Le particelle elementari ed i loro campi

1. Le particelle Fermioni di Dirac :
   - quarks (u_a , d_a, s_a, c_a, b_a, t_a) dove a = red, green, blue i 3 colori dei quarks;
   - leptoni : e, μ, τ, ν_e, ν_μ, ν_τ (i neutrini in SM sono di Dirac);
2. i Fermioni di Majorana :
   - neutrini di Majorana : ν_e, ν_μ, ν_τ (il neutrino e' l'antiparticella di se stesso);
3. i Bosoni vettoriali di Gauge :
   - $W^\pm$, Z^0, A;
4. i Gluoni, intermediari della forza forte :
   - $\hat{\mathcal{A}}_C$, con C che va da 1 a $N^2_{color} - 1$, tanti quanti sono i generatori di $SU(3)_{color}$;
5. la particella scalare di Higgs : $\widehat{\sigma}$

NOTA BENE :
in questo corso il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ é cosí definito :

$$g_{00} = g^{00} = 1; \qquad g_{11} = g^{11} = g_{22} = g^{22} = g_{33} = g^{33} = -1$$

Ricordo che nella rappresentazione standard delle matrici di Dirac si ha

$$\gamma^k \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

con k=1,2,3; e $\sigma^k \equiv$ le matrici di Pauli.

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$(\gamma^5)^2 = 1$$

ed inoltre

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I$$

Equazione di Dirac

$$i\hbar\partial_\mu\gamma^\mu\psi - mc\psi = 0$$

Campi dei Fermioni (di Dirac)

$$\widehat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\sum_{r=-1,1}[\hat{c}_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]$$

$$\widehat{\overline{\psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\sum_{r=-1,1}[\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\overline{u}_r(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar} + \hat{d}_r(\mathbf{p})\overline{v}_r(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar}]$$

dove

$m \equiv$ massa del fermione;

$px \equiv p_\mu x^\mu$;

$p^0 c \equiv E = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$;

$u_r(\mathbf{p}) \equiv$ spinore di Dirac di momento $\mathbf{p}$, componente lungo Z dello spin $r\frac{\hbar}{2}$, con $r = \pm 1$;

un esempio concreto e'

$$u_r(\mathbf{p}) \equiv \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}\chi \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\chi\end{pmatrix};\ \text{con } \chi = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ per } r = 1 \text{ e } \chi = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ per } r = -1;$$

la componente dello spin e' qui intesa lungo l'asse Z del sistema di riferimento dove la particella e' in quiete (quindi quel sistema raggiunto con una opportuna rotazione, un boost di Lorentz ed una controrotazione tali per cui $\mathbf{p}$ diventi 0);

$v_r(\mathbf{p}) \equiv$ spinore di Dirac di particella singola definito a partire da $u_r(\mathbf{p})$ tramite l'operazione di charge conjugation :

$$v_r(\mathbf{p}) = i\gamma^2 u_r(\mathbf{p})^*$$

da cui segue che

$$v_r(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\chi \\ \chi \end{pmatrix}; \text{ con (attenzione alla differenza!!)}$$

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ per } r = 1 \text{ e } \chi = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ per } r = -1$$

e pertanto $v_r(\mathbf{p})$ e' uno spinore (di particella singola) con momento $-\mathbf{p}$, spin $-r$. Si noti anche che dalla definizione discende che

$$i\gamma^2 v_r^*(\mathbf{p}) = u_r(\mathbf{p})$$

$\hat{c}_r(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di distruzione della particella di momento $\mathbf{p}$ e spin $r\frac{\hbar}{2}$;

$\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di creazione della particella di momento $\mathbf{p}$ e spin $r\frac{\hbar}{2}$;

$\hat{d}_r(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di distruzione dell'antiparticella di momento $\mathbf{p}$ e spin $r\frac{\hbar}{2}$;

$\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di creazione dell'antiparticella di momento $\mathbf{p}$ e spin $r\frac{\hbar}{2}$;

Si definiscono gli operatori UNITARI corrispondenti alle simmetrie discrete, vale a dire l'operazione di parita' ($\mathcal{P}$), la charge conjugation ($\mathcal{C}$) e il time reversal ($\mathcal{T}$). Qui mostro solo $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ e l'operazione combinata $\mathcal{CP}$.
Questi operatori agiscono sugli stati delle particelle, ad es. :

$$|\psi>' = \mathcal{P}|\psi>, \;\; \mathcal{P}^\dagger\mathcal{P} = 1$$

dove ψ e' uno stato, in generale, a molte particelle. Tuttavia solitamente per la definizione si parte dall'Hamiltoniana dato che queste trasformazioni sono di fatto rilevanti per gli elementi di matrici del tipo

$$<\psi_f|\hat{H}_I|\psi_i>$$

Usualmente cioe' si considera (prendo come esempio la trasformazione di parita') :

$$<\mathcal{P}\psi_f|\hat{H}_I|\mathcal{P}\psi_i> = <\psi_f|\mathcal{P}^\dagger\hat{H}_I\mathcal{P}|\psi_i>$$

ovvero la trasformazione indotta sull'operatore H_I :

$$\mathcal{P}^\dagger\hat{H}_I\mathcal{P}$$

e piu' precisamente la trasformazione indotta sugli operatori di campo. Nel caso dei fermioni di Dirac si definisce $\mathcal{P}$ come segue :

$$\mathcal{P}^\dagger\widehat{\psi}(\vec{x}, x^0)\mathcal{P} = \gamma^0\widehat{\psi}(-\vec{x}, x^0) \tag{1}$$

Si noti che questa trasformazione e' formalmente identica a quella di una funzione d'onda di Dirac a particella singola, sostituento al posto della ψ l'operatore di campo corrispondente $\hat{\psi}$.
Esplicitando la trasformazione si ottiene :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\dagger\widehat{\psi}(x)\mathcal{P} &= \mathcal{P}^\dagger\{\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\sum_{r=-1,1}[\hat{c}_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-i(p_0x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} + \hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{i(p_0x^0-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}]\}\mathcal{P} \\
&= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\sum_{r=-1,1}[\hat{c}_r(\mathbf{p})\gamma^0u_r(\mathbf{p})e^{-i(p_0x^0+\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} + \hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0v_r(\mathbf{p})e^{i(p_0x^0+\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}]
\end{aligned}$$

con la condizione aggiuntiva di imporre la parita' del vuoto positiva : $\mathcal{P}|0>=|0>$.
Da tutto questo si ricava che :

$$\mathcal{P}^\dagger\hat{c}_r(\mathbf{p})\mathcal{P} = \hat{c}_r(-\mathbf{p}) \tag{2}$$
$$\mathcal{P}^\dagger\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{P} = -\hat{d}_r^\dagger(-\mathbf{p}) \tag{3}$$

Da queste relazioni si ottengono le seguenti :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}^\dagger\hat{c}_r(\mathbf{p})\mathcal{P})^\dagger &= \hat{c}_r^\dagger(-\mathbf{p}) \to \mathcal{P}^\dagger\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{P} = \hat{c}_r^\dagger(-\mathbf{p}) \\
(\mathcal{P}^\dagger\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{P})^\dagger &= -\hat{d}_r(-\mathbf{p}) \to \mathcal{P}^\dagger\hat{d}_r(\mathbf{p})\mathcal{P} = -\hat{d}_r(-\mathbf{p})
\end{aligned}$$

