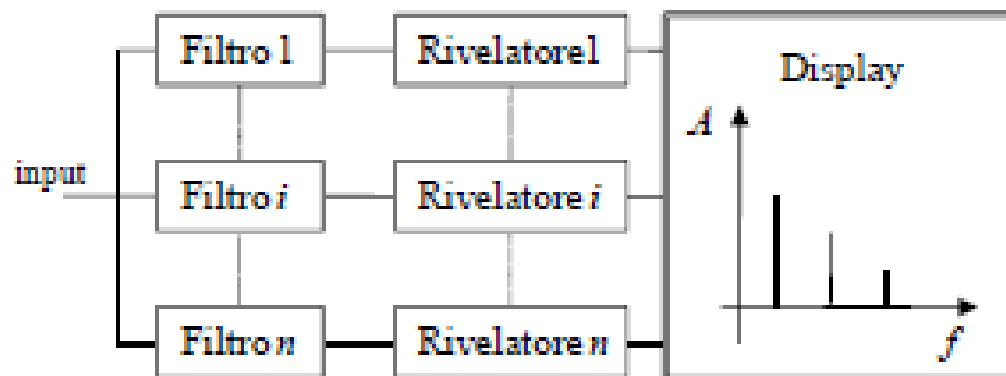
Doppio FET

ACC

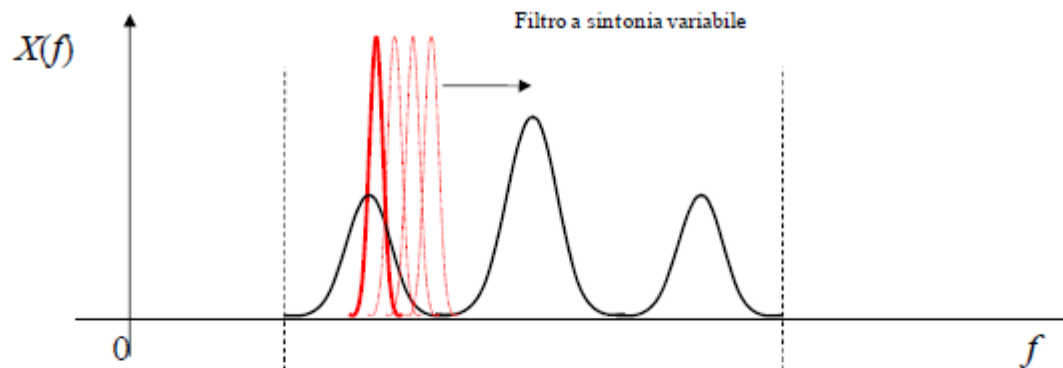
SEGNALE





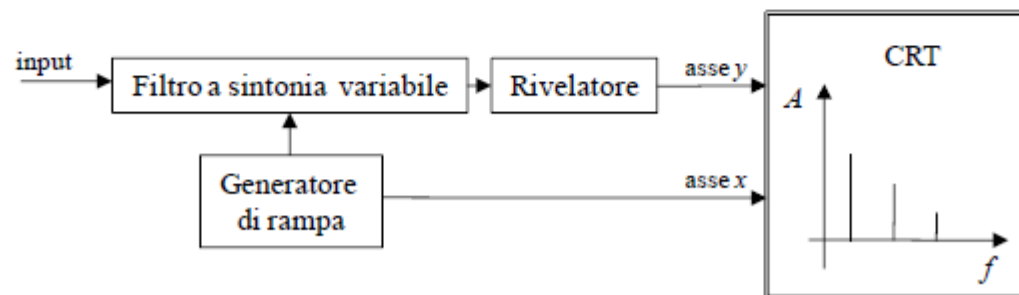


**Fig.1.1** – *Schema di principio di un analizzatore di spettro con banco di filtri*

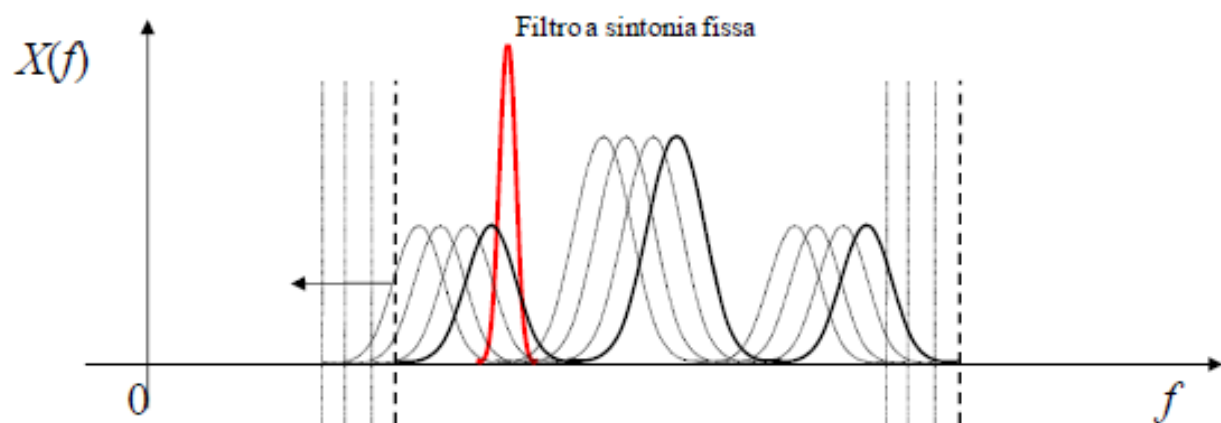


**Fig.1.2** – *Filtro a sintonia variabile*

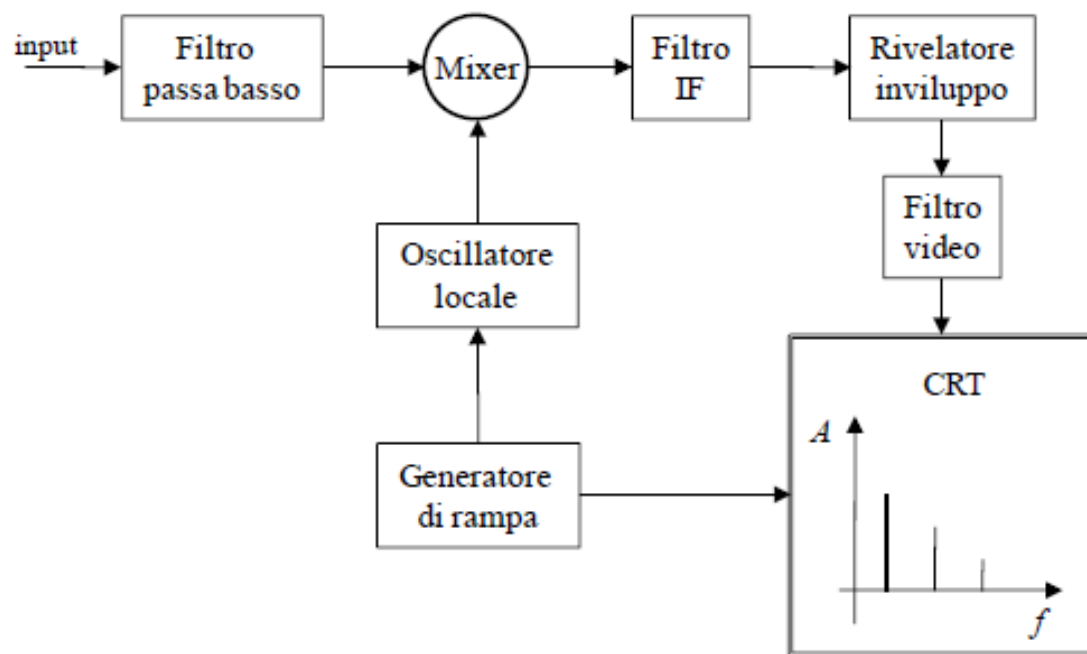
La sintonia del filtro viene regolata tramite un generatore di rampa, che può essere impiegato anche per comandare l'asse orizzontale di un dispositivo di visualizzazione, per esempio un tubo a raggi catodici del tipo di quelli usati per gli oscilloscopi analogici. L'uscita del filtro, opportunamente trattata per rilevarne l'ampiezza, può essere inviata sull'asse verticale dello stesso display, in modo da ottenere la desiderata visualizzazione dello spettro di ampiezza (Fig. 1.3).



**Fig.1.3** – *Schema di principio di un analizzatore di spettro con filtro a sintonia variabile*



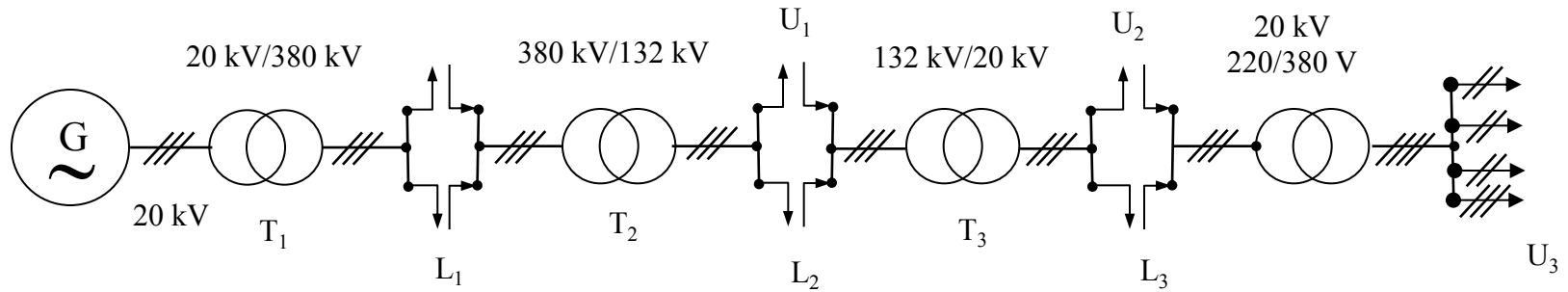
**Fig.2.1** – *Filtro a sintonia fissa e scorrimento dello spettro*



**Fig.2.2** – *Analizzatore di spettro a supereterodina*

# Elettrotecnica e distribuzione dell'energia elettrica





La figura mostra lo schema del sistema di produzione, trasporto, distribuzione ed utilizzo della energia elettrica:

- L'energia elettrica viene prodotta nelle centrali (termoelettriche, idroelettriche, nucleari, eoliche, solari ...) mediante generatori che sono principalmente generatori sincroni.
- Per trasportare l'energia elettrica dai luoghi di produzione a quelli di utilizzo si fa uso di linee aeree trifase ad elevata/elevatissima tensione per ridurre le perdite lungo la linea. I trasformatori trifase consentono la trasformazione dei valori di tensione.
- La distribuzione della energia elettrica agli utenti industriali viene fatta mediante linee trifase in alta/media tensione; la distribuzione della energia elettrica alle utenze domestiche viene fatta mediante linee trifase col filo neutro in bassa tensione.

# CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI ELETTRICI IN BASE ALLA TENSIONE NOMINALE

Norma **CEI 64-8**

- Sistemi di **categoria zero**:  
 $V_n$  50 V se in corrente alternata;  
 $V_n$  120 V se in corrente continua.
- Sistemi di **prima categoria**:  
50  $V_n$  1000 V se in corrente alternata;  
120  $V_n$  1500 V se in corrente continua.
- Sistemi di **seconda categoria**:  
1000  $V_n$  30 000 V se in corrente alternata;  
1500  $V_n$  30 000 V se in corrente continua.
- Sistemi di **terza categoria**:  
 $V_n$  30 000 V sia in corrente alternata che in corrente continua

Ai fini della **distribuzione della energia elettrica** si distinguono:

- **bassa tensione** (BT)  $V_n < 1000$  Volt
- **media tensione** (MT)  $1000 \text{ Volt} < V_n < 30\,000$  Volt
- **alta tensione** (AT)  $30\,000 \text{ Volt} < V_n < 130\,000$  Volt
- **altissima tensione** (AAT)  $V_n > 130\,000$  Volt

# RIFASAMENTO

Per ridurre le perdite per effetto Joule nelle linee di trasmissione si ricorre alla tecnica del **rifasamento dei carichi aventi un valore basso del fattore di potenza**.

La tecnica consiste nel collegare in parallelo al carico da rifasare un componente in grado di fornire al carico tutta (rifasamento completo) o in parte (rifasamento parziale) la potenza reattiva di cui necessita:

- ai carichi **Ohmico-induttivi** (la quasi totalità dei carichi di interesse industriale) **viene collegato in parallelo un condensatore**
- ai carichi Ohmico-capacitivi viene collegato in parallelo un induttore

Il carico rifasato assorbe dalla linea una corrente con valore efficace minore di quella assorbita dal carico non rifasato riducendo così contemporaneamente:

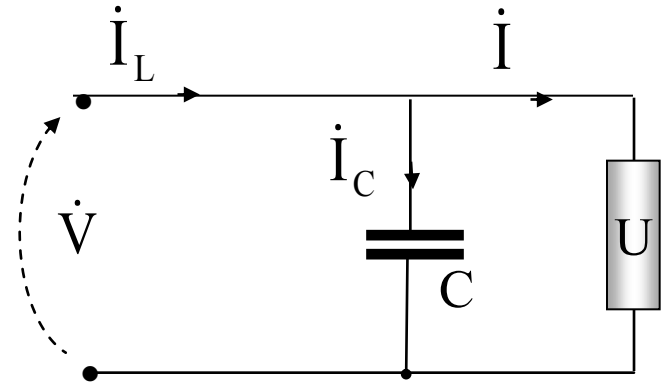
- la **potenza dissipata lungo la linea** (proporzionale al quadrato del valore efficace della corrente ( $P_d = R I_{\text{eff}}^2$ ))
- le **cadute di tensioni lungo la linea** (proporzionali al valore efficace della corrente ( $\Delta V_{\text{eff}} = |Z| I_{\text{eff}}$ ))

Il rifasamento dei carichi con basso valore del fattore di potenza viene incentivato dall'Ente distributore dell'energia elettrica, imponendo **un prezzo maggiore per la potenza assorbita con fattore di potenza maggiore di 0.9**

## CALCOLO DELLA CAPACITÀ DI RIFASAMENTO: CARICO MONOFASE

$$\left. \begin{array}{l} P = VI \cos \varphi \\ Q = VI \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow Q = P \tan \varphi$$