Inoltre dalla (2) si ricava anche :

$$\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}^\dagger\hat{c}_r(\mathbf{p})\mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger\hat{c}_r(-\mathbf{p})\mathcal{P} \to \mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}^\dagger\hat{c}_r(\mathbf{p})\mathcal{P}\mathcal{P} = \hat{c}_r(\mathbf{p})$$

vale a dire $\mathcal{P}\mathcal{P} = 1$ e quindi $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger$. Quest'ultima proprieta' si puo' ricavare direttamente anche dalla (1).
Dalle relazioni appena scritte segue che :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})|0> = \mathcal{P}\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}|0> = +\hat{c}_r^\dagger(-p)|0> \\
\mathcal{P}\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})|0> = \mathcal{P}\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}|0> = -\hat{d}_r^\dagger(-p)|0>
\end{aligned}$$

e quindi uno stato ad una particella (antiparticella) di momento **p** viene trasformato in uno stato di particella (antiparticella) con momento **-p**.
Infine e' facile verificare che

$$\mathcal{P}^\dagger\widehat{\overline{\psi}}(\vec{x},x^0)\mathcal{P} = \widehat{\overline{\psi}}(-\vec{x},x^0)\gamma^0.$$

L'operatore di charge conjugation si definisce in maniera formalmente identica al caso di particella singola. Si definisce $\mathcal{C}$ come segue :

$$\mathcal{C}^\dagger\widehat{\psi}(x)\mathcal{C} \equiv \widehat{\psi^C}(x) \equiv i\gamma^2(\widehat{\psi}(x)^\dagger)^T \tag{4}$$

con in aggiunta la condizione aggiuntiva : $\mathcal{C}|0>=|0>$.
Esplicitando la trasformazione si ottiene :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\dagger\widehat{\psi}(x)\mathcal{C} &= \mathcal{C}^\dagger\{\int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\sum_{r=-1,1}[\hat{c}_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar}+\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]\}\mathcal{C} = \\ &= i\gamma^2\int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\sum_{r=-1,1}[\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^*(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}+\hat{d}_r(\mathbf{p})v_r^*(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar}]\end{aligned}$$

Tenuto conto che, in accordo con la convenzione scritta sopra per gli spinori di Dirac :

$$\begin{aligned}i\gamma^2u_r^*(\mathbf{p}) &= v_r(p)\\ i\gamma^2v_r^*(\mathbf{p}) &= u_r(p)\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\dagger\widehat{\psi}(x)\mathcal{C} &= \mathcal{C}^\dagger\{\int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\sum_{r=-1,1}[\hat{c}_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar}+\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]\}\mathcal{C} \\ &= \int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\sum_{r=-1,1}[\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}+\hat{d}_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar}]\end{aligned}$$

Di conseguenza si ottiene :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\dagger\hat{c}_r(\mathbf{p})\mathcal{C} &= \hat{d}_r(\mathbf{p}) \qquad (5)\\ \mathcal{C}^\dagger\hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{C} &= \hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p}) \qquad (6)\end{aligned}$$

Dalle (5) e (6) ottengo anche :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\dagger\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{C} = \hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p}) \qquad (7)\\ \mathcal{C}^\dagger\hat{d}_r(\mathbf{p})\mathcal{C} = \hat{c}_r(\mathbf{p}) \qquad (8)\end{aligned}$$

ed usando le (7) e la (6)

$$\mathcal{C}^\dagger\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{C} = \hat{d}_r^\dagger(\mathbf{p}) \rightarrow \mathcal{C}^\dagger\mathcal{C}^\dagger\hat{c}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{C}\mathcal{C} = \hat{c}^\dagger(\mathbf{p})$$

da cui si deduce la condizione

$$\mathcal{C}\mathcal{C} = 1 \rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}^\dagger.$$

Quest'ultima si sarebbe potuta ricavare direttamente da (4).
Usando la (6) e la (7) e' facile verificare che

$$\mathcal{C}^\dagger\overline{\widehat{\psi}}(x)\mathcal{C} = [i\gamma^2\widehat{\psi}(x)]^T\gamma^0 = i[\gamma^0\gamma^2\widehat{\psi}(x)]^T = i\widehat{\psi}(x)^T\gamma^2\gamma^0$$

Equazione di Majorana

$$i\hbar\partial_\mu\gamma^\mu\psi_M - mc\psi_M^C = 0$$

dove $\psi_M^c \equiv C\psi_M^*$ e C e' la matrice di charge conjugation. Se si usa la rappresentazione standard delle matrici di Dirac nella quale $\gamma^k \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$ k $= 1, 2, 3;$ $(\sigma^k \equiv$ le matrici di Pauli) e $\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

allora $C = i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

.

C'é una connessione tra le soluzioni dell'equazione di Dirac e quelle dell'equazione di Majorana :

Campi dei Fermioni di Majorana

Generalmente quando si parla di neutrino di Majorana si intende un operatore di campo costruito con soluzioni dell'equazione di Majorana che siano anche soluzioni dell'equazione di Dirac. Si dimostra facilmente che tali soluzioni sono del tipo :

$$\psi_M = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_D + C\psi_D^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_D + \psi_D^C)$$

con ψ_D una soluzione qualunque dell'equazione di Dirac. Ad esempio una soluzione é :

$$\psi_M(x, \mathbf{p}, r) \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\frac{1}{\sqrt{2}}[u_r(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + v_r(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]$$

dove viene sfruttata la relazione $v_r(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar} = C(u_r(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar})^*$.
Si definisce l'operatore di campo di Majorana il seguente :

$$\widehat{\psi}_M(x) = \int d^3p \sum_{r=-1,1} \psi_M(x, \mathbf{p}, r)\hat{a}_r(\mathbf{p})$$

insieme al suo operatore coniugato :

$$\widehat{\overline{\psi}}_M(x) = \int d^3p \sum_{r=-1,1} \overline{\psi}_M(x, \mathbf{p}, r)\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})$$

dove

$\overline{\psi}_M(x, \mathbf{p}, r) \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}}\sqrt{\frac{mc^2}{E_p}}\frac{1}{\sqrt{2}}[\overline{u}_r(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar} + \overline{v}_r(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar}]$;

$m \equiv$ massa del fermione;

$px \equiv p_\mu x^\mu$;

$E_p \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$;

$u_r(\mathbf{p}) \equiv$ spinore di Dirac di momento $\mathbf{p}$, spin r;

$v_r(\mathbf{p}) \equiv$ spinore di Dirac di momento $-\mathbf{p}$, spin -r;

$\hat{a}_r(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di distruzione della particella;

$\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di creazione della particella;

Equazione di Proca

$$\Box W^\alpha(x) - \partial^\alpha(\partial_\beta W^\beta(x)) + m_W^2 W^\alpha(x) = 0$$

dove $m \equiv M_W c/\hbar$ dalla quale, calcolando la 4-divergenza, si ricava :

$$\partial_\beta W^\beta(x) = 0$$

per cui le equazioni di Proca si scrivono usualmente cosí :

$$\Box W^\alpha(x) + m_W^2 W^\alpha(x) = 0$$

piú la condizione ausiliaria (é la condizione di Lorentz) :

$$\partial_\beta W^\beta(x) = 0$$

Il campo W puó essere complesso (caso del bosone $W^\pm$) oppure reale (caso del campo dello Z, del fotone e del gluone).

Campi vettoriali dei Bosoni di Gauge : campo del W$^\pm$

$$\widehat{W}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=1}^{3} [\hat{a}_r(\mathbf{p})\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\epsilon_r^{\mu *}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]$$

$$\widehat{W}^{\mu\dagger}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=1}^{3} [\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})\epsilon_r^{\mu *}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar} + \hat{b}_r(\mathbf{p})\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar}]$$

dove

$m_W \equiv$ massa del W;

$px \equiv p_\mu x^\mu$;

$p^0 \equiv E_p/c = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_W^2 c^2}$;

$\epsilon_r(\mathbf{p}) \equiv 3$ vettori (non 4!) che soddisfano : $\epsilon_r^\mu p_\mu = 0$ (deriva dalla condizione di Lorentz); inoltre si scelgono ortonormali : $\epsilon_{r\mu}(\mathbf{p})\epsilon_s^{*\mu}(\mathbf{p}) = -\delta_{rs}$.