Si calcola il valore che deve avere la capacità C del condensatore per raggiungere il valore  $\cos(\varphi')$  (ad esempio  $\cos(\varphi') = 0.9$ ) del fattore di carico del carico rifasato




$$Q = P \tan \varphi$$

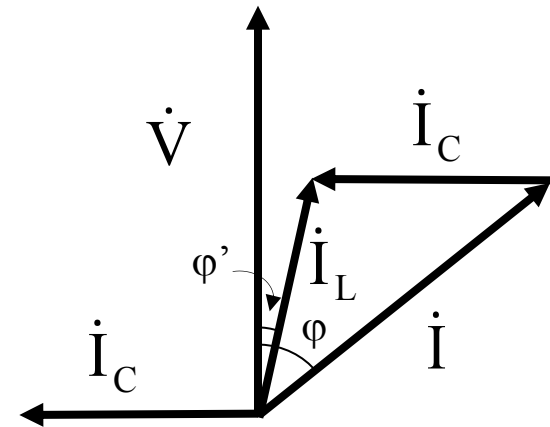
$$Q + Q_C = P \tan \varphi'$$

---

$$Q_C = P (\tan \varphi' - \tan \varphi) \quad ; \quad Q_C = -\omega C V^2$$

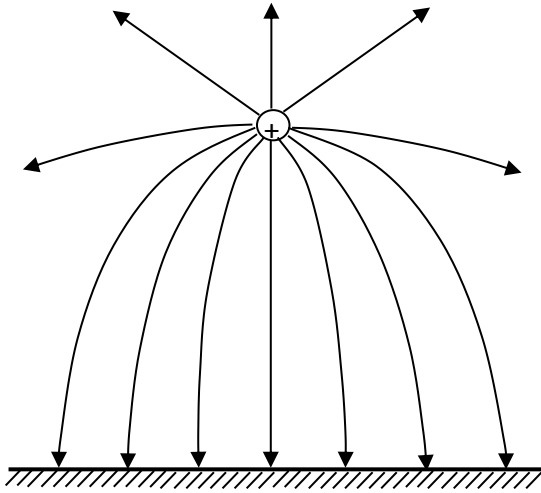


$$C = \frac{P}{\omega V^2} (\tan \varphi - \tan \varphi')$$

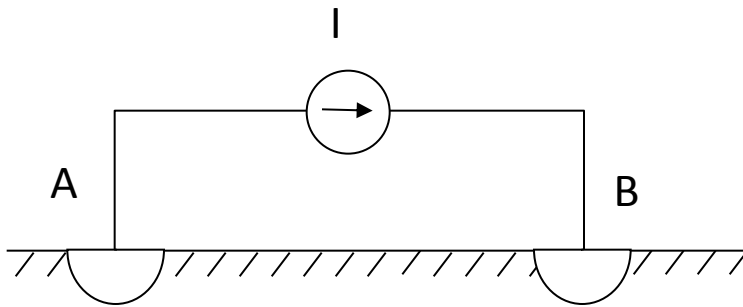




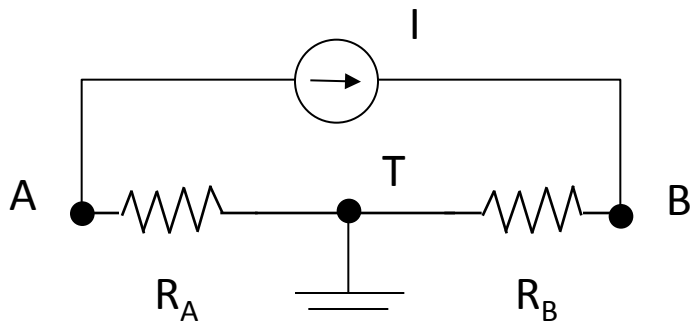
## EFFETTI DEL TERRENO



La presenza del terreno modifica il percorso delle linee di campo elettrico sotto una linea aerea

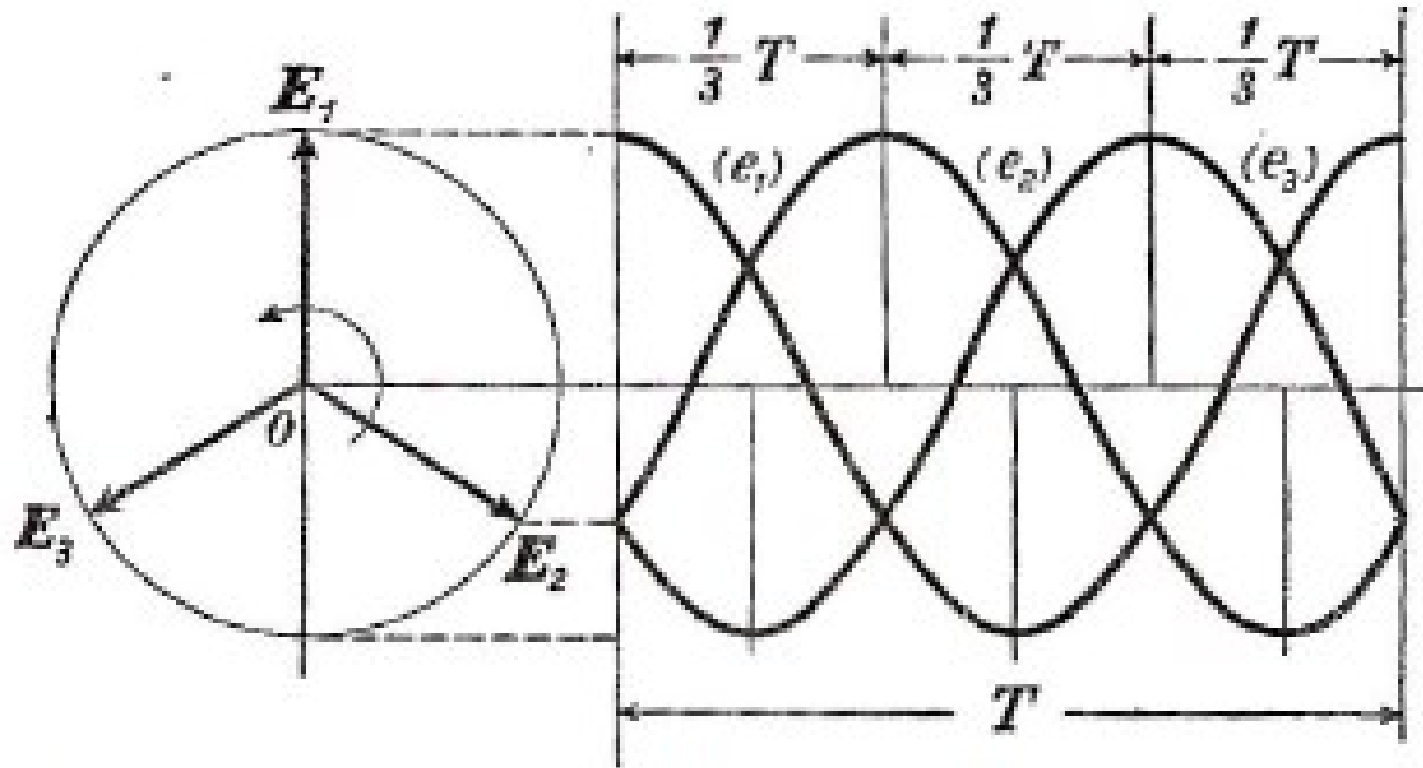


La presenza del terreno permette il passaggio della corrente elettrica tra due dispersori di terra



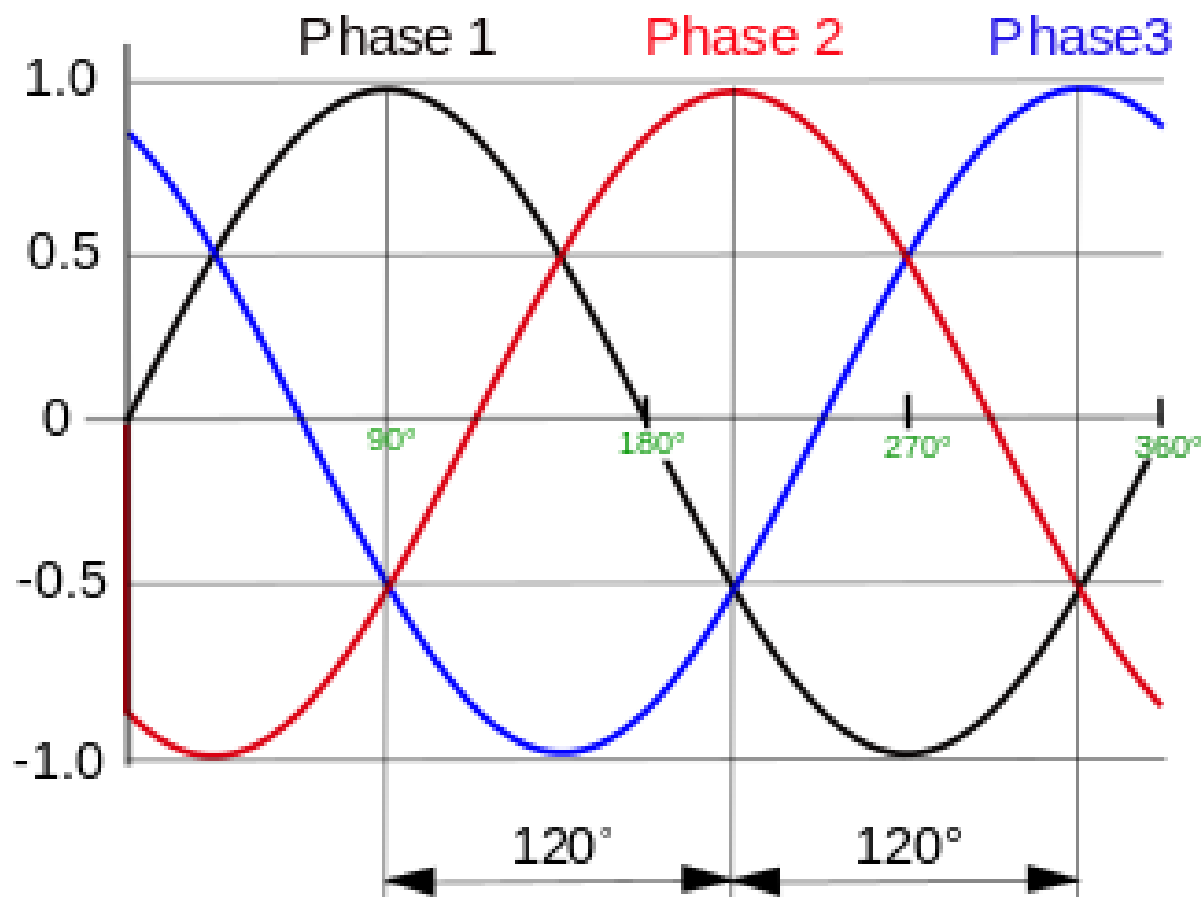
Il nodo T rappresenta un punto nel terreno posto ad infinita distanza da tutti i dispersori di terra dove il potenziale elettrico assume sempre il valore zero qualunque sia la corrente  $I$  che circola nei dispersori.

# Sistema trifase



*fig. 1 rappresentazione nel tempo di una terna trifase*

$$E_1 + E_2 + E_3 = 0$$

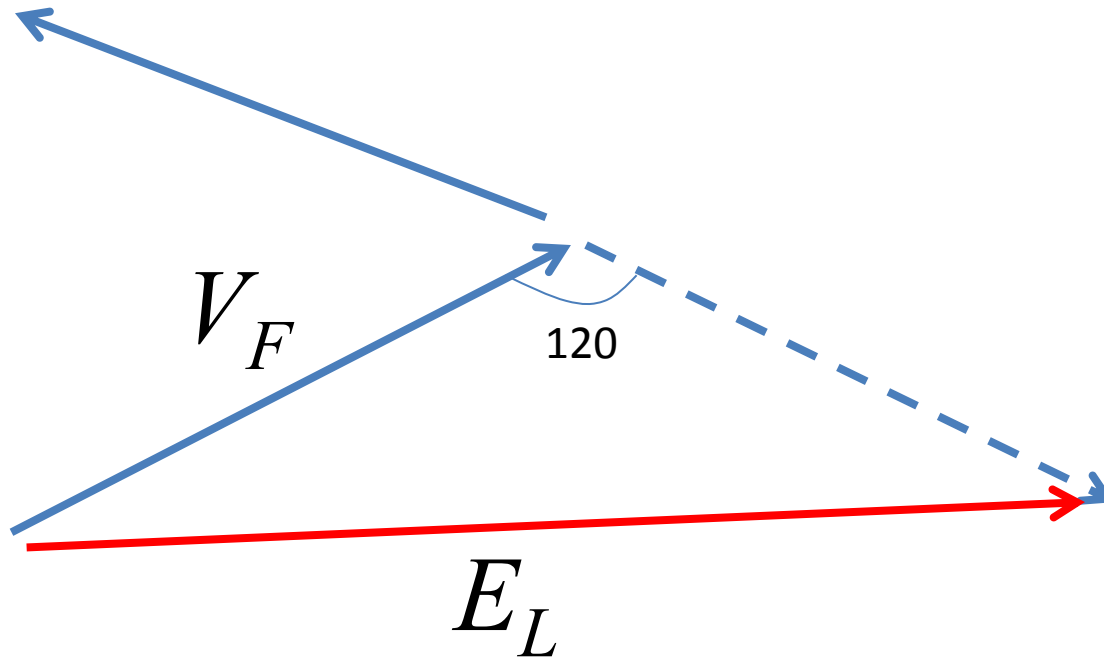


$$\bar{U}_{CA} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = \sqrt{3}E_{eff}e^{j(\alpha - \frac{3\pi}{2})} \quad \bar{U}_{AB} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \sqrt{3}E_{eff}e^{j(\alpha - \frac{\pi}{6})}$$

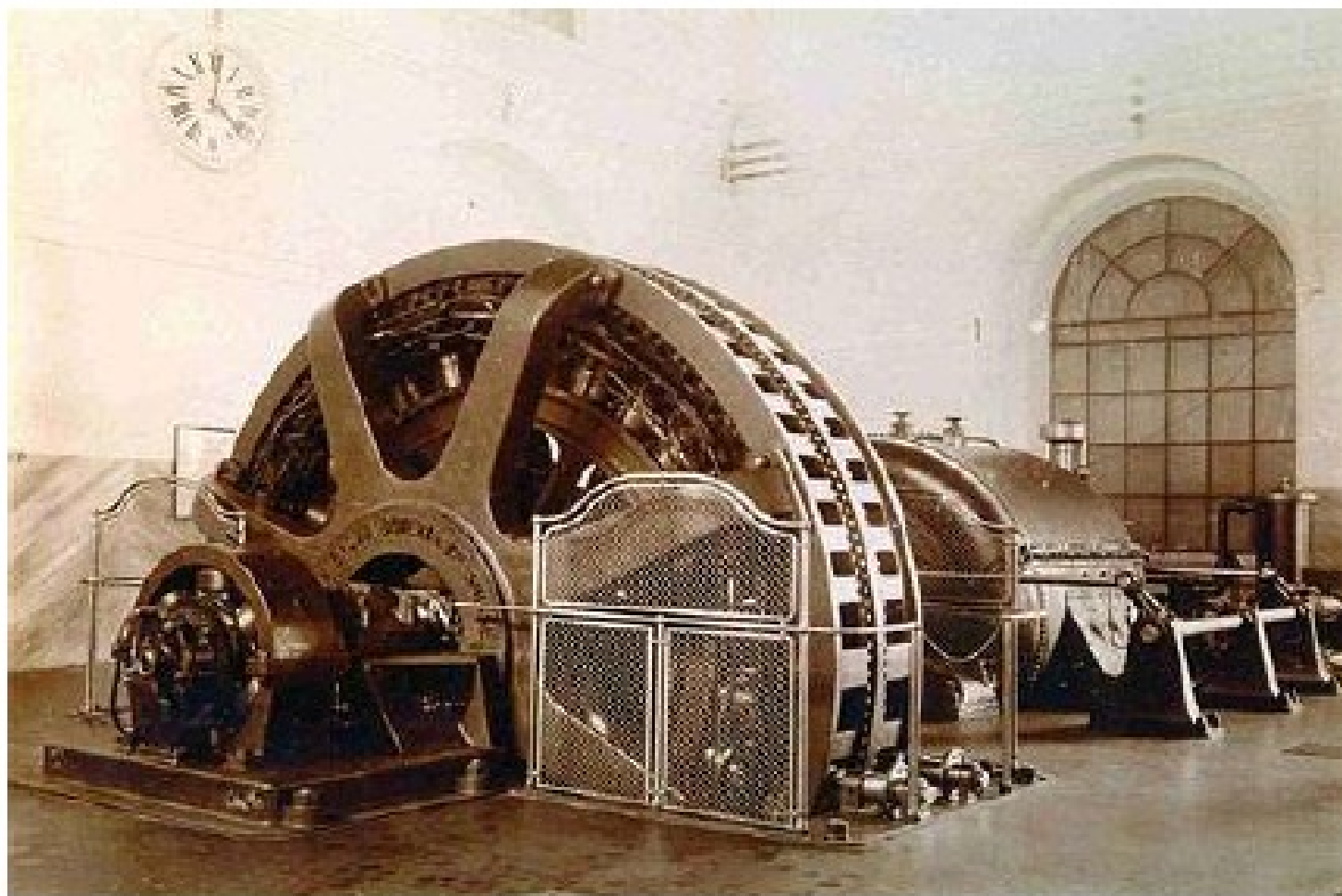
$$\bar{U}_{BC} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \sqrt{3}E_{eff}e^{j(\alpha - \frac{5\pi}{6})}$$

# Sistema trifase

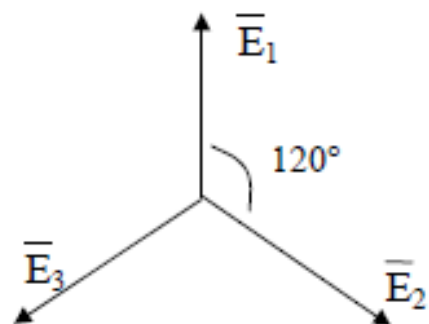
## Tensioni di linea e tensioni di fase



$$E_L = \sqrt{3} V_F = 1.73 V_F$$



*fig.1 Alternatore trifase Bertini del 1898*



*Sistema simmetrico di tensioni*

*Proprietà di una terna simmetrica di tensioni:*

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad \forall t$$

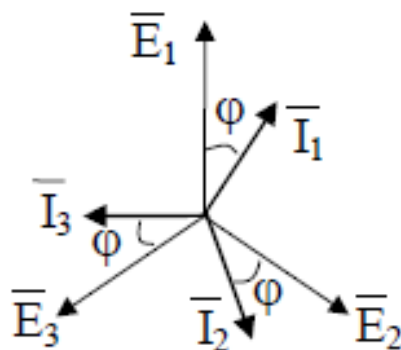
oppure:  $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0$

**Correnti di linea (sistema equilibrato di correnti):**

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}} = \frac{E}{Z} e^{-j\varphi}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}} = \frac{E}{Z} e^{-j(\varphi+2\pi/3)}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}} = \frac{E}{Z} e^{-j(\varphi+4\pi/3)}$$



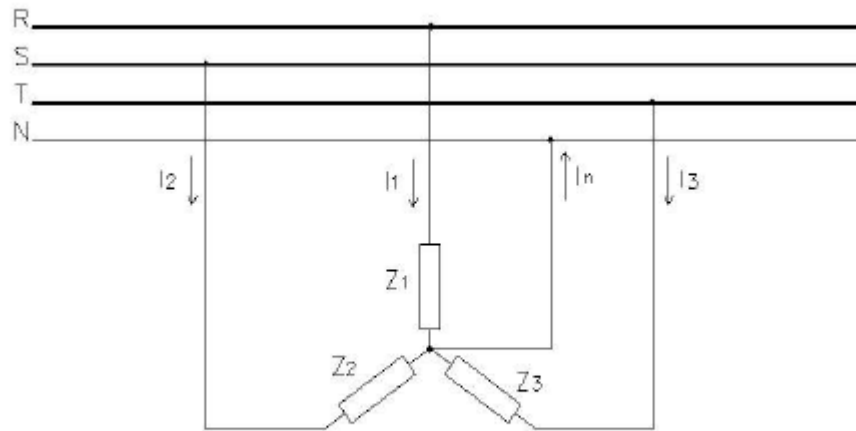


fig. 6collegamento dei carichi a stella

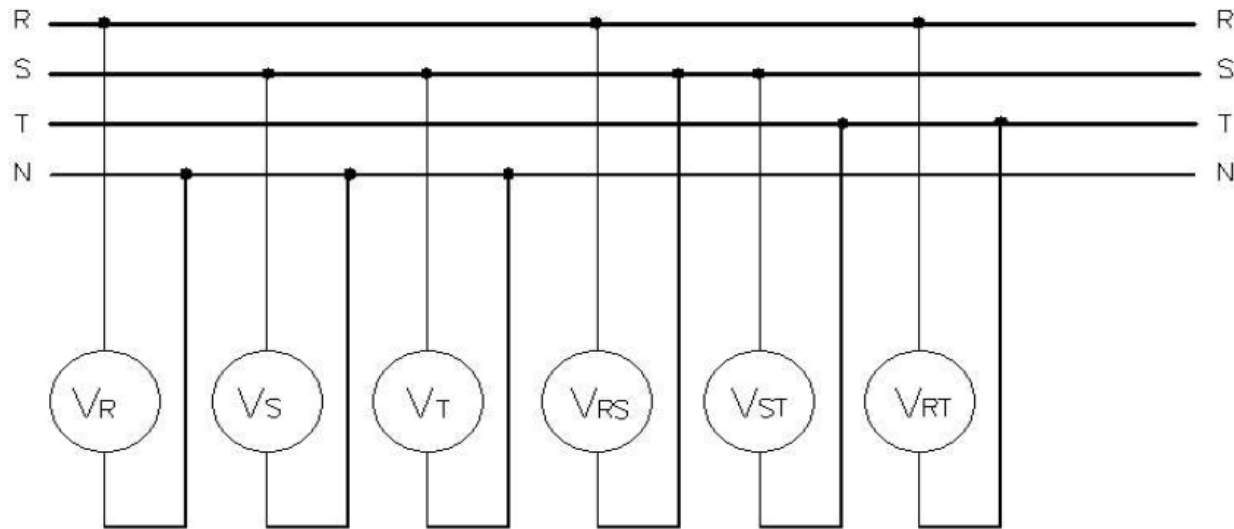
$$P_1 = V_R \cdot I_R \cdot \cos \varphi \quad \text{dove} \quad I_R = I_1 = \frac{V_R}{Z_1}$$

$$P_2 = V_S \cdot I_S \cdot \cos \varphi \quad \text{dove} \quad I_S = I_2 = \frac{V_S}{Z_2}$$

$$P_3 = V_T \cdot I_T \cdot \cos \varphi \quad \text{dove} \quad I_T = I_3 = \frac{V_T}{Z_3}$$

Un sistema trifase sarà quindi composto da tre conduttori di fase (detti R, S e T) collegati direttamente ai tre avvolgimenti generatori, e da un neutro.

In questo modo, avremo a disposizione tre tensioni di fase ( $V_R$ ,  $V_S$  e  $V_T$ ) misurate tra ogni fase ed il neutro, e tre tensioni di linea o concatenate ( $V_{RS}$ ,  $V_{ST}$  e  $V_{RT}$ ) misurate tra fase e fase.



*fig. 5 Misurazione delle tensioni di fase e delle tensioni concatenate*

Tra tensione di linea e tensione concatenata esiste una precisa relazione. Indicando con  $V_F$  la tensione di fase, e con  $V_L$  la tensione di linea o concatenata, avremo che:

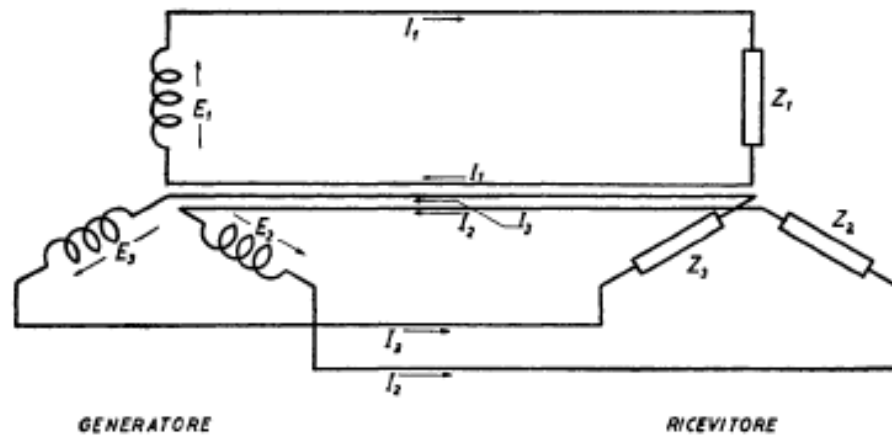
$$V_L = \sqrt{3} \cdot V_F$$

Il che equivale a dire che le tensioni concatenate sono 1,73 volte più grandi delle tensioni di fase.



## SISTEMA TRIFASE A STELLA

- Si considerino i tre circuiti indipendenti riportati in figura in cui i generatori di tensione costituiscono una terna **simmetrica** di tensioni e sono collegati ciascuno ad una impedenza di uguale valore (**carico equilibrato**) ( $\bar{Z} = \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = \bar{Z}_3 = Z e^{j\varphi}$ ).



*Configurazione di partenza*

**Tensioni stellate o di fase:**

$$e_1(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t)$$

$$\bar{E}_1 = E$$

$$e_2(t) = \sqrt{2} E \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\bar{E}_2 = E e^{-j2\pi/3}$$

$$e_3(t) = \sqrt{2} E \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$\bar{E}_3 = E e^{-j4\pi/3}$$

Se con un sistema trifase alimentiamo tre carichi identici, indicati in figura con  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ , avremo che:

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_1}$$

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2}$$

$$I_3 = \frac{E_3}{Z_3}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{E_1}{Z_1} + \frac{E_2}{Z_2} + \frac{E_3}{Z_3} \quad \text{ma se } Z_1 = Z_2 = Z_3$$

$$\text{allora } I_1 + I_2 + I_3 = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{Z_1} \quad \text{ma dato che } E_1 + E_2 + E_3 = 0$$

ne consegue che anche  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Questo significa che se un sistema trifase alimenta tre carichi equilibrati, la somma delle correnti di ritorno è uguale a zero.

Quindi potremo eliminare i fili di ritorno, passando così da un sistema a sei fili come in fig. 2, ad un sistema a tre fili come in fig. 3

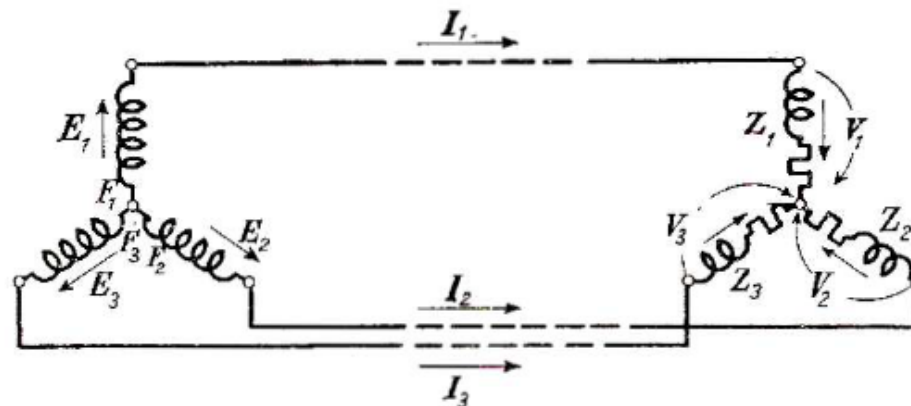
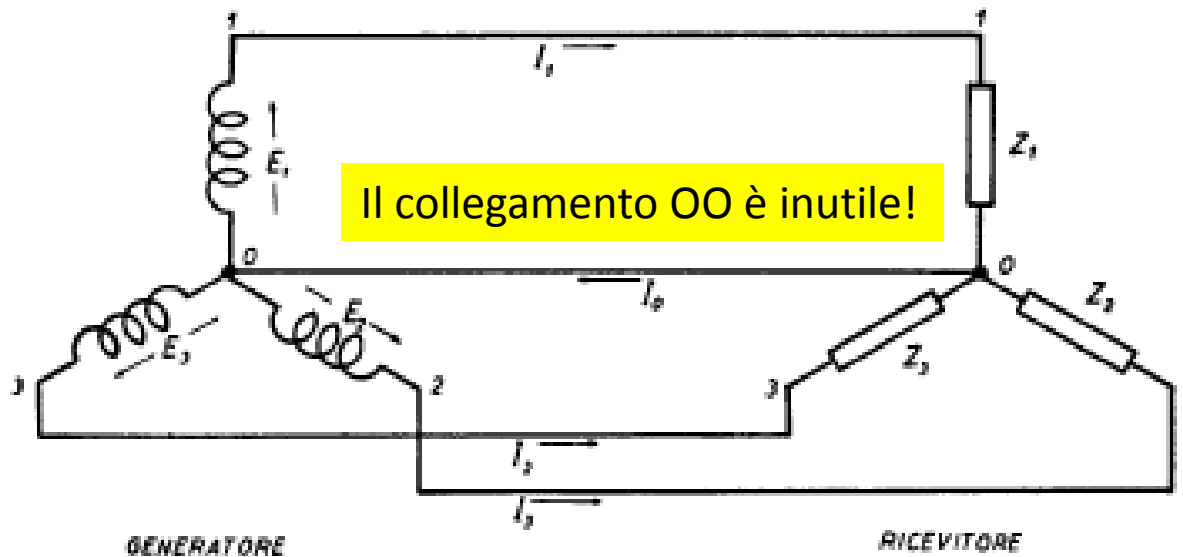


fig. 3 sistema trifase che alimenta carichi equilibrati senza fili di ritorno



*Configurazione successiva, con conduttori di ritorno in comune*

- La corrente che fluisce in tale conduttore, è ovviamente pari alla somma vettoriale delle correnti negli altri tre:

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

*Proprietà di una terna equilibrata di correnti:*

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

Difficilmente, in realtà, i tre carichi avranno lo stesso valore e introdurranno lo stesso sfasamento tra tensione e corrente. Questo significa che la somma delle tre correnti non sarà mai uguale a zero, anche se molto vicina.

Verrà quindi lasciato un filo di ritorno, che potrà avere sezione minore dei fili di andata perchè destinato a trasportare correnti meno significative. Questo tipo di connessione, visibile in figura 4, viene detta a *stella* e il filo di ritorno viene chiamato *neutro*.

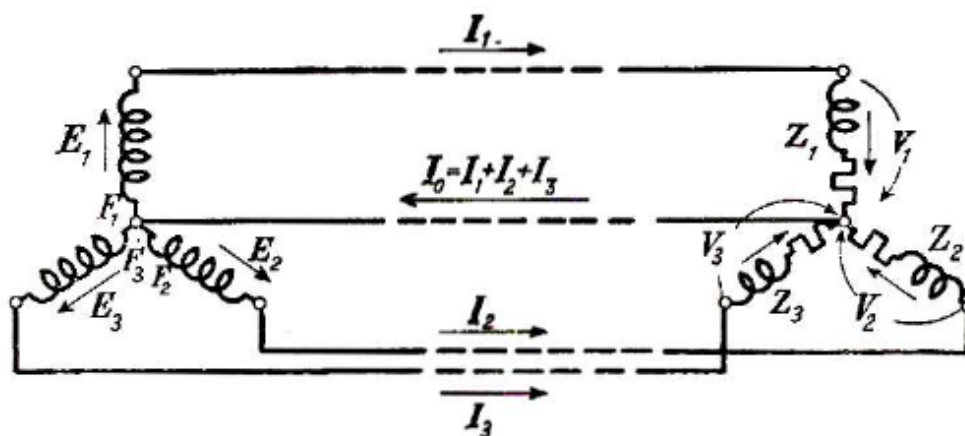


fig. 4 Collegamento a stella con neutro

In un sistema trifase con collegamento a stella, il filo di ritorno detto neutro trasporterà quindi solo la somma delle tre correnti, che tenderanno a eliminarsi a vicenda.

$$I_N = I_1 + I_2 + I_3$$

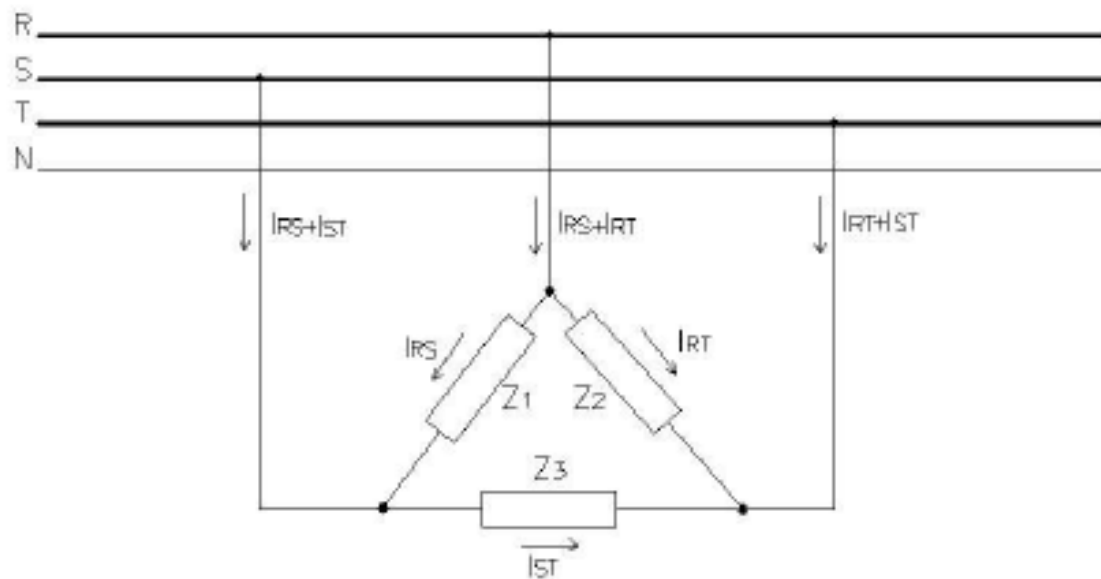


fig. 7 collegamento dei carichi a triangolo

Sul carico  $Z_1$  sarà presente la tensione concatenata tra i conduttori di fase R e S ( $V_{RS}$ )

$$V_{RS} = \sqrt{3} \cdot V_R$$

la stessa cosa varrà, ovviamente, anche per  $Z_2$  e  $Z_3$ .