Una possibile scelta e'

$$\epsilon_r^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\epsilon}_r(\vec{p}) \end{pmatrix} \ \ r = 1,2; \tag{9}$$

$$\epsilon_3^\mu \equiv \frac{1}{m_W c}\begin{pmatrix} \pm|\vec{p}| \\ \pm\frac{\vec{p}}{|p|}E_p/c \end{pmatrix}; \tag{10}$$

dove $\vec{\epsilon}_1(\vec{p})$ e $\vec{\epsilon}_2(\vec{p})$ sono due tri-versori tra loro perpendicolari e perpendicolari anche a $\vec{p}$.

con la convenzione di scegliere

$$\vec{\epsilon}_1(-\vec{p}) = \vec{\epsilon}_1(\vec{p}) \tag{11}$$

$$\vec{\epsilon}_2(-\vec{p}) = \vec{\epsilon}_2(\vec{p}) \tag{12}$$

e con i segni nella (10) scelti in modo che $\epsilon_3^0(-\vec{p}) = -\epsilon_3^0(\vec{p})$, $\epsilon_3^1(-\vec{p}) = \epsilon_3^1(\vec{p})$,

$\epsilon_3^2(-\vec{p}) = \epsilon_3^2(\vec{p})$, $\epsilon_3^3(-\vec{p}) = \epsilon_3^3(\vec{p})$,

$\hat{a}_r(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di distruzione di una particella W^+;

$\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di creazione di una particella W^+;

$\hat{b}_r(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di distruzione di una particella W^-;

$\hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di creazione di una particella W^-;

Proprieta' di trasformazione dell'operatore di campo vettoriale complesso per una trasformazione di parita'.

Si assume che l'operatore di campo si trasformi come l'operatore del fotone (vedi piu' sotto) :

$$\begin{pmatrix} W^0(x) \\ W^1(x) \\ W^2(x) \\ W^3(x) \end{pmatrix} \xrightarrow[\vec{x}'=-\vec{x}]{} \begin{pmatrix} W^0(-\vec{x},t) \\ -W^1(-\vec{x},t) \\ -W^2(-\vec{x},t) \\ -W^3(-\vec{x},t) \end{pmatrix}$$

con la medesima condizione aggiuntiva di imporre la parita' del vuoto positiva : $\mathcal{P}|0 >= |0 >$. Quindi :

$$\mathcal{P}^\dagger \widehat{W}^\mu(x)\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger \left\{ \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=1}^{3} [\hat{a}_r(\mathbf{p})\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\epsilon_r^{\mu*}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}] \right\} \mathcal{P} =$$

$$\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=1}^{3} [\hat{a}_r(\mathbf{p})\delta(\mu)\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-i(p_0x^0+\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} + \hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\delta(\mu)\epsilon_r^{\mu*}(\mathbf{p})e^{i(p_0x^0+\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}]$$

dove $\delta(0) \equiv 1$ e $\delta(\mu) = -1$ per $\mu = 1, 2, 3$. Dopo un cambio di variabili di integrazione si ottiene

$$\mathcal{P}^\dagger \widehat{W}^\mu(x)\mathcal{P} = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=1}^{3} [\hat{a}_r(-\mathbf{p})\delta(\mu)\epsilon_r^\mu(-\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{b}_r^\dagger(-\mathbf{p})\delta(\mu)\epsilon_r^{\mu *}(-\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}] =$$

$$\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=1}^{3} [-\hat{a}_r(-\mathbf{p})\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} - \hat{b}_r^\dagger(-\mathbf{p})\epsilon_r^{\mu *}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]$$

dove l'ultimo passaggio sfrutta la (9), (10), (11) e (12).
Da queste equazioni si ottiene

$$\mathcal{P}^\dagger \hat{a}_r(\mathbf{p})\mathcal{P} = -\hat{a}_r(-\mathbf{p})$$
$$\mathcal{P}^\dagger \hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{P} = -\hat{b}_r^\dagger(-\mathbf{p})$$

Da queste equazioni discendono anche

$$\mathcal{P}^\dagger \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{P} = -\hat{a}_r^\dagger(-\mathbf{p})$$
$$\mathcal{P}^\dagger \hat{b}_r(\mathbf{p})\mathcal{P} = -\hat{b}(-\mathbf{p})$$

e

$$\begin{pmatrix} W^{0\dagger}(x) \\ W^{1\dagger}(x) \\ W^{2\dagger}(x) \\ W^{3\dagger}(x) \end{pmatrix} \xrightarrow[\vec{x}'=-\vec{x}]{} \begin{pmatrix} W^{0\dagger}(-\vec{x},t) \\ -W^{1\dagger}(-\vec{x},t) \\ -W^{2\dagger}(-\vec{x},t) \\ -W^{3\dagger}(-\vec{x},t) \end{pmatrix}$$

Proprieta' di trasformazione dell'operatore di campo del W per una trasformazione di charge conjugation.

Si assume che l'operatore di charge conjugation trasformi il campo come segue :

$$\mathcal{C}^\dagger W^\mu(x)\mathcal{C} = W^{\dagger\mu}(x)$$

da cui segue che

$$\mathcal{C}^\dagger \hat{a}(\mathbf{p})\mathcal{C} = \hat{b}(\mathbf{p})$$
$$\mathcal{C}^\dagger \hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{C} = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$$

da cui segue anche $\mathcal{C}\mathcal{C} = \mathcal{C}^\dagger\mathcal{C}^\dagger = 1$ e $\mathcal{C}^\dagger W^{\dagger\mu(x)}\mathcal{C} = W^\mu(x)$

Campi vettoriali dei Bosoni di Gauge : campo dello Z

$$\widehat{Z}^{\mu(x)} = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_{r=1}^{3} [\hat{a}_r(\mathbf{p})\epsilon_r^{\mu}(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{a}_r^{\dagger}(\mathbf{p})\epsilon_r^{*\mu}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]$$

dove

$m_Z \equiv$ massa dello Z;

$px \equiv p_\mu x^\mu$;

$E_p \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m_Z^2c^4}$;

$\epsilon_r(\mathbf{p}) \equiv$ vettore che soddisfa a : $\epsilon_r^{\mu} p_\mu = 0$ (deriva dalla condizione di Lorentz); inoltre si scelgono ortonormali : $\epsilon_{r\mu}(\mathbf{p})\epsilon_s^{*\mu}(\mathbf{p}) = \delta_{rs}$;

$a_r(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di distruzione di una particella Z;

$a_r^{\dagger}(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di creazione di una particella Z;

Per particelle massless l'equazione di Proca si riduce a :

$$\Box A^\alpha(x) - \partial^\alpha(\partial_\beta A^\beta(x)) = 0$$

In questo caso la condizione di Lorentz non e' automatica ma piuttosto puó essere imposta per semplificare l'equazione :

$$\partial_\beta A^\beta(x) = 0$$

che si riduce alla familiare equazione delle onde nel vuoto :

$$\Box A^\alpha(x) = 0$$

Campi vettoriali dei Bosoni di Gauge : campo del fotone

$$\widehat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_r = [\hat{a}_r(\mathbf{p})\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})\epsilon_r^{*\mu}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]$$

dove

$px \equiv p_\mu x^\mu$;

$E_p \equiv |\mathbf{p}|c$;