Ogni carico assorbirà una corrente che sarà uguale a:

$$I_{RS} = I_1 = \frac{V_{RS}}{Z_1} ; I_{RT} = I_2 = \frac{V_{RT}}{Z_2} ; I_{ST} = I_3 = \frac{V_{ST}}{Z_3}$$

Ogni fase, dovrà fornire una corrente che sarà uguale alla differenza delle correnti assorbite da due carichi, correnti che saranno sfasate l'una sull'altra di  $120^\circ$ . Come già visto per le tensioni, anche per le correnti la differenza sarà:

$$I_R = I_F = I_{RS} + I_{RT} = \sqrt{3} \cdot I_{RS} = \sqrt{3} \cdot I_{RT}$$

In sostanza, se indichiamo con  $V_F$  la tensione di fase e con  $V_L$  la tensione di linea o concatenata, e se indichiamo con  $I_F$  la corrente di fase, e con  $I_L$  la corrente di linea o concatenata, valgono sempre le seguenti relazioni:

$$V_L = \sqrt{3} V_F \quad \text{e} \quad I_F = \sqrt{3} I_L$$

Quindi, se un carico è collegato a stella, sarà sottoposto alla tensione di fase  $V_F$  e assorbirà la corrente di fase  $I_F$ ; se un invece è collegato a triangolo, sarà sottoposto alla tensione di linea  $V_L$  e assorbirà la corrente di linea  $I_L$ .

La potenza istantanea in un sistema trifase è definita dalla somma delle tre potenze istantanee delle tre fasi:

$$p(t) = e_1(t) i_1(t) + e_2(t) i_2(t) + e_3(t) i_3(t)$$

Nella ipotesi di sistema simmetrico ed equilibrato:

$$e_1(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t) \quad i_1(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi)$$

$$e_2(t) = \sqrt{2} E \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \quad i_2(t) = \sqrt{2} I \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right)$$

$$e_3(t) = \sqrt{2} E \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \quad i_3(t) = \sqrt{2} I \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right)$$

**Potenza istantanea:**

$$\begin{aligned} p(t) &= 2 E I \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) \\ &+ 2 E I \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi\right) \\ &+ 2 E I \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi\right) \end{aligned}$$

**Potenza istantanea:**

$$\begin{aligned} p(t) = & E I \cos(\varphi) + E I \sin(2\omega t - \varphi) \\ & + E I \cos(\varphi) + E I \sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{4}{3}\pi\right) \\ & + E I \cos(\varphi) + E I \sin\left(2\omega t - \varphi - \frac{8}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

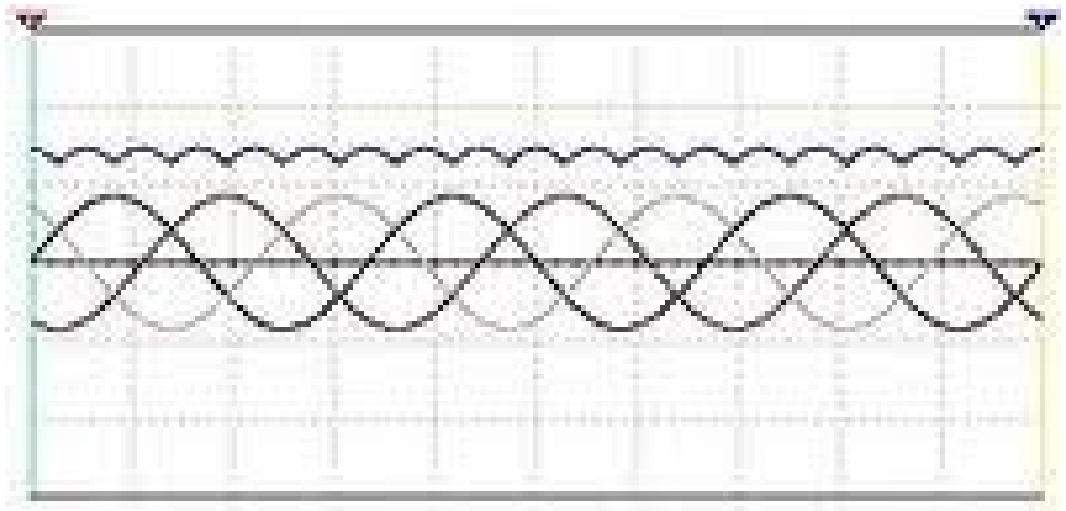
Terna simmetrica  
a somma nulla

**Potenza istantanea di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato:**

$$p(t) = 3 E I \cos(\varphi)$$

La potenza istantanea di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato è costante.



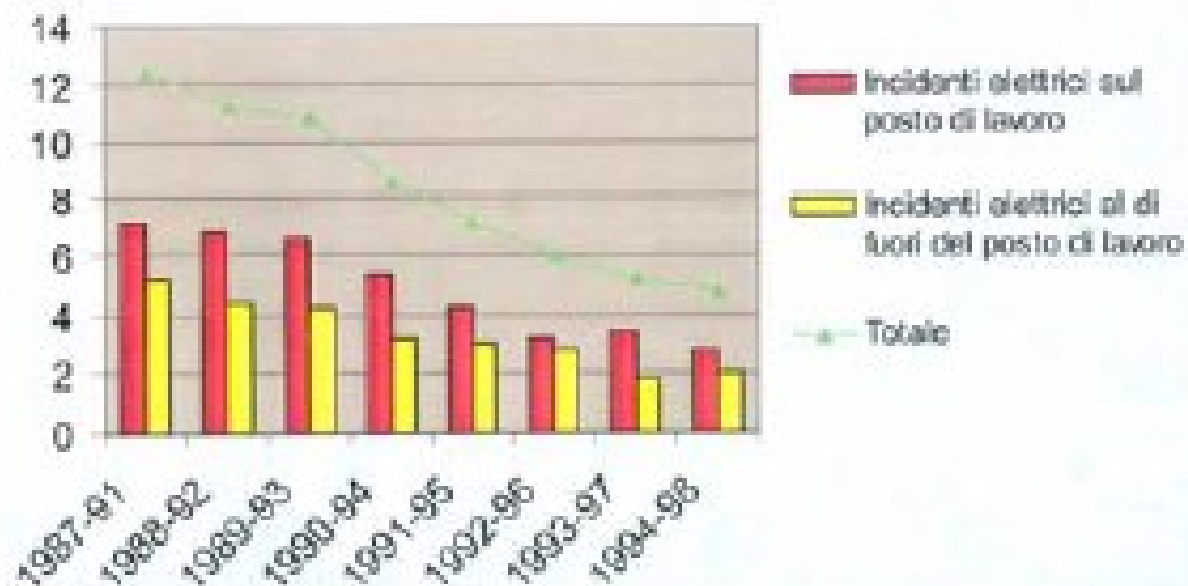


# Effetti biologici della corrente elettrica



# Incidenza statistica

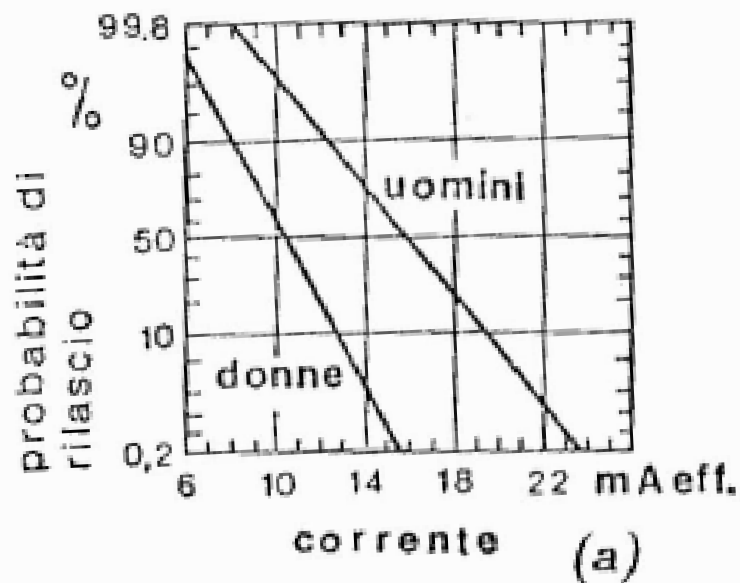
Numero degli incidenti elettrici mortali fra il 1987 e il 1998  
(media su 5 anni)



Dalle prove sperimentali finora eseguite risulta che l'organo esterno del corpo umano più sensibile alla corrente elettrica è la lingua. Il valore medio sperimentale della corrente minima cui la lingua è sensibile (ricavato facendo prove su un buon numero di persone), chiamato valore di soglia, è risultato pari a  $45 \mu A$ , sia per la corrente continua che per l'alternata.

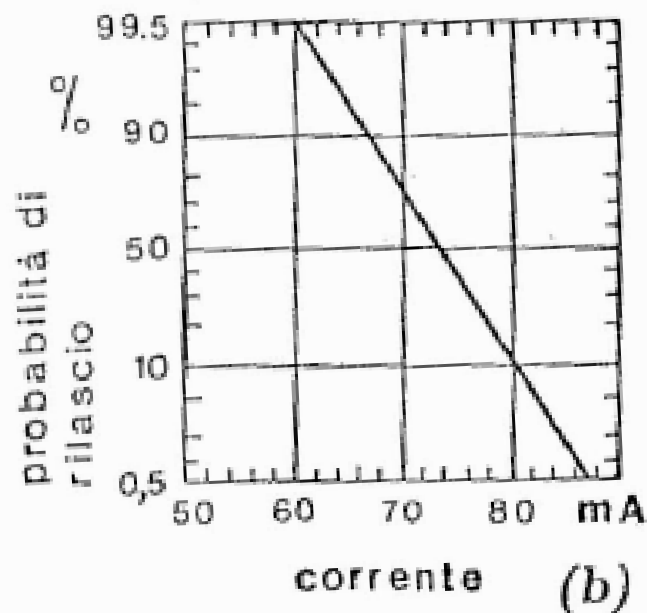
Ai fini antinfortunistici è più importante però conoscere il valore di soglia per la percezione sulle mani, in quanto è attraverso queste che viene più spesso immessa nel corpo la corrente elettrica. I risultati sperimentali, ottenuti usando corrente continua, danno un valore di soglia pari a  $5,2 mA$ ; questo significa che il 50% delle persone percepisce una corrente inferiore a  $5,2 mA$  e l'altro 50% percepisce una corrente superiore. Per correnti alternate ( $60 Hz$ ) si trova un valore della soglia di percezione assai più ridotto e cioè di  $1,1 mA$  circa. I valori suindicati riguardano una popolazione adulta e maschile: per le donne i valori riportati vanno ridotti di circa il 35% e per i bambini di fattori ancora superiori.

Da questi è possibile ricavare che per la corrente alternata il valore più probabile della corrente di rilascio risulta pari a 10,5 mA per le donne e 16 mA per gli uomini. Per la corrente continua, a causa della bassa statistica, si è calcolato, estrapolando i dati sperimentali, un valore di 76 mA per gli uomini e 51 mA per le donne.



CA 10 mA

Fig. 1.1



CC 60 mA

- *Influenza dei parametri che caratterizzano la corrente elettrica*

Infine un importante effetto legato direttamente alla intensità di corrente è quello di provocare ustioni. Esse sono dovute allo sviluppo di calore per effetto Joule, cioè all'aumento di temperatura che accompagna il passaggio di una corrente elettrica in una resistenza.

Detta  $dT$  la variazione di temperatura che un corpo subisce per effetto del passaggio di una corrente di densità  $J$  per un tempo  $dt$ , si ha che

$$dT = \frac{\rho}{C_v} J^2 dt$$

dove  $\rho$  (resistenza specifica) e  $C_v$  (calore specifico a volume costante) sono parametri caratteristici del corpo in considerazione. Questa relazione ci consente di rilevare come la gravità delle ustioni, sicuramente legata all'entità dell'aumento di temperatura, sia legata più che alla intensità della corrente, alla densità della corrente. Risulta quindi assai più pericolosa una corrente che entra nel corpo umano attraverso un contatto di piccola superficie, che non la stessa che entra attraverso un contatto di grande superficie.



# EFFETTI BIOLOGICI DELLA CORRENTE ELETTRICA

La corrente elettrica, attraversando il corpo umano, produce effetti che possono essere dannosi, fino a portare alla morte, a seconda del valore della intensità della corrente, della frequenza e del tempo di contatto:

- **Tetanizzazione dei muscoli:** i muscoli (anche quelli che presiedono alla respirazione) rimangono contratti, indipendentemente dalla volontà della persona.
- **Fibrillazione ventricolare:** il cuore perde la sua capacità di contrarsi ritmicamente e non è più in grado di assicurare la circolazione sanguigna.
- **Ustioni:** il passaggio della corrente elettrica produce dissipazione di energia per effetto Joule e conseguente incremento della temperatura. Le ustioni prodotte risultano particolarmente dannose in quanto interessano anche i tessuti interni del corpo

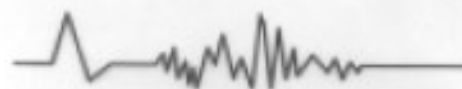
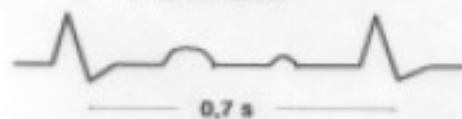


| Valori di corrente | Definizione             | Effetti   |
|--------------------|-------------------------|---|
| 1-3 mA             | SOGLIA DI PERCEZIONE    | Non si hanno rischi o pericoli per la salute.   |
| 3-10 mA            | ELETTRIFICAZIONE        | Produce una sensazione di formicolio più o meno forte e può provocare movimenti riflessi.   |
| 10 mA              | TETANIZZAZIONE          | Si hanno contrazioni muscolari. Se la parte in tensione è stata afferrata con la mano si può avere paralisi dei muscoli, rendendo difficile il distacco.                          |
| 25 mA              | DIFFICOLTÀ RESPIRATORIE | Si hanno a causa della contrazione di muscoli addetti alla respirazione e del passaggio di corrente per i centri nervosi che sovrintendono alla funzione respiratoria.            |
| 25-30 mA           | ASFISSIA                | La tetanizzazione dei muscoli della respirazione può essere tale da provocare la morte per asfissia.  |
| 60-75 mA           | FIBRILLAZIONE           | Se la corrente attraversa il cuore può alterarne il regolare funzionamento, provocando una contrazione irregolare e disordinata delle fibre cardiache che può portare alla morte. |