$\epsilon_r(\mathbf{p}) \equiv$ vettori che si scelgono ortonormali : $\epsilon_{r\mu}(\mathbf{p})\epsilon_s^{*\mu}(\mathbf{p}) = -\delta(\mu)\delta_{rs}$ (dove $\delta(0) \equiv 1$, $\delta(1) \equiv -1$ etc. vedi sopra; mentre δ_{rs} e' la delta di Kronecker); nel metodo di Gupta-Bleuler i vettori sono 4 ma c'e' la condizione aggiuntiva sugli stati fisici possibili; una scelta possibile per $\epsilon_r(\mathbf{p})$ e' :

$$\epsilon_0^\mu \equiv \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \epsilon_r^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\epsilon}_r(\vec{p}) \end{pmatrix} \;\; r = 1, 2, 3; \tag{13}$$

dove $\vec{\epsilon}_1(\vec{p})$ e $\vec{\epsilon}_2(\vec{p})$ sono due tri-versori tra loro perpendicolari e perpendicolari anche a $\vec{p}$, mentre

$$\vec{\epsilon}_3(\vec{p}) \equiv \pm \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \tag{14}$$

Inoltre adotto la convenzione

$$\vec{\epsilon}_1(-\vec{p}) = \vec{\epsilon}_1(\vec{p}) \tag{15}$$

$$\vec{\epsilon}_2(-\vec{p}) = \vec{\epsilon}_2(\vec{p}) \tag{16}$$

mentre il segno nella (13) e nella (14) viene scelto in modo che $\epsilon_0^0(-\vec{p}) = -\epsilon_0^0(\vec{p})$,

$\epsilon_3^1(-\vec{p}) = \epsilon_3^1(\vec{p})$, $\epsilon_3^2(-\vec{p}) = \epsilon_3^2(\vec{p})$, $\epsilon_3^3(-\vec{p}) = \epsilon_3^3(\vec{p})$.

$\hat{a}_r(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di distruzione (creazione) di un fotone;

$\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di creazione di un fotone;

Proprieta' di trasformazione dell'operatore di campo del fotone per una trasformazione di parita'.

L'operatore di campo si trasforma come il 4-potenziale dell'elettrodinamica classica. Nel caso classico, definendo con $\phi(x) \equiv$ potenziale elettrico e $\vec{A}(x) \equiv$ potenziale vettore, si ottiene, cambiando il sistema di riferimento con una trasformazione di parita' ($\vec{x}' \equiv -\vec{x}$) che il 4-potenziale si trasforma come un 4-vettore :

$$A(x) \equiv \begin{pmatrix} \phi(x) \\ A_x(x) \\ A_y(x) \\ A_z(x) \end{pmatrix} \xrightarrow[\vec{x}'=-\vec{x}]{} A'(x') = \begin{pmatrix} \phi(x(x')) \\ -A_x(x(x')) \\ -A_y(x(x')) \\ -A_z(x(x')) \end{pmatrix}$$

con $\vec{x}' = -\vec{x}$ e $t' = t$ o, in maniera equivalente :

$$A'(x) = \begin{pmatrix} \phi(-\vec{x},t) \\ -A_x(-\vec{x},t) \\ -A_y(-\vec{x},t) \\ -A_z(-\vec{x},t) \end{pmatrix} \tag{17}$$

La motivazione della (17) e' il fatto che cosi' la fisica non cambia. Infatti :

- se il 4-vettore densita' di corrente nel sistema di riferimento originale e'

$$s(\vec{x},t) \equiv \begin{pmatrix} c\rho(\vec{x},t) \\ \rho(\vec{x},t)v_x(\vec{x},t) \\ \rho(\vec{x},t)v_y(\vec{x},t) \\ \rho(\vec{x},t)v_z(\vec{x},t) \end{pmatrix}$$

nel sistema trasformato dalla parita' esso diventa :

$$s'(\vec{x},t) \equiv \begin{pmatrix} c\rho(-\vec{x},t) \\ -\rho(-\vec{x},t)v_x(-\vec{x},t) \\ -\rho(-\vec{x},t)v_y(-\vec{x},t) \\ -\rho(-\vec{x},t)v_z(-\vec{x},t) \end{pmatrix}$$

e quindi e' facile verificare che anche $A'^{\mu}(x)$ soddisfa all'equazioni di Maxwell

$$\Box A'^{\mu}(x) = s'^{\mu}$$

se $A^{\mu}(x)$ le soddisfaceva;

- il campo elettrico cambia segno mentre il campo magnetico no, come correttamente deve essere :

$$\begin{aligned} \vec{E}'(\vec{x},t) &= -\frac{\partial\phi'(\vec{x},t)}{\partial\vec{x}} - \frac{\partial\vec{A}'(\vec{x},t)}{\partial t} = \frac{\partial\phi(\vec{u},t)}{\partial\vec{u}}|_{\vec{u}=-\vec{x},t} + \frac{\partial\vec{A}(\vec{u},t)}{\partial t}|_{\vec{u}=-\vec{x},t} \rightarrow \\ \vec{E}'(\vec{x},t) &= -\vec{E}(-\vec{x},t) \\ \\ \vec{B}'(\vec{x},t) &= \mathbf{rot}_x\vec{A}'(\vec{x},t) = -\mathbf{rot}_u[-\vec{A}(\vec{u},t)]|_{\vec{u}=-\vec{x},t} \rightarrow \\ \vec{B}'(\vec{x},t) &= \vec{B}(-\vec{x},t) \end{aligned}$$

e grazie a questo, la forza di Lorentz cambia segno (come deve essere) :

$$\begin{aligned} \vec{F}'(\vec{x},t) &= q[\vec{E}'(\vec{x},t) + \frac{1}{c}\vec{v}'(\vec{x},t) \times \vec{B}'(\vec{x},t)] \rightarrow \\ \vec{F}'(\vec{x},t) &= q[-\vec{E}(-\vec{x},t) - \frac{1}{c}\vec{v}(-\vec{x},t) \times \vec{B}(-\vec{x},t)] \rightarrow \\ \vec{F}'(\vec{x},t) &= -\vec{F}(-\vec{x},t) \end{aligned}$$

Passando a considerare l'operatore di campo, vogliamo, come detto sopra, che si trasformi come il 4-potenziale :

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}(x) \\ \hat{A}_x(x) \\ \hat{A}_y(x) \\ \hat{A}_z(x) \end{pmatrix} \xrightarrow[\vec{x}'=-\vec{x}]{} \begin{pmatrix} \hat{\phi}(-\vec{x},t) \\ -\hat{A}_x(-\vec{x},t) \\ -\hat{A}_y(-\vec{x},t) \\ -\hat{A}_z(-\vec{x},t) \end{pmatrix}$$

e questo si traduce nel seguente operatore di parita' per il campo fotonico :

$$\mathcal{P}^{\dagger}\hat{A}^{\mu}(\vec{x},t)\mathcal{P} = \delta(\mu)A^{\mu}(-\vec{x},t)$$

dove $\delta(\mu) = 1$ per $\mu = 0$ e $\delta(\mu) = -1$ per $\mu = 1, 2, 3$. Esplicitando la trasformazione si ottiene :

$$\mathcal{P}^\dagger \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_r = [\hat{a}_r(\mathbf{p})\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})\epsilon_r^{*\mu}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]\mathcal{P} =$$

$$\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_r = [\hat{a}_r(\mathbf{p})\delta(\mu)\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-i(p_0x^0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})/\hbar} + \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})\delta(\mu)\epsilon_r^{*\mu}(\mathbf{p})e^{i(p_0x^0+\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})/\hbar}] =$$

$$\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_r = [\hat{a}_r(-\mathbf{p})\delta(\mu)\epsilon_r^\mu(-\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{a}_r^\dagger(-\mathbf{p})\delta(\mu)\epsilon_r^{*\mu}(-\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}] =$$

e tenendo conto delle (13), (14), (15)e (16) si ottiene :

$$\mathcal{P}^\dagger \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_r = [\hat{a}_r(\mathbf{p})\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})\epsilon_r^{*\mu}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]\mathcal{P} =$$

$$\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_r = [-\hat{a}_r(-\mathbf{p})\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} - \hat{a}_r^\dagger(-\mathbf{p})\epsilon_r^{*\mu}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]$$

da cui discende

$$\mathcal{P}^\dagger \hat{a}_r(\mathbf{p})\mathcal{P} = -\hat{a}_r(-\mathbf{p})$$
$$\mathcal{P}^\dagger \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{P} = -\hat{a}_r^\dagger(-\mathbf{p})$$

Proprieta' di trasformazione dell'operatore di campo del fotone per una trasformazione di charge conjugation.