# Effetti sul cuore



Ritmo cardiaco



2 min

## EFFETTI FISIOLGICI DELLA CORRENTE A 50 Hz

0,5 mA \_\_\_\_\_ Nessuna reazione

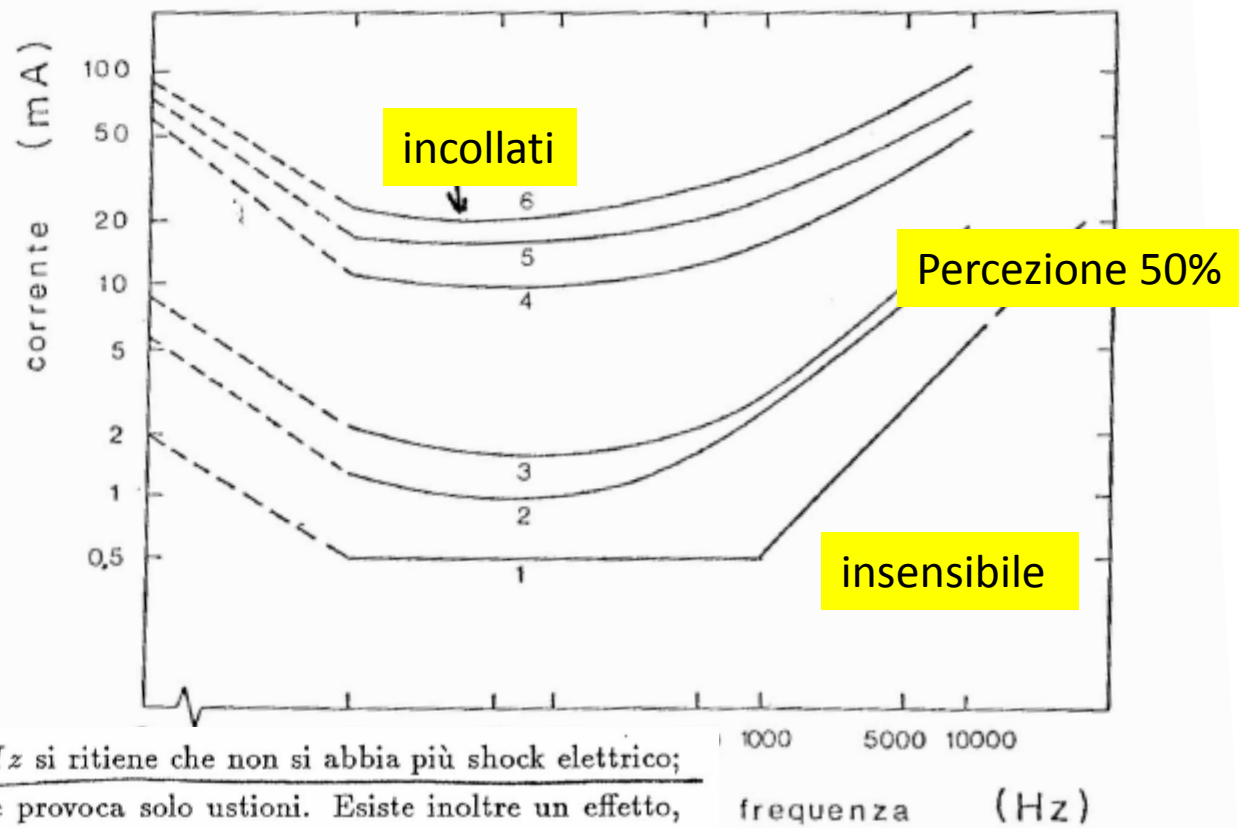
3 mA  Formicolio

15 mA  Difficoltà di liberarsi

40 mA  Crampo muscolare

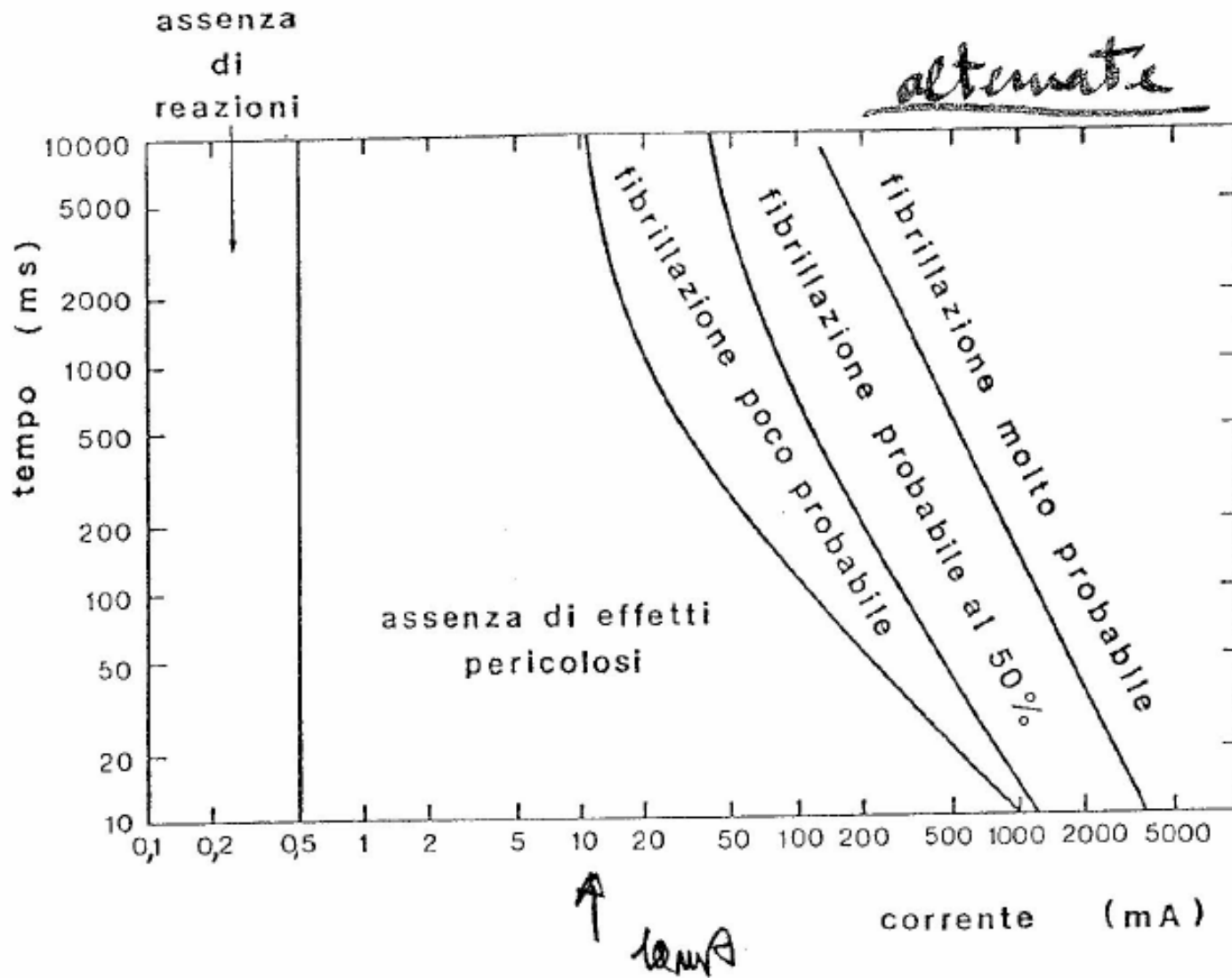
80 mA   Fibrillazione cardiaca  
morte

Un altro parametro che ha importanza fondamentale nel determinare la gravità degli infortuni elettrici è costituito dalla frequenza della corrente. In fig. 2.1 sono state riportate in grafico, in funzione della frequenza, correnti con diversa probabilità di percezione e di rilascio per gli uomini (i valori per le donne, anche in questo caso, sono pari circa il 66% di quelli

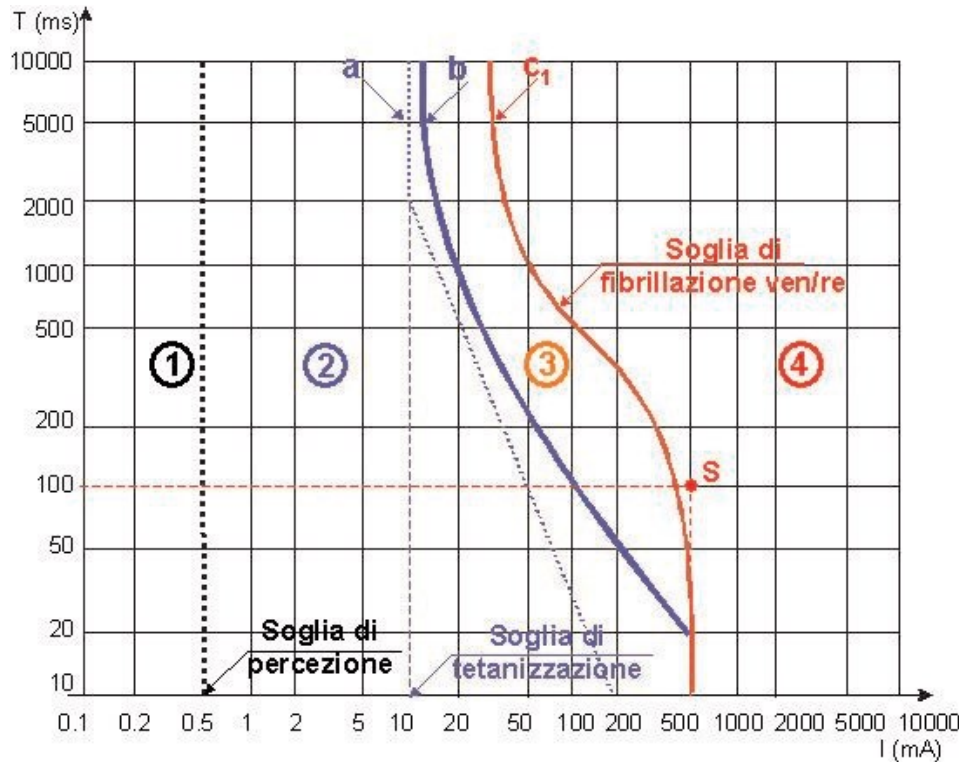


mente: a circa un 1 *MHz* si ritiene che non si abbia più shock elettrico; la corrente generalmente provoca solo ustioni. Esiste inoltre un effetto, detto "effetto pelle", per il quale all'aumentare della frequenza la corrente tende ad interessare strati di tessuto sempre meno profondi. Ciò causa un aumento della densità di corrente nelle regioni periferiche del corpo,

Correnti alternate e uomini > 50 kg



# CURVA DI SICUREZZA CORRENTE-TEMPO



La figura mostra la curva di sicurezza della corrente elettrica in regime di corrente alternata con una frequenza compresa tra 15 e 100 Hz.

- Se la corrente (valore efficace) è inferiore alla soglia di percezione (0.5 mA) il fenomeno non viene percepito
- Se la corrente è inferiore alla soglia di tetanizzazione (10 mA) la persona riesce a sottrarsi volontariamente al contatto senza conseguenze.
- Se la corrente supera la soglia di tetanizzazione il contatto deve essere interrotto da un dispositivo esterno prima di un tempo limite, individuato dalla curva di sicurezza, affinché la persona non abbia conseguenze.

In fig. 2.3 è riportato il diagramma di sicurezza per correnti continue in condizioni analoghe a quelle della figura precedente.

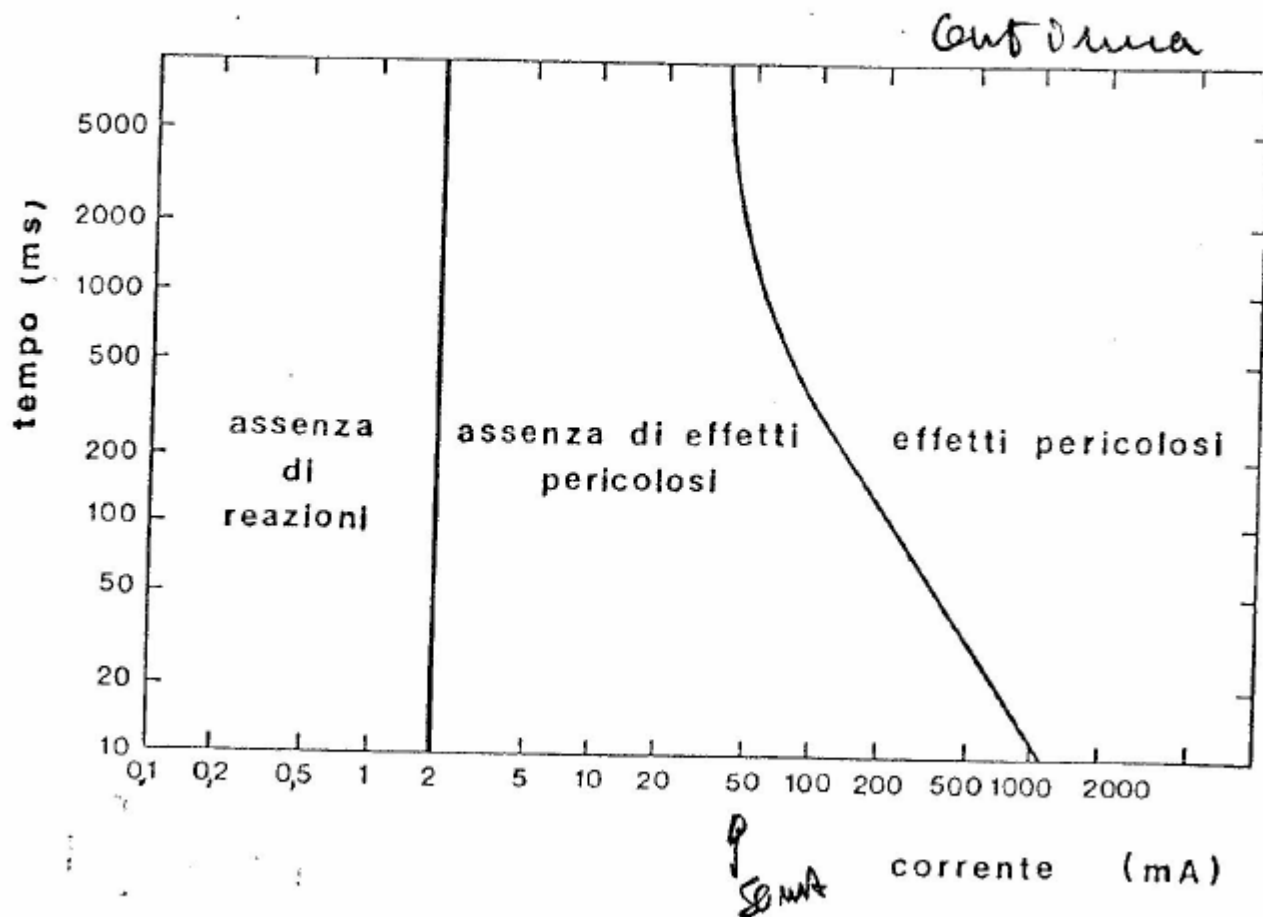


Fig. 2.3

# Dalla corrente alla tensione: Tensione minima di rilascio a 50 Hz

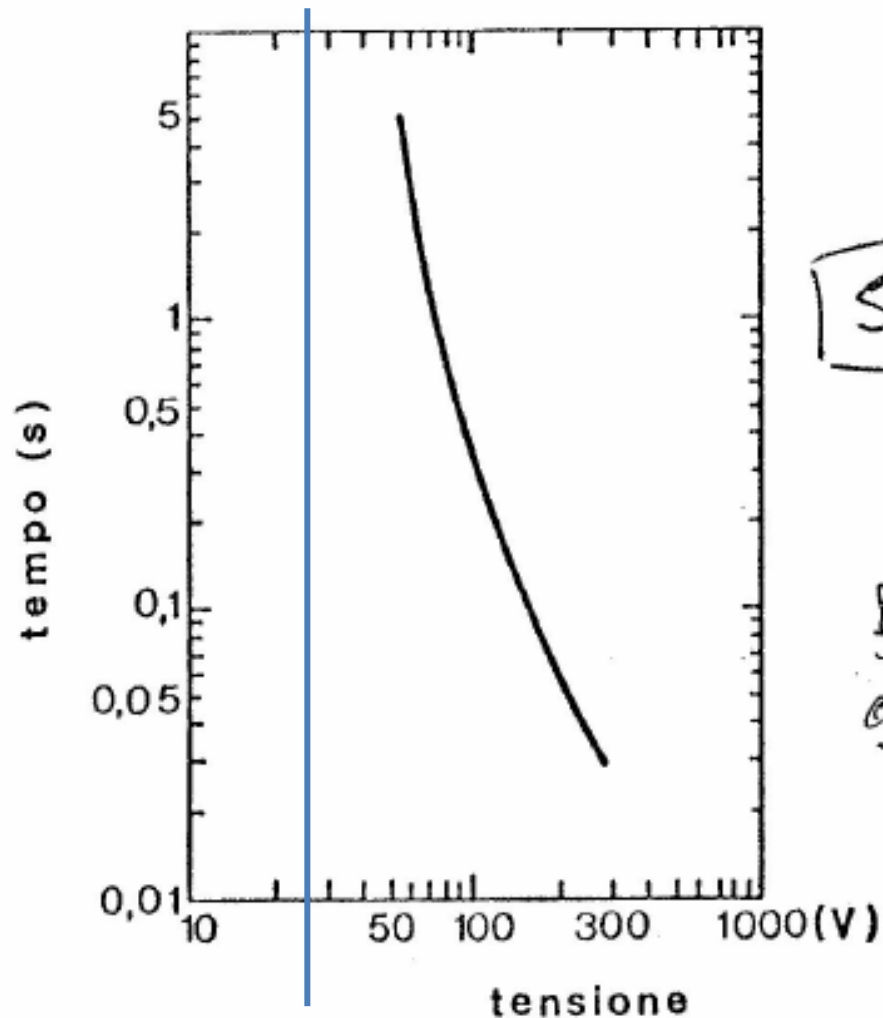
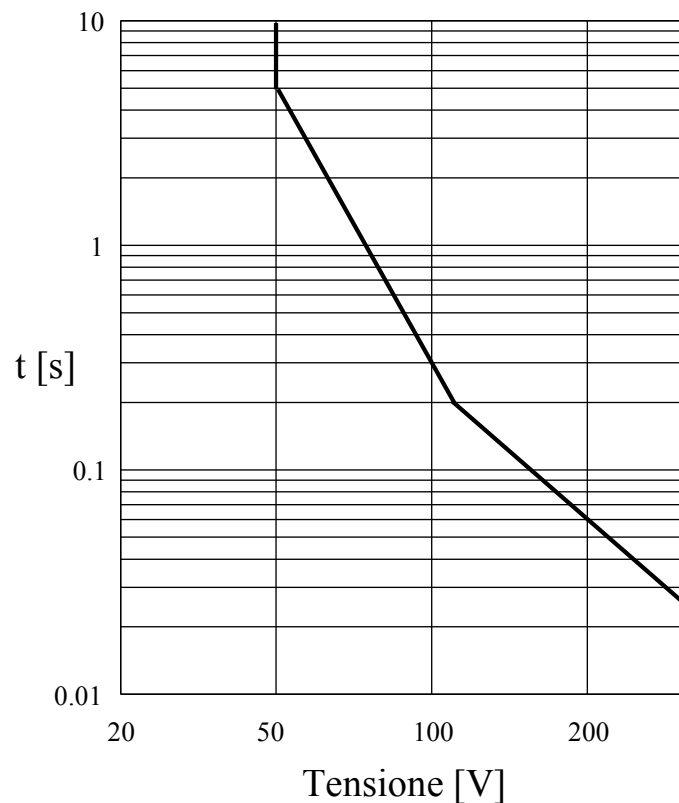


Fig. 3.1

## CURVA DI SICUREZZA TENSIONE-TEMPO

Dalla curva di sicurezza corrente-tempo, tenendo conto dei possibili valori della resistenza del corpo umano e della sua resistenza verso terra, le norme ricavano la curva di sicurezza tensione-tempo.

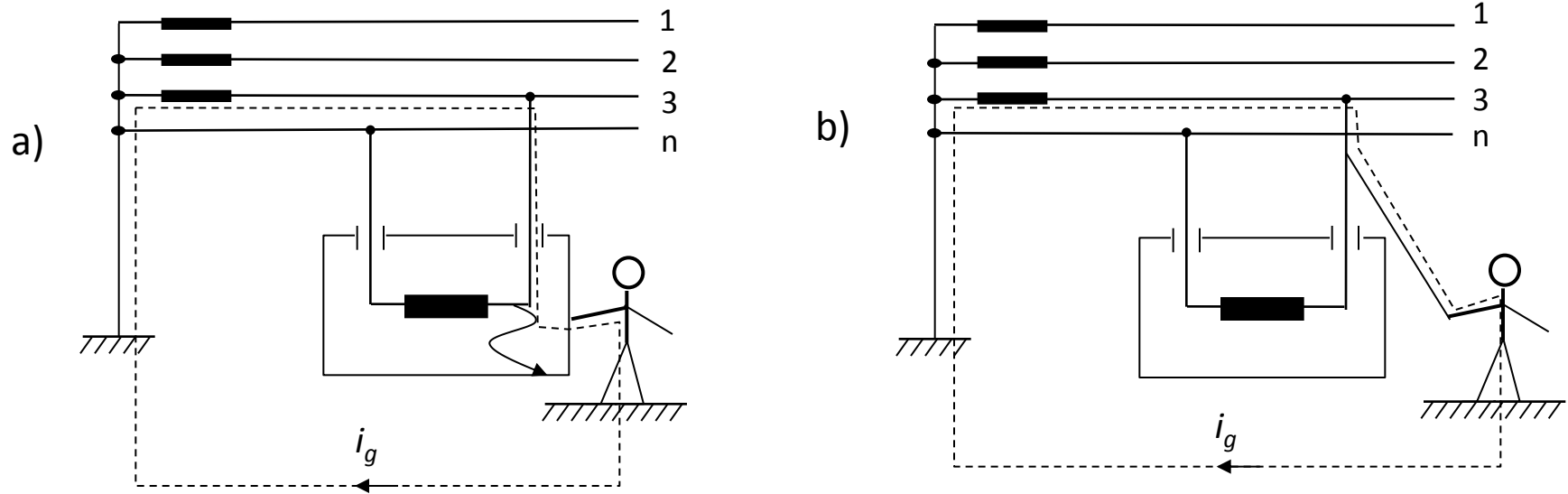


Curva di sicurezza tensione-tempo per impianti di categoria 1 (CEI 64-8)

- Se la tensione è inferiore ad un valore limite (50 V in ambiente al chiuso con un valore di resistenza verso terra di  $1000 \Omega$ ) il contatto può permanere per un tempo infinito senza conseguenze.
- Se la tensione è superiore al valore limite, la sicurezza viene raggiunta solo se l'impianto è in grado di interrompere il contatto prima del tempo limite definito dalla curva di sicurezza.
- Il valore di tensione da utilizzare è il valore di tensione di contatto a vuoto (calcolato supponendo nulla la corrente sulla persona)

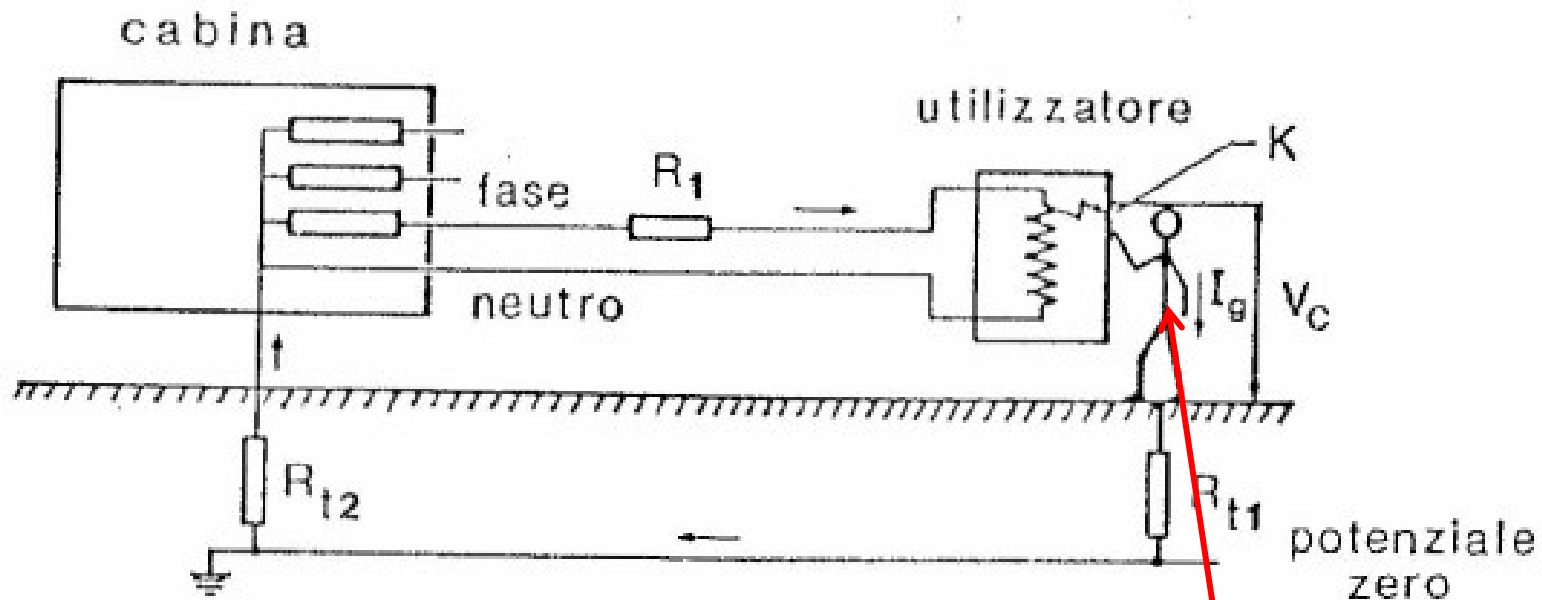


# SICUREZZA ELETTRICA NEGLI IMPIANTI DI DISTRIBUZIONE DELLA ENERGIA ELETTRICA IN BT



- La distribuzione della energia elettrica in BT viene fatta mediante linee elettriche trifase ( $V_c = 380$  V) col filo neutro collegato a terra.
- Si definisce **massa** ogni conduttore, accessibile dalle persone, che è separato dai conduttori attivi dall'isolamento principale e che quindi normalmente non è in tensione rispetto al terreno, ma va in tensione quando si rompe l'isolamento principale.
- Il contatto di una persona con un conduttore in tensione, con conseguente elettrocuzione, può avvenire, con una massa, in presenza della rottura dell'isolamento principale (**contatto indiretto**, figura a) o direttamente con i conduttori attivi (**contatto diretto**, figura b)

# E veniamo ai circuiti...



la carcassa dell'utilizzatore, viene sottoposta alla tensione "di contatto"  $V_c$  il cui valore è ottenibile, nell'ipotesi che tutta la corrente  $I_g$  che circola nella linea dopo il guasto circoli anche nel corpo della persona, dalla

$$V_c = V_n - (R_1 + R_2 + R_4 + R_{t1} + R_{t2})I_g = R_3 I_g$$

TABELLA I

| Situazione del soggetto all'atto della rilevazione della misura          | Resistenza del corpo umano ( $\Omega$ ) |
|--|---|
| 1) Piedi isolati e contatto con entrambe le mani                         | 1300                                    |
| 2) Piedi a potenziale di terra e contatto con una sola mano              | 975                                     |
| 3) Piedi a potenziale di terra e contatto con entrambe le mani           | 650                                     |
| 4) Corpo parzialmente immerso nell'acqua e contatto con entrambe le mani | 220                                     |

# Fusibile con messa a terra

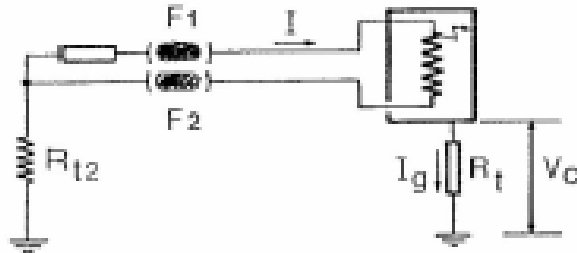
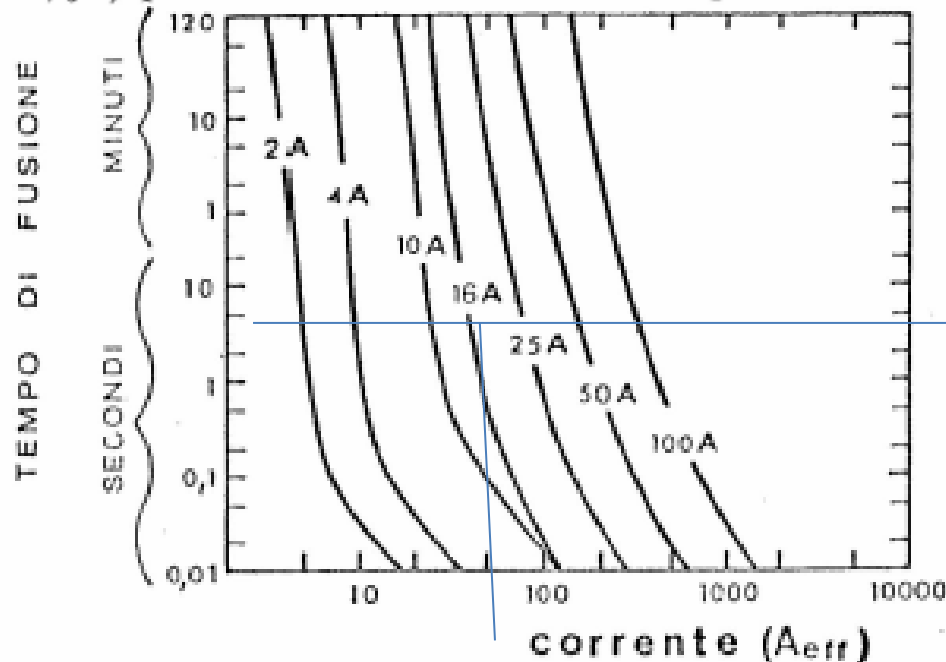
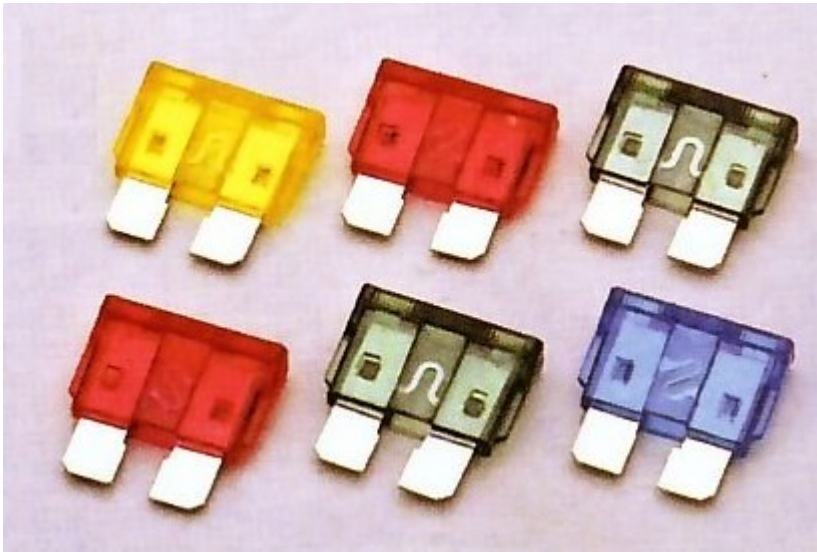


Fig. 2.1

Dalla tabella "corrente-tempo d'intervento", fornita dalla ditta costruttrice e riportata in fig. 2.2, si ricava che il fusibile fonde in 5 s (massimo tempo di applicabilità per una tensione di contatto  $V_c$  pari a 50 V, vedi cap. II, § 3) quando è attraversato da una corrente pari a circa 40 A.