Anche in questo caso si impone all'operatore di trasformarsi come nel caso classico dove si immagina di cambiare tutte le cariche positive in negative e viceversa lasciando inalterate tutte le posizioni e velocita'. E' facile comprendere che in tal caso

$$A(x) \equiv \begin{pmatrix} \phi(x) \\ A_x(x) \\ A_y(x) \\ A_z(x) \end{pmatrix} \xrightarrow[\textit{charge conjugation}]{} A'(x) = \begin{pmatrix} -\phi(x) \\ -A_x(x) \\ -A_y(x) \\ -A_z(x) \end{pmatrix}$$

Esplicitando la trasformazione si ottiene :

$$\mathcal{C}^\dagger \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_r = [\hat{a}_r(\mathbf{p})\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})\epsilon_r^{*\mu}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]\mathcal{C} =$$

$$\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_r = [-\hat{a}_r(\mathbf{p})\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})\epsilon_r^{*\mu}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}] =$$

da cui si ricava

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}^\dagger \hat{a}_r(\mathbf{p})\mathcal{C} &= -\hat{a}_r(\mathbf{p}) \\
\mathcal{C}^\dagger \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})\mathcal{C} &= -\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p})
\end{aligned}
$$

ovvero c'e' un semplice cambio di segno agli operatori di creazione e distruzione.

Campo vettoriale dei Gluoni (massless, reale)

$$\widehat{\mathcal{A}}_C^{\mu}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} \sum_r [\hat{a}_{C,r}(\mathbf{p})\epsilon_r^{\mu}(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{a}_{C,r}^{\dagger}(\mathbf{p})\epsilon_r^{*\mu}(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]$$

dove

$px \equiv p_\mu x^\mu$;

$E_p \equiv |\mathbf{p}|c$;

$\epsilon_r(\mathbf{p}) \equiv$ vettori ortonormali : $\epsilon_{r\mu}(\mathbf{p})\epsilon_s^{*\mu}(\mathbf{p}) = \delta_{rs}$;

$\hat{a}_{C,r}(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di distruzione di un gluone di tipo C;

$\hat{a}_{C,r}^{\dagger}(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di creazione di un gluone di tipo C;

Le particelle elementari ed i loro campi

Equazione di Klein-Gordon

$$\Box\phi(x) - \frac{mc}{\hbar}\phi(x) = 0$$

dove ϕ puó essere reale o complesso.

Campo reale scalare di Higgs

$$\widehat{\sigma}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E_p}} [\hat{a}(\mathbf{p})e^{-ipx/\hbar} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx/\hbar}]$$

dove

$px \equiv p_\mu x^\mu$;

$E_p \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m_H^2c^4}$;

$\hat{a}_r(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di distruzione di una particella di Higgs;

$\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p}) \equiv$ operatore di creazione di una particella di Higgs;

la Lagrangiana delle interazione elettrodeboli nel modello standard

Qui di seguito vengono date le formule dei campi 'classici'. Dalle Lagrangiane si formano poi le Hamiltoniane nelle quali alla fine si rimpiazzano i campi classici con gli operatori di campo quantistico.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

dove

- $\mathcal{L}_0 \equiv$ parte della Lagrangiana delle particelle non interagenti
- $\mathcal{L}_I \equiv$ parte della Lagrangiana che descrive l'interazione elettrodebole.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 \;=\; & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
& -\frac{1}{2}F^{\dagger}_{W\mu\nu}F^{\mu\nu}_{W} + m_W^2 W^{\dagger}_{\mu}W^{\mu} \\
& -\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_{\mu}Z^{\mu} \\
& +\frac{1}{2}(\partial^{\mu}\sigma)(\partial_{\mu}\sigma) - \frac{1}{2}m_H^2\sigma^2 \\
& +\sum_q \overline{\psi}_q(i\partial\!\!\!/ - m_q)\psi_q \\
& +\sum_l \overline{\psi}_l(i\partial\!\!\!/ - m_l)\psi_l \\
& +\sum_{\nu_l} \overline{\psi}_{\nu_l}(i\partial\!\!\!/ - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l}
\end{aligned}$$

dove

- $F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\nu}A^{\mu} - \partial^{\mu}A^{\nu}$;
- $F^{\mu\nu}_W \equiv \partial^{\nu}W^{\mu} - \partial^{\mu}W^{\nu}$;
- $Z^{\mu\nu} \equiv \partial^{\nu}Z^{\mu} - \partial^{\mu}Z^{\nu}$;
- $q \equiv$ quark di un dato flavour e colore
- $l \equiv$ indice che caratterizza un flavour di leptone : e, μ, τ

la Lagrangiana delle interazione elettrodeboli nel modello standard

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I^{BB} + \mathcal{L}_I^{HH} + \mathcal{L}_I^{HB} + \mathcal{L}_I^{LB} + \mathcal{L}_I^{HL}$$

Si definiscono :

- $\theta_w \equiv$ angolo di Weimberg (sperimentalmente : $\sin^2(\theta_w) = 0.227 \pm 0.014 \rightarrow \theta_w = 28.45°$)
- $e \equiv$ carica elettrone;
- g e' una costante tale che $g \sin\theta_w = e$; inoltre deve anche essere $\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}}$ con $G = 1.166 \times 10^{-5}$ GeV^{-2} costante di Fermi ;
- $v \equiv \sqrt{G\sqrt{2}}$;
- λ parametro tale che $\sqrt{2\lambda v^2} = m_H$

Inoltre nel seguito prima vengono mostrate $\mathcal{L}_I^{LB}$ e $\mathcal{L}_I^{HL}$ per un generico leptone l ed il neutrino della stessa famiglia ν_l. In seguito verra esposta la 'ricetta' per scrivere la Lagrangiana di interazione elettrodebole dei quarks.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I^{BB} \; = \; & ig\cos\theta_w[(W_\alpha^\dagger W_\beta - W_\beta^\dagger W_\alpha)\partial^\alpha Z^\beta + (\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha)W^{\dagger\beta}Z^\alpha - (\partial_\alpha W_\beta^\dagger - \partial_\beta W_\alpha^\dagger)W^\beta Z^\alpha] \\
& \quad + ie[(W_\alpha^\dagger W_\beta - W_\beta^\dagger W_\alpha)\partial^\alpha A^\beta + (\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha)W^{\dagger\beta}A^\alpha - (\partial_\alpha W_\beta^\dagger - \partial_\beta W_\alpha^\dagger)W^\beta A^\alpha] \\
& + g^2\cos^2\theta_w[W_\alpha W_\beta^\dagger Z^\alpha Z^\beta - W_\beta W^{\dagger\beta} Z_\alpha Z^\alpha] \\
& \quad + e^2[W_\alpha W_\beta^\dagger A^\alpha A^\beta - W_\beta W^{\dagger\beta} A_\alpha A^\alpha] \\
& + eg\cos\theta_w[W_\alpha W_\beta^\dagger (Z^\alpha A^\beta + A^\alpha Z^\beta) - 2W_\beta W^{\dagger\beta} A_\alpha Z^\alpha] \\
& + \frac{1}{2} g^2 W_\alpha^\dagger W_\beta [W^{\dagger\alpha} W^\beta - W^\alpha W^{\dagger\beta}]
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}_I^{HH} = -\frac{1}{4}\lambda\sigma^4 - \lambda v\sigma^3$