$$R_t \leq \frac{V_c}{I} = \frac{50}{40} \Omega = 1,2 \Omega$$





magnetotermico

# magnetotermico

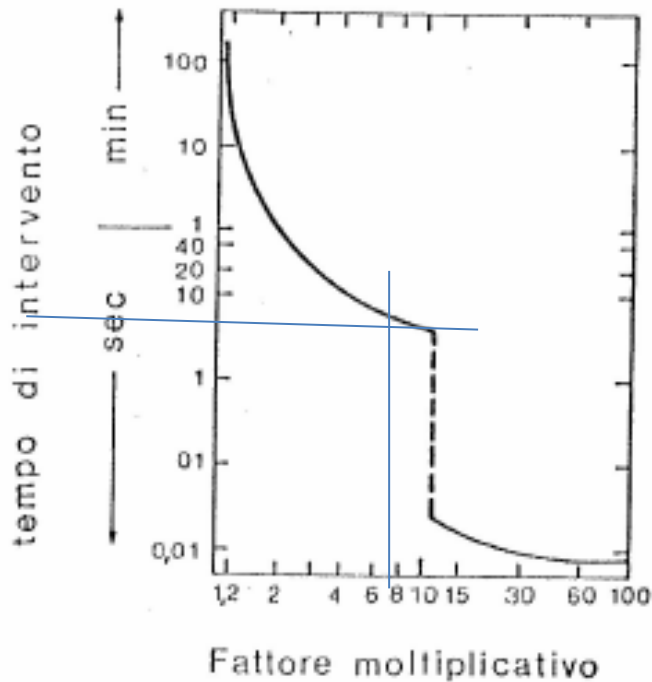


Fig. 3.1

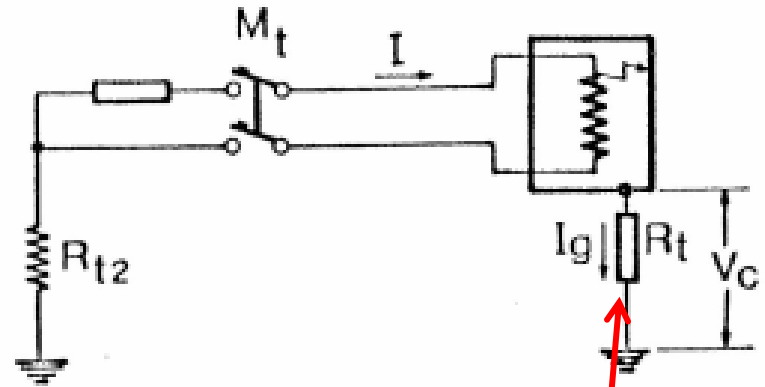
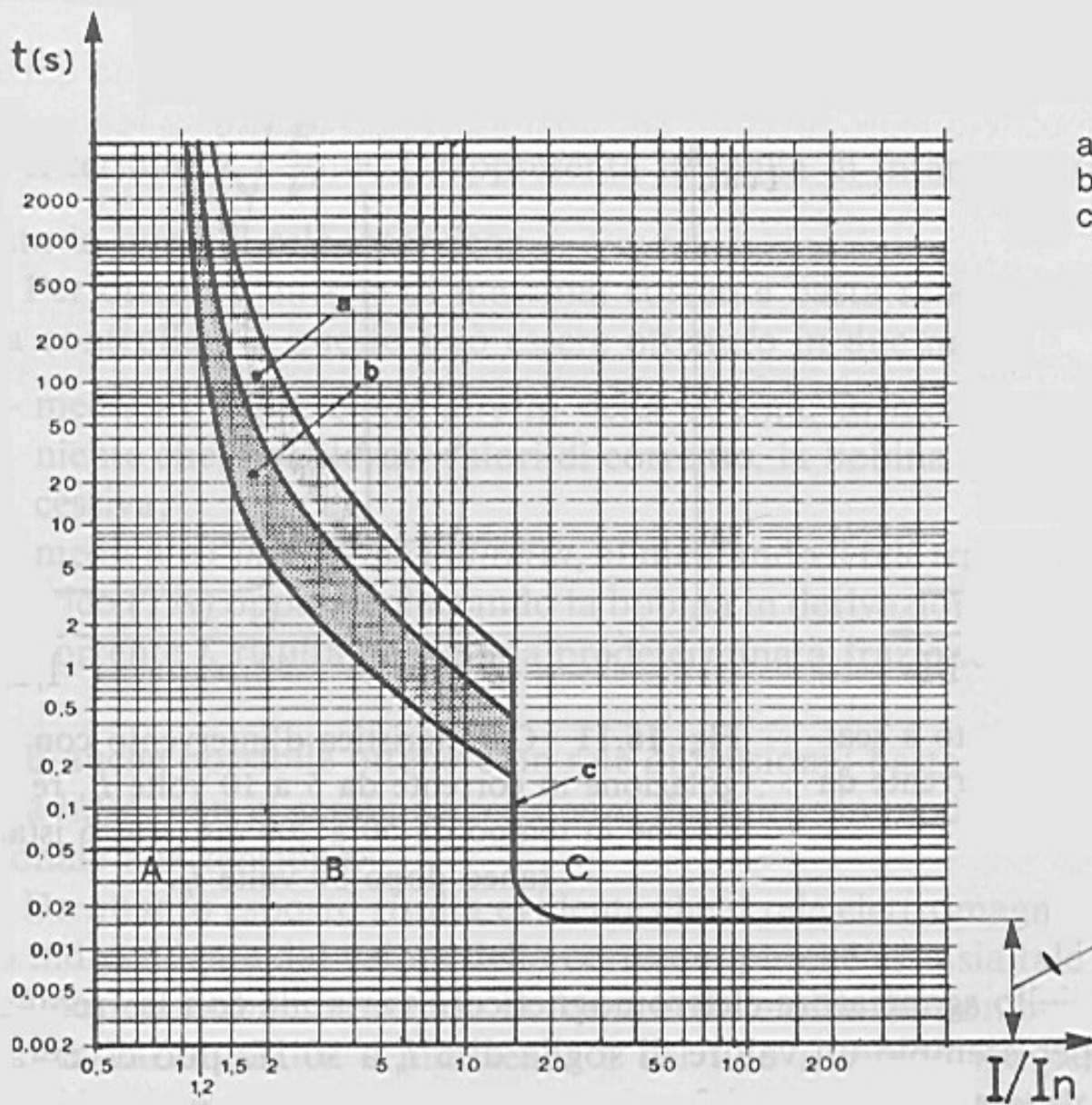


Fig. 3.2

5 s per  $8 \times 16 = 128$  A

$$R_t \leq \frac{50}{128} \Omega \simeq 0,4 \Omega$$

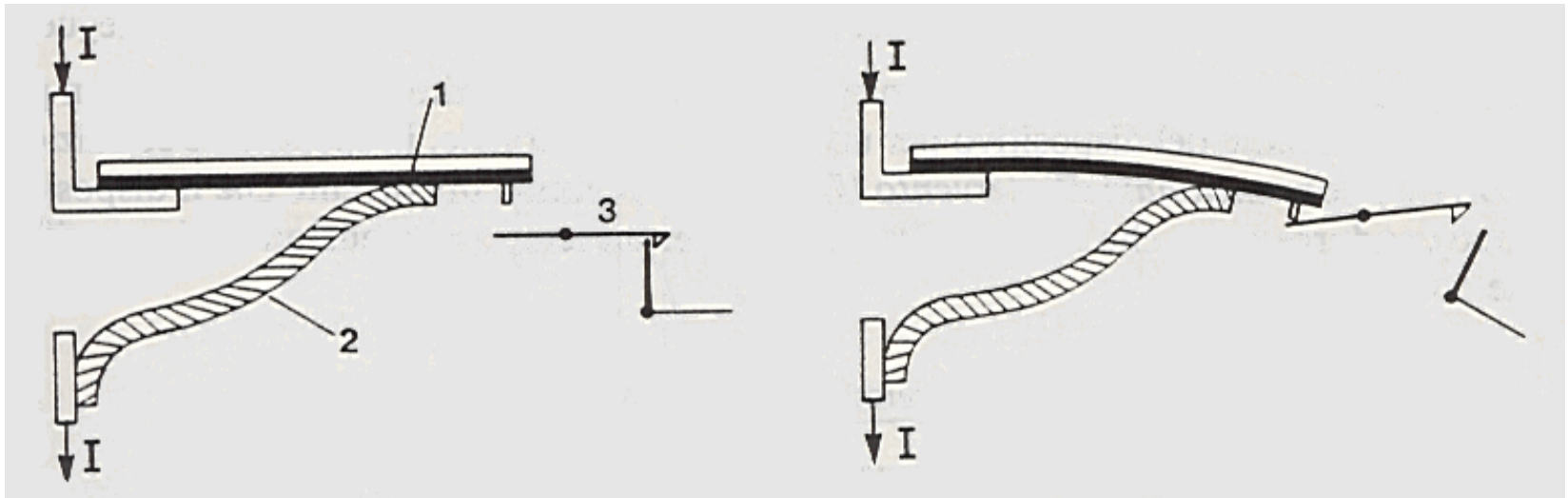


a: sganciatore termico a freddo  
 b: sganciatore termico a caldo  
 c: sganciatore magnetico fisso

durata totale massima  
 d'interruzione



# Lamina bimetallica



# differentiale

L'interruttore differenziale è formato da tre parti, aventi ognuna una specifica funzione. La successione d'intervento per ognuna di queste parti è di tipo sequenziale: la prima (sensore) percepisce una grandezza elettrica e la trasmette alla seconda (amplificatore) che, amplificatala, la invia alla terza (sganciatore); quest'ultima attua l'intervento finale elettromeccanico del dispositivo.

In fig. 5.1 è schematizzato un circuito elettrico con protezione differenziale.

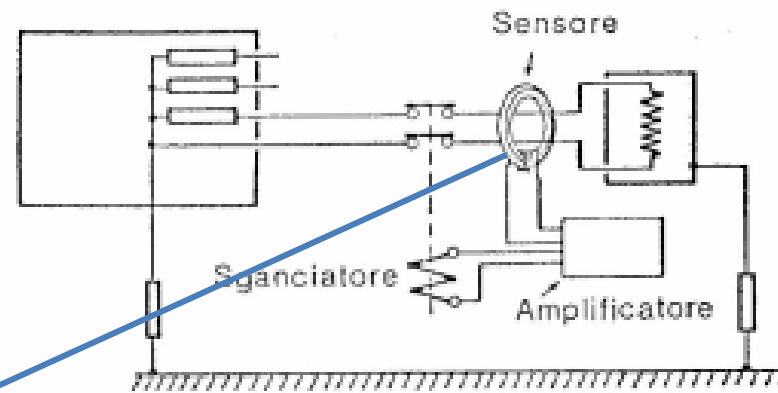


Fig. 5.1

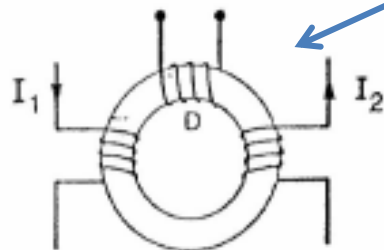
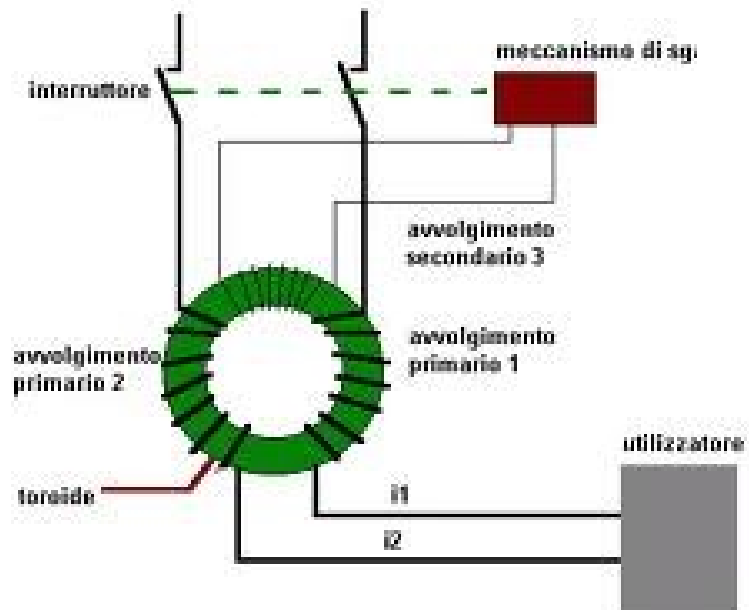
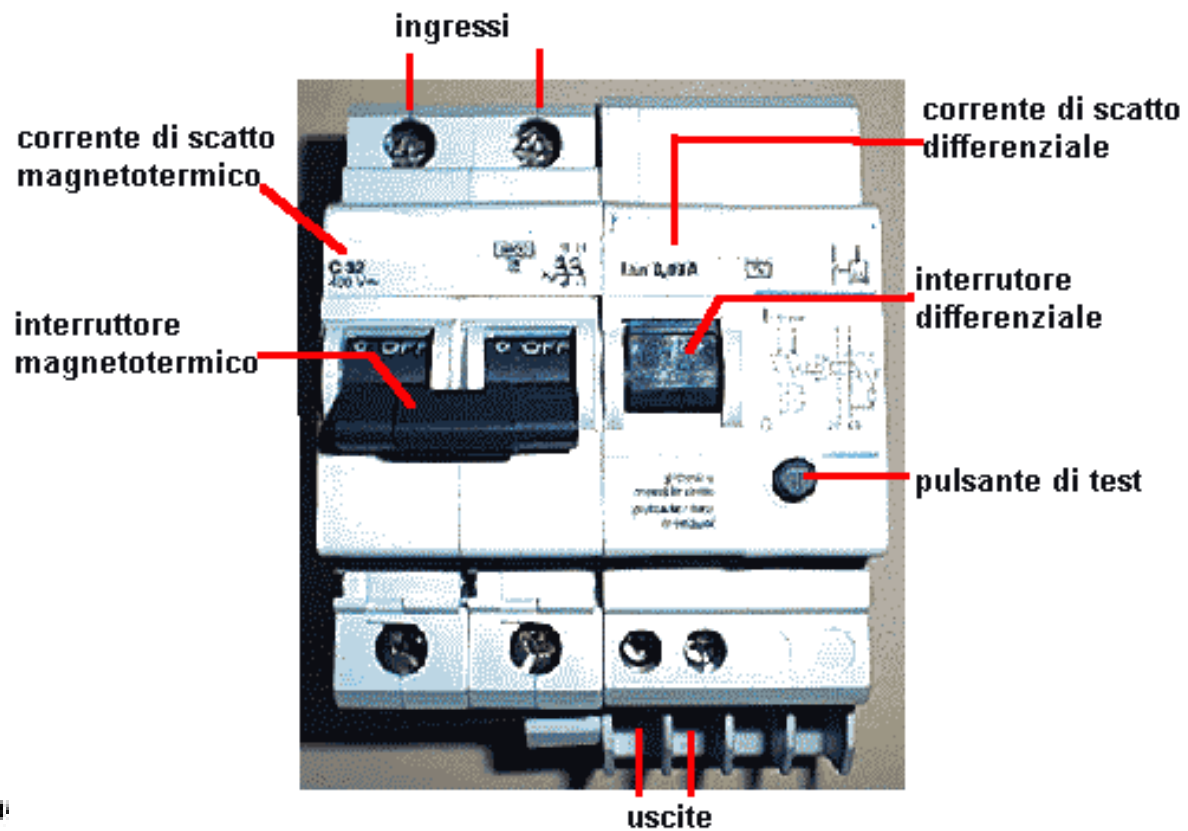
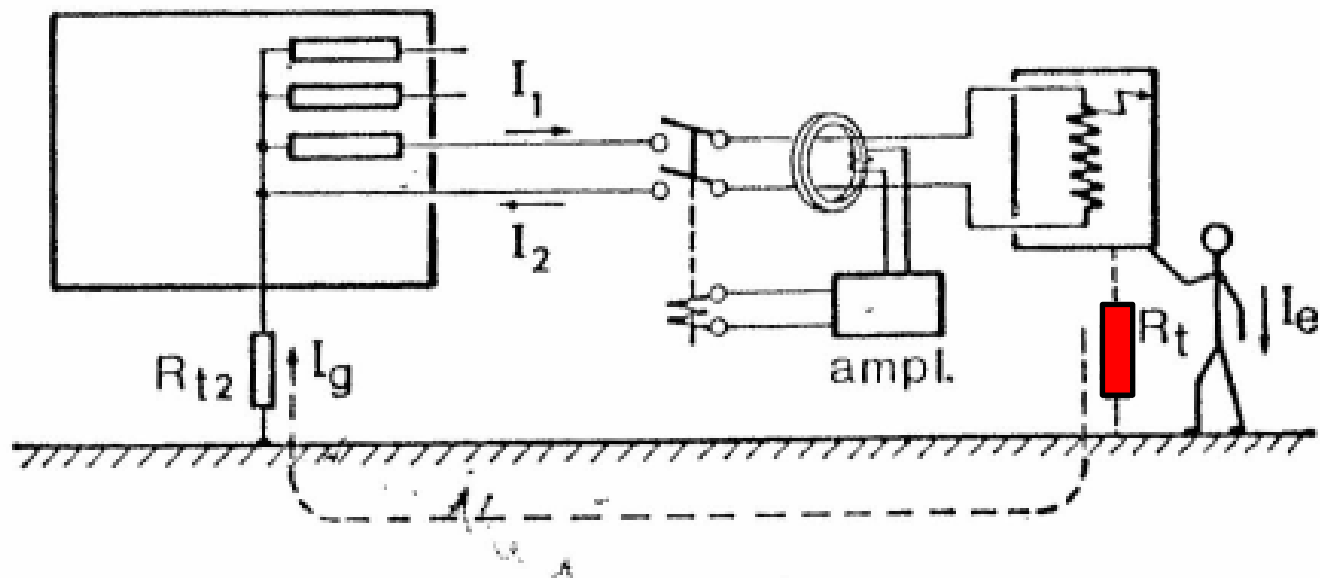


Fig. 5.2



- a) - la carcassa metallica dell'utilizzatore è collegata ad un impianto di messa a terra di resistenza  $R_t$ .
- b) - La carcassa metallica dell'utilizzatore è completamente isolata da terra.