$\mathcal{L}_I^{HB} = \frac{1}{2}vg^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha\sigma + \frac{1}{4}g^2 W_\alpha^\dagger W^\alpha\sigma^2 + \frac{vg^2}{4\cos^2\theta_w} Z_\alpha Z^\alpha\sigma + \frac{g^2}{8\cos^2\theta_w} Z_\alpha Z^\alpha\sigma^2$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_I^{LB} &= e\sum_l \left(\overline{\psi}_l\gamma^\alpha\psi_l A_\alpha\right) \\
&-\frac{g}{2\sqrt{2}}\sum_l \left[\overline{\psi}_{\nu_l}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_l W_\alpha + \overline{\psi}_l\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}W_\alpha^\dagger\right] \\
&-\frac{g}{4\cos\theta_w}\sum_l \left[\overline{\psi}_{\nu_l}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}Z_\alpha\right] \\
&+\frac{g}{4\cos\theta_w}\sum_l \left[\overline{\psi}_l\gamma^\alpha(1-4\sin^2\theta_w-\gamma_5)\psi_l Z_\alpha\right]
\end{aligned}
$$

$\mathcal{L}_I^{HL} = -\frac{1}{v}\sum_l \left(m_l\overline{\psi}_l\psi_l\sigma + m_{\nu_l}\overline{\psi}_{\nu_l}\psi_{\nu_l}\sigma\right)$

Infine per ottenere $\mathcal{L}_I^{QB}$ e $\mathcal{L}_I^{HQ}$ dove Q e' un quark di dato flavour e colore, si scrivono le $\mathcal{L}_I^{LB}$ e $\mathcal{L}_I^{HL}$ scitte sopra SOSTITUENDO ai campi ψ_{ν_l}, $\overline{\psi}_{\nu_l}$ i corrispondenti campi ψ_{q_i}, $\overline{\psi}_{q_i}$ dove con q_i si intende uno dei quark up, charm,top :

$$
\begin{aligned}
q_1 &\equiv \text{up} \\
q_2 &\equiv \text{charm} \\
q_3 &\equiv \text{top}
\end{aligned}
$$

di un dato colore e sostituendo ai campi ψ_l, $\overline{\psi}_l$ i campi fermionici $\psi_{q_i'}$, $\overline{\psi}_{q_i'}$ dove

$$
\begin{aligned}
\psi_{q_1'} &\equiv V_{11}\psi_{down} + V_{12}\psi_{strange} + V_{13}\psi_{bottom} \\
\psi_{q_2'} &\equiv V_{21}\psi_{down} + V_{22}\psi_{strange} + V_{23}\psi_{bottom} \\
\psi_{q_3'} &\equiv V_{31}\psi_{down} + V_{32}\psi_{strange} + V_{33}\psi_{bottom}
\end{aligned}
$$

dello stesso colore (analoghe formule si usano per $\overline{\psi}_{q_i'}$). La matrice V_{ij} e' detta matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.

Ricordo infine che e' possibile introdurre nel modello standard il mixing tra neutrini di flavour diverso :

$$\psi_j = \sum_l U_{jl}\psi_{\nu_l}$$

dove ψ_j e' il campo del neutrino "autostato" di massa.
Cio' che cambia in pratica nella Lagrangiana in questo caso e' in $\mathcal{L}_0$ ed in $\mathcal{L}_I^{HL}$ la parte relativa ai neutrini (rispettivamente : $\sum_{\nu_l} \overline{\psi}_{\nu_l}(i\partial\!\!\!/ - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l}$ e $-\frac{1}{v} m_{\nu_l} \overline{\psi}_{\nu_l}\psi_{\nu_l}$). Al posto dei campi ψ_{ν_l} e le masse m_{ν_l} si devono mettere i campi dei neutrini autostati di massa (cioe' ψ_j) e le loro masse. Le altre parti della Lagrangiana rimangono invariate, in particolare $\mathcal{L}_I^{LB}$.

Una condizione sugli elementi della matrice CKM affinche' CP sia conservata nelle interazioni deboli

Applichiamo la trasformazione $\mathcal{CP}$ sulla parte di Lagrangiana di interazione contenenti gli elementi della matrice CKM e dimostriamo che essa e' invariante se tali elementi sono reali.
Per farlo e' sufficiente considerare la parte che fa interagire il quark u con il quark d, la dimostrazione essendo identica negli altri casi.
Si considerino dunque i termini :

$$\int -\frac{g}{2\sqrt{2}} V_{11} \overline{\psi}_u \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \psi_d W_\alpha d_3x + \int -\frac{g}{2\sqrt{2}} V_{11}^* \overline{\psi}_d \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \psi_u W_\alpha^\dagger d_3x \tag{18}$$

dove e' stata indicata anche l'integrazione in d_3x. Applichiamo $\mathcal{CP}$ alla prima parte di (18) definendo, ancora una volta, $\delta(0) \equiv 1$ e $\delta(\mu) \equiv -1$ per $\mu = 1,2,3)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\dagger \mathcal{C}^\dagger \left\{ -\int \frac{g}{2\sqrt{2}} V_{11} \overline{\psi}_u(x) \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \psi_d(x) W_\alpha(x)\ d_3x \right\} \mathcal{CP} = \\
-\frac{g}{2\sqrt{2}} V_{11} \int \mathcal{P}^\dagger \mathcal{C}^\dagger \overline{\psi}_u(x) \mathcal{CP} \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \mathcal{P}^\dagger \mathcal{C}^\dagger \psi_d(x) \mathcal{CP}\ \mathcal{P}^\dagger \mathcal{C}^\dagger W_\alpha(x) \mathcal{CP}\ d_3x = \\
-\frac{g}{2\sqrt{2}} V_{11} \int \mathcal{P}^\dagger i \widehat{\psi}_u(x)^T \gamma^2 \gamma^0 \mathcal{P} \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \mathcal{P}^\dagger i \gamma^2 (\widehat{\psi}_d(x)^\dagger)^T \mathcal{P}\ \mathcal{P}^\dagger W_\alpha^\dagger(x) \mathcal{P}\ d_3x = \\
\frac{g}{2\sqrt{2}} V_{11} \int \mathcal{P}^\dagger \widehat{\psi}_u(x)^T \mathcal{P}\ \gamma^2 \gamma^0 \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \gamma^2\ \mathcal{P}^\dagger (\widehat{\psi}_d(x)^\dagger)^T \mathcal{P}\ \mathcal{P}^\dagger W_\alpha^\dagger(x) \mathcal{P}\ d_3x = \\
\frac{g}{2\sqrt{2}} V_{11} \int [\gamma^0 \psi_u(-\vec{x},t)]^T\ \gamma^2 \gamma^0 \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \gamma^2\ [\psi_d(-\vec{x},t)^\dagger \gamma^0]^T \delta(\alpha) W_\alpha^\dagger(-\vec{x},t)\ d_3x = \\
\frac{g}{2\sqrt{2}} V_{11} \int [\psi_u(-\vec{x},t)]^T \gamma^0\ \gamma^2 \gamma^0 \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \gamma^2\ [\psi_d(-\vec{x},t)^\dagger \gamma^0]^T \delta(\alpha) W_\alpha^\dagger(-\vec{x},t)\ d_3x = \\
-\frac{g}{2\sqrt{2}} V_{11} \int [\psi_u(-\vec{x},t)]^T \gamma^2 \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \gamma^2 [\psi_d(-\vec{x},t)^\dagger \gamma^0]^T \delta(\alpha) W_\alpha^\dagger(-\vec{x},t)\ d_3x.
\end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che il prodotto degli operatori fermionici e le matrici gamma producono una semplice somma (cioe', non ci sono piu' ne' matrici ne' vettori colonna o vettori riga) posso sotituire tale prodotto con il prodotto dei trasposti :

$$-\frac{g}{2\sqrt{2}} V_{11} \int \psi_d(-\vec{x},t)^\dagger \gamma^0 \gamma^{2T} (1-\gamma_5)^T \gamma^{\alpha T} \gamma^{2T} \psi_u(-\vec{x},t) \delta(\alpha) W_\alpha^\dagger(-\vec{x},t)\ d_3x.$$

Considerando che

$$\begin{aligned}
\gamma_5^T &= \gamma_5 \\
\gamma^{0,2T} &= \gamma^{0,2} \\
\gamma^{1,3T} &= -\gamma^{1,3} \\
\gamma^{\alpha T} \gamma^{2T} &= -\delta(\alpha) \gamma^2 \gamma^\alpha
\end{aligned}$$

si ottiene

$$\frac{g}{2\sqrt{2}}V_{11}\int\overline{\psi}_d(-\vec{x},t)\gamma^2(1-\gamma_5)\gamma^2\gamma^\alpha\delta(\alpha)\psi_u(-\vec{x},t)\delta(\alpha)W^\dagger_\alpha(-\vec{x},t)\ d_3x =$$
$$\frac{g}{2\sqrt{2}}V_{11}\int\overline{\psi}_d(-\vec{x},t)\gamma^2\gamma^2(1+\gamma_5)\gamma^\alpha\psi_u(-\vec{x},t)W^\dagger_\alpha(-\vec{x},t)\ d_3x =$$
$$-\frac{g}{2\sqrt{2}}V_{11}\int\overline{\psi}_d(-\vec{x},t)(1+\gamma_5)\gamma^\alpha\psi_u(-\vec{x},t)W^\dagger_\alpha(-\vec{x},t)\ d_3x =$$
$$-\frac{g}{2\sqrt{2}}V_{11}\int\overline{\psi}_d(-\vec{x},t)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_u(-\vec{x},t)W^\dagger_\alpha(-\vec{x},t)\ d_3x$$

Cambiando le variabili di integrazione si ottiene infine

$$-\frac{g}{2\sqrt{2}}V_{11}\int\overline{\psi}_d(\vec{x},t)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_u(\vec{x},t)W^\dagger_\alpha(\vec{x},t)\ d_3x$$

L'ultima equazione corrisponde al secondo termine nella (18) a patto che $V_{11}=V^*_{11}$.
In tal caso quindi

$$\mathcal{P}^\dagger\mathcal{C}^\dagger\left\{\int-\frac{g}{2\sqrt{2}}V_{11}\overline{\psi}_u\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_d W_\alpha d_3x\right\}\mathcal{C}\mathcal{P}=\int-\frac{g}{2\sqrt{2}}V^*_{11}\overline{\psi}_d\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_u W^\dagger_\alpha$$

Da quest'ultima relazione si ottiene anche :

$$\mathcal{P}^\dagger\mathcal{C}^\dagger\int\left\{-\frac{g}{2\sqrt{2}}V^*_{11}\overline{\psi}_d\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_u W^\dagger_\alpha\right\}\mathcal{C}\mathcal{P}=$$
$$\mathcal{P}^\dagger\mathcal{C}^\dagger\mathcal{P}^\dagger\mathcal{C}^\dagger\left\{\int-\frac{g}{2\sqrt{2}}V_{11}\overline{\psi}_u\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_d W_\alpha d_3x\right\}\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{P}$$

da cui segue, tenuto conto che $\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{P}=\mathcal{C}\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{P}=1$ (ed analogamente $\mathcal{P}^\dagger\mathcal{C}^\dagger\mathcal{P}^\dagger\mathcal{C}^\dagger=1$) :

$$\mathcal{P}^\dagger\mathcal{C}^\dagger\int\left\{-\frac{g}{2\sqrt{2}}V^*_{11}\overline{\psi}_d\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_u W^\dagger_\alpha\right\}\mathcal{C}\mathcal{P}=$$
$$\int-\frac{g}{2\sqrt{2}}V_{11}\overline{\psi}_u\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_d W_\alpha d_3x.$$

Questo prova che se $V_{11}=V^*_{11}$ il termine (18) e' invariante per trasformazione di $\mathcal{CP}$

$$\mathcal{P}^\dagger\mathcal{C}^\dagger\left\{\int-\frac{g}{2\sqrt{2}}V_{11}\overline{\psi}_u\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_d W_\alpha d_3x+\int-\frac{g}{2\sqrt{2}}V^*_{11}\overline{\psi}_d\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_u W^\dagger_\alpha d_3x\right\}\mathcal{C}\mathcal{P}=$$
$$\int-\frac{g}{2\sqrt{2}}V_{11}\overline{\psi}_u\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_d W_\alpha d_3x+\int-\frac{g}{2\sqrt{2}}V^*_{11}\overline{\psi}_d\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_u W^\dagger_\alpha d_3x$$

Definizione di $\alpha_{\mathbf{em}}$

1 nel sistema MKS

La legge di Coulomb si esprime come

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

dove le unita' di misura sono

$$\begin{aligned} [F] &= \mathrm{N} \\ [q] &= \mathrm{C} \\ [r] &= \mathrm{m} \end{aligned}$$

e α_{em} si definisce come segue :

$$\alpha_{em} \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\hbar c}$$

con

$$\begin{aligned} e = 1.6 \times 10^{-19} \quad & \mathrm{C} \\ \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \quad & \mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1} \\ \hbar = 1.054 \times 10^{-34} \quad & \mathrm{J} \cdot \mathrm{s} \\ c = 3 \times 10^8 \quad & \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha_{em} \equiv \frac{1.6^2 \times 10^{-38}}{4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1.054 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = \frac{1}{137}$$

2 nel sistema ues

La legge di Coulomb si esprime come

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

dove le unita' di misura sono

$$\begin{aligned} [F] &= \mathrm{dine} \\ [q] &= \mathrm{ues} \\ [r] &= \mathrm{cm} \end{aligned}$$

e di conseguenza α_{em} si definisce come segue :

$$\alpha_{em} \equiv \frac{e^2}{\hbar c}$$

con

$$\begin{aligned} e &= 4.8 \times 10^{-10} \quad \text{ues} \\ \hbar &= 1.054 \times 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{s} \\ c &= 3 \times 10^{10} \quad \text{cm/s} \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha_{em} \equiv \frac{4.8^2 \times 10^{-20}}{1.054 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}} = \frac{1}{137}$$

3 nel sistema Lorentz-Heaviside

La legge di Coulomb si esprime come

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}$$

dove le unita' di misura sono

$$\begin{aligned} [F] &= \text{dine} \\ [q] &= \text{ues} - \text{LH} \\ [r] &= \text{cm} \end{aligned}$$

la carica e' legata alla carica in unita' ues da

$$q_{\text{LH}} = \sqrt{4\pi} q_{\text{ues}}$$

e di conseguenza α_{em} si definisce come segue :

$$\alpha_{em} \equiv \frac{e^2}{4\pi\hbar c}$$

con

$$\begin{aligned} e &= 1.7 \times 10^{-9} \quad \text{ues} - \text{LH} \\ \hbar &= 1.054 \times 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{s} \\ c &= 3 \times 10^{10} \quad \text{cm/s} \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha_{em} \equiv \frac{1.7^2 \times 10^{-18}}{1.054 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{10}} = \frac{1}{137}$$

Definizione di massa di Plank ($\equiv$M$_P$)

Si definisce innanzitutto la lunghezza di Plank :

$$\lambda_P \equiv \frac{\hbar}{M_P c}$$

La massa di Plank e' quella massa che, posta ad una distanza uguale alla lunghezza di Plank ad una massa uguale ha un'energia potenziale uguale alla propria energia di riposo.
Pertanto

$$\frac{G_N M_P^2}{\lambda_P} = M_P c^2 \rightarrow \frac{G_N M_P^2 M_P c}{\hbar} = M_P c^2 \rightarrow M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}}$$

dove $G_N \equiv$ costante di gravitazione universale.