Nel caso a), all'insorgere del guasto verso massa si forma una corrente di dispersione  $I_g$ , tanto più elevata quanto più basso è il valore di  $R_t$ . L



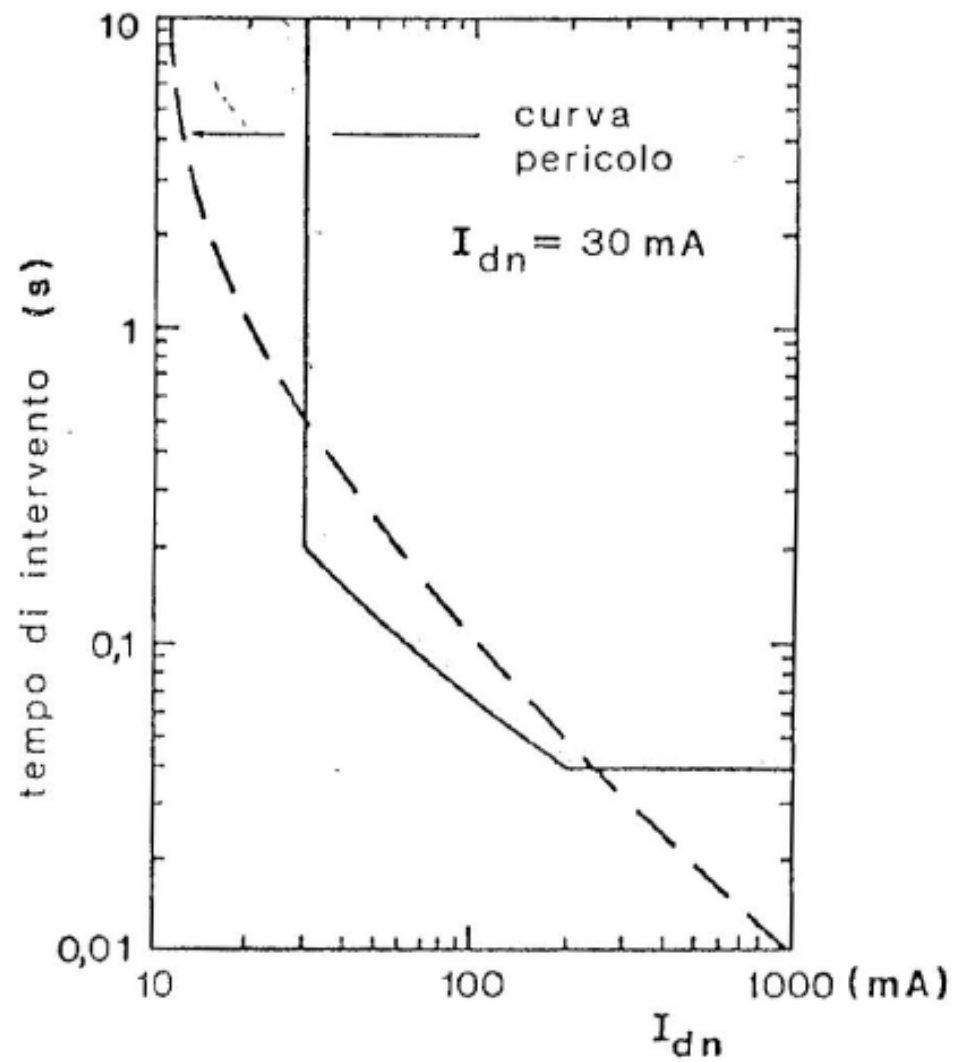
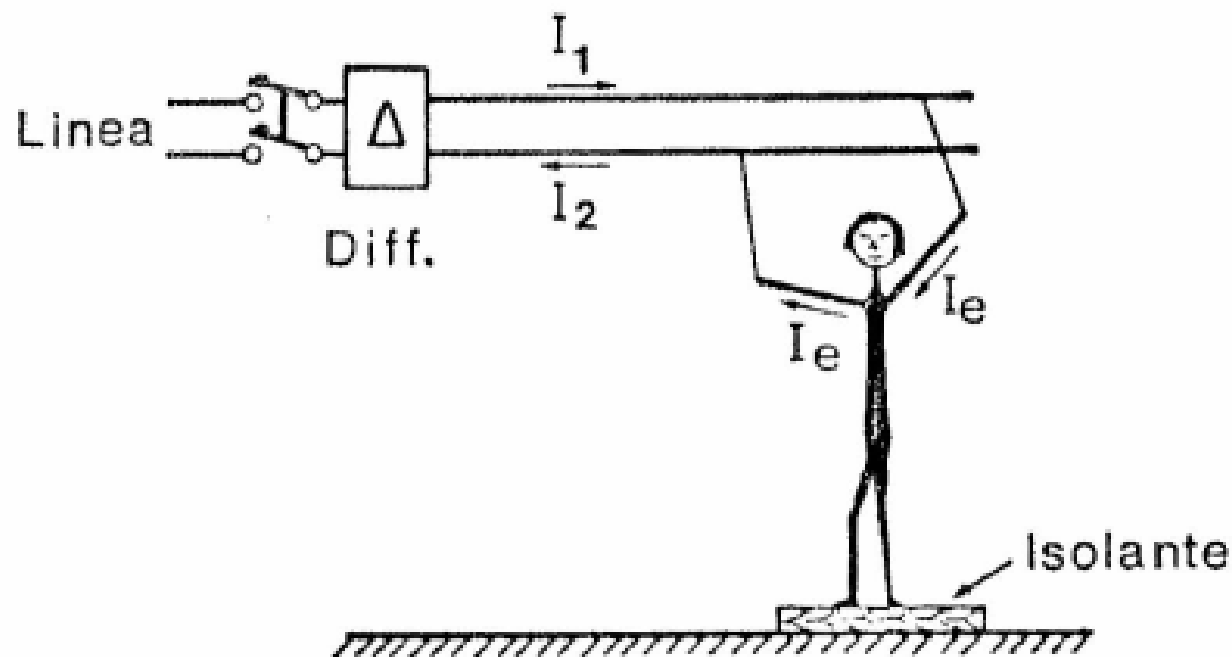
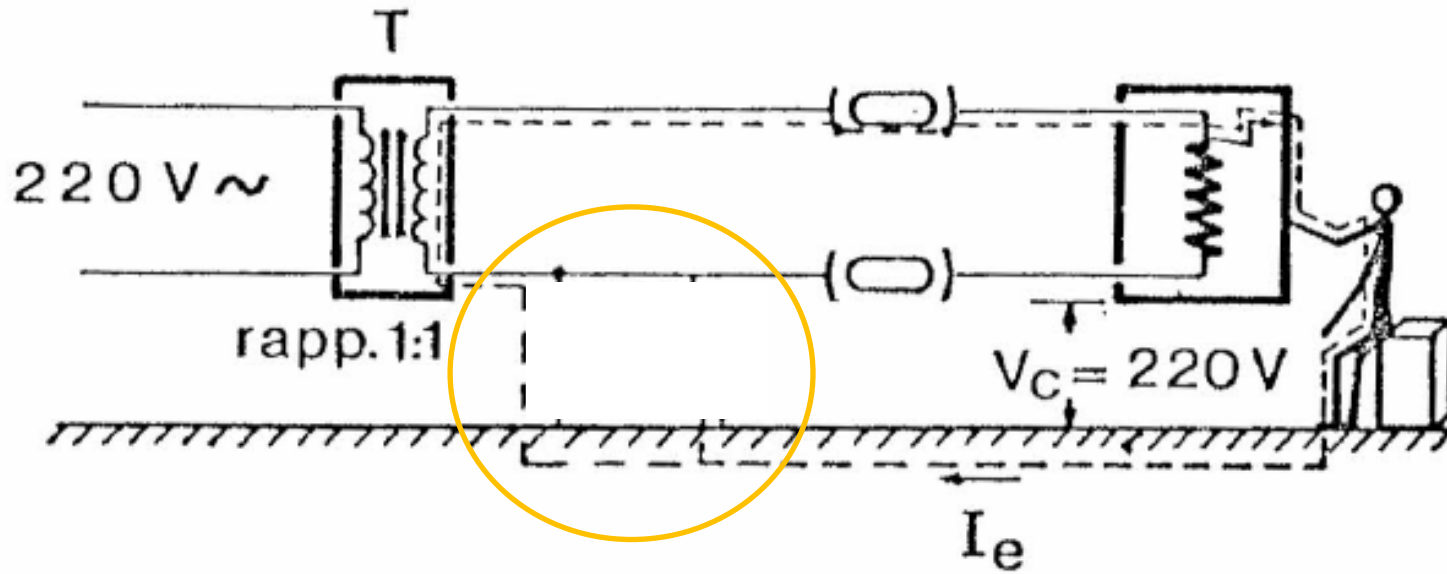


Fig. 5.4

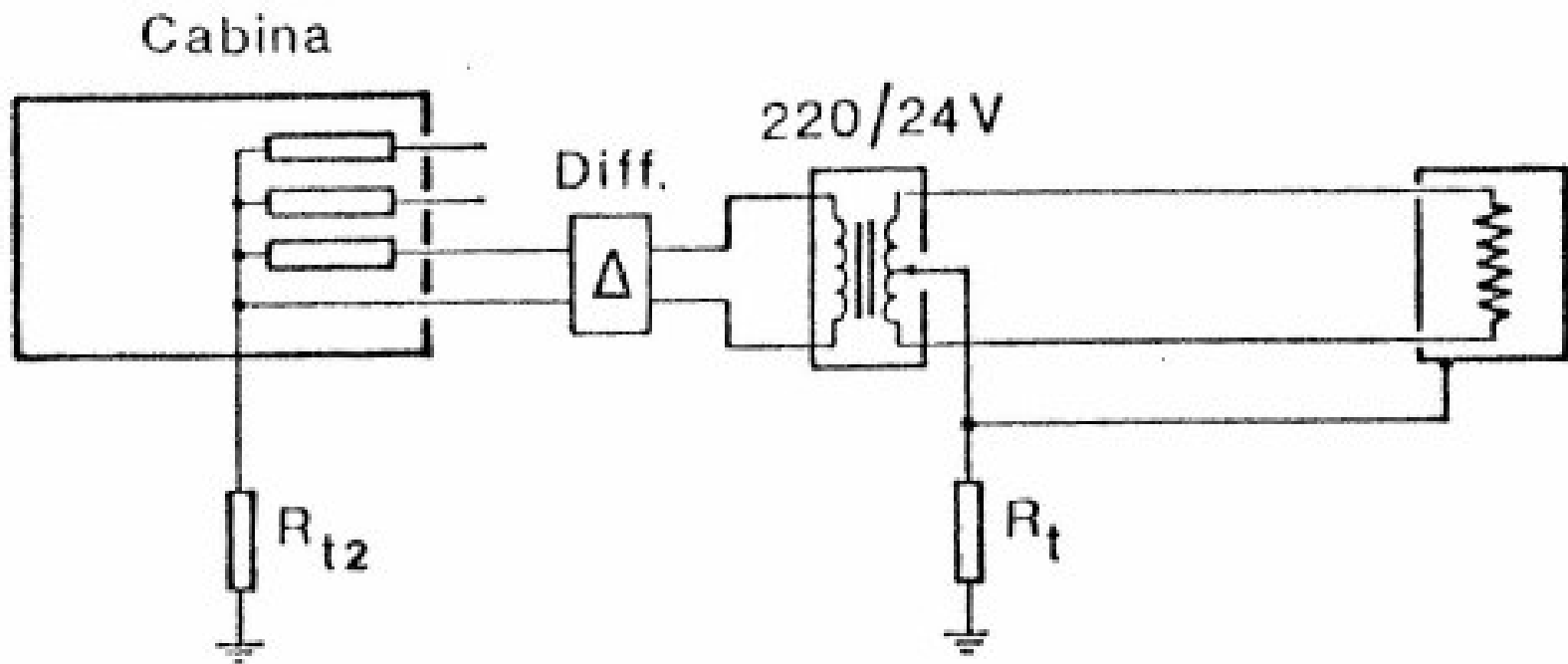
In fig. 5.5 è schematizzato questo tipo di incidente: una persona isolata dal terreno, subisce un'elettrocuzione fra le mani, venute accidentalmente a contatto con due diverse fasi del circuito di alimentazione.



# trasformatore

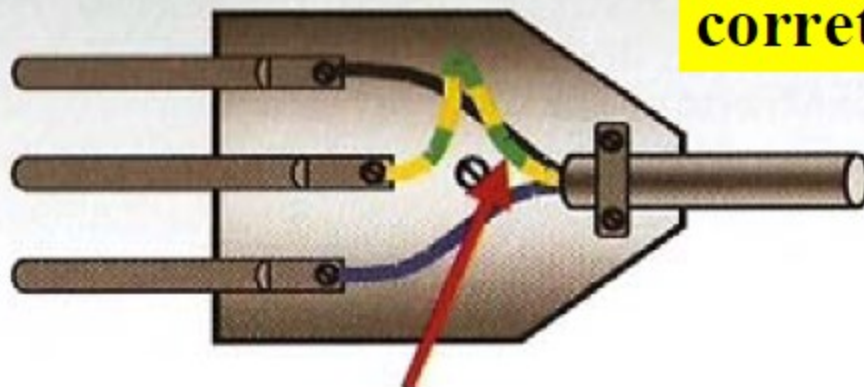


# Bassa tensione

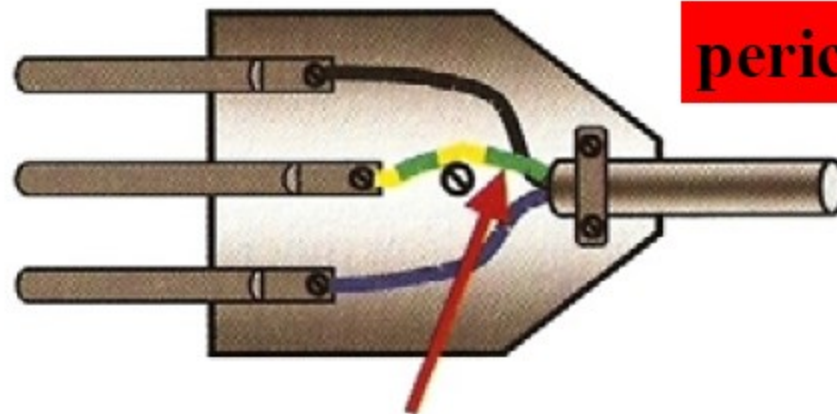




# Allacciamento spine



**corretto**



**pericoloso**