Nel sistema MKS

$$\begin{aligned} G_N &= 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3 \quad \mathrm{Kg}^{-1} \quad \mathrm{s}^{-2} \\ \hbar &= 1.054 \times 10^{-34} \quad \mathrm{J} \cdot \mathrm{s} \\ c &= 3 \times 10^8 \quad \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

da cui ottengo

$$M_P = \sqrt{\frac{1.054 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{6.67 \times 10^{-11}}} = 2.177 \times 10^{-8} \quad \mathrm{Kg}$$

e quindi

$$M_P c^2 = 2.177 \times 10^{-8} \times 9 \times 10^{16} = 1.96 \times 10^9 \quad \mathrm{J} = 1.22 \times 10^{19} \quad \mathrm{GeV}$$

mentre la lunghezza di Plank e' invece

$$\lambda_P \equiv \frac{\hbar}{M_P c} = \frac{1.054 \times 10^{-34}}{2.177 \times 10^{-8} \times 3 \times 10^8} = 1.61 \times 10^{-35} \quad \mathrm{m}$$

The independet real parameters of a unitary matrix with complex numbers $n \times n$ are n^2. In fact a generic $n \times n$ complex matix is parametrized by $2 \times n^2$ parameters. If it is a unitary matrix it must satisfy the relation

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^{+} = \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{U}(\mathbf{U}^{T})^{*} = 1$$

and consequently, defining

$$\mathbf{U}_{i,j} = [\mathbf{U}]_{i,j}$$

one obtains the following relations :

$$\mathbf{U}_{i,j}\mathbf{U}^{*}_{k,j} = \delta_{i,k}$$

(summation over the same indices is implied).
For $i = k$ one obtains n relations :

$$\sum_{j=1}^{n} |\mathbf{U}_{i,j}|^2 = 1, \qquad i = 1, \ldots, n$$

For $i < k$ one obtains $\frac{n(n-1)}{2}$ relations of the type

$$\mathbf{U}_{i,j}\mathbf{U}^{*}_{k,j} = 0 \tag{19}$$

which implies

$$2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n$$

relations among the real parameters.
The same relations when $i > k$ can be already derived by those when $i < k$.
In fact, for any $i < k$:

$$\mathbf{U}_{i,j}\mathbf{U}^{*}_{k,j} = 0 \rightarrow \overline{\mathbf{U}_{i,j}\mathbf{U}^{*}_{k,j}} = 0 \rightarrow \mathbf{U}_{k,j}\mathbf{U}^{*}_{i,j} = 0 \rightarrow \mathbf{U}_{i,j}\mathbf{U}^{*}_{k,j} = 0$$

the last relation is the same as (19) but with $i > k$.
Therefore the total number of equations among the parameters is $n^2 - n + n = n^2$. Consequently a complex unitary matrix is described by $2n^2 - n^2 = n^2$ independent real parameters.
One can notice that also the hermitian $n \times n$ complex matrices have n^2 independent parameters and that goes in accord to the fact that a unitary complex matrix can be cast in exponential form :

$$\mathbf{U} = e^{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_j} \tag{20}$$

where $\mathbf{H}_j$ are n independent hermitian matrices.

Note sull'operatore di parita' per l'equazione di Dirac

Innanzitutto dimostro una proprieta' della trasformata di Fourier di una funzione complessa a variabili reali $f(\vec{x})$ integrabile su $\mathcal{R}^3$.
Sia $\tilde{f}(\vec{k})$ la trasformata di Fourier di f:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d_3x \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} f(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinche' f sia una funzione pari (ovvero $f(\vec{x}) = f(-\vec{x})$) e' che $c(\vec{k}) = c(-\vec{k})$. Infatti

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \int d_3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \tilde{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \rightarrow \\ f(-\vec{x}) &= \int d_3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \tilde{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot(-\vec{x})} = \int d_3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \tilde{f}(-\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \end{aligned}$$

Se $f(\vec{x}) = f(-\vec{x})$ segue che

$$\int d_3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \tilde{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \int d_3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \tilde{f}(-\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \rightarrow \int d_3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} [\tilde{f}(\vec{k}) - \tilde{f}(-\vec{k})] e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = 0$$

da cui segue $\tilde{f}(\vec{k}) = \tilde{f}(-\vec{k})$ per una nota proprieta' dell'integrale di Fourier.
D'altra parte, se suppongo invece che $\tilde{f}(\vec{k}) = \tilde{f}(-\vec{k})$ posso scrivere :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \int d_3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \tilde{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \int d_3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \tilde{f}(-\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \\ &= \int d_3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \tilde{f}(\vec{k}) e^{-i(-\vec{k})\cdot\vec{x}} = f(-\vec{x}) \end{aligned}$$

In modo simile si puo' dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinche' f sia una funzione dispari (ovvero $f(\vec{x}) = -f(-\vec{x})$) e' che $\tilde{f}(\vec{k}) = -\tilde{f}(-\vec{k})$.
Considero adesso una soluzione dell'equazione di Dirac di particella libera (prima quantizzazione) e analizzo cosa succede quando applico l'operatore di parita' ad essa :

$$\psi_P(x) \equiv \hat{P}\psi \equiv \gamma^0 \psi(-\vec{x}, t)$$

Per semplificare il discorso, esamino il caso in cui la soluzione sia un integrale su un tipo solo di spin, che indico con r. Inoltre per primo esamino soluzioni per una "particella" che usano quindi solo lo spinore $u_r(\mathbf{p})$:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tilde{f}(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-i(p_0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} =$$

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tilde{f}(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\chi \end{pmatrix} e^{-i(p_0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}$$

Applicando l'operatore di parita' e tenendo conto che

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ottengo :

$$\psi_P(x) = \gamma^0 \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tilde{f}(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\chi \end{pmatrix} e^{-i[p_0x^0 - \vec{p}\cdot(-\vec{x})]/\hbar} =$$

$$= \gamma^0 \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tilde{f}(-\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{-\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\chi \end{pmatrix} e^{-i(p_0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} =$$

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tilde{f}(-\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\chi \end{pmatrix} e^{-i(p_0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}.$$

E' evidente dall'ultima equazione che quando $\tilde{f}$ corrisponde ad una funzione pari $\psi_P = \psi$ mentre quando $\tilde{f}$ corrisponde ad una funzione dispari $\psi_P = -\psi$.
Discorso opposto si deve fare nel caso di una funzione d'onda di "antiparticella". In tal caso bisogna usare gli spinori $v_r(\mathbf{p})$:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tilde{f}(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{i(p_0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} =$$

$$= \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tilde{f}(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\chi \\ \chi \end{pmatrix} e^{i(p_0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}.$$

Applicando l'operatore di parita' ottengo :

$$\psi_P(x) = \hat{P}\psi = \gamma^0 \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tilde{f}(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\chi \\ \chi \end{pmatrix} e^{i[p_0x^0 - (-\vec{p}\cdot\vec{x})]/\hbar} =$$

$$= \gamma^0 \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tilde{f}(-\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \frac{-\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\chi \\ \chi \end{pmatrix} e^{i(p_0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} =$$

$$= -\int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tilde{f}(-\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+mc^2}\chi \\ \chi \end{pmatrix} e^{i(p_0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}$$

Il segno '-' fuori dall'integrale e' chiamato parita' intrinseca negativa dell'antiparticella. Dall'ultima equazione concludo che quando $\tilde{f}$ corrisponde ad una funzione pari $\psi_P = -\psi$ mentre quando $\tilde{f}$ corrisponde ad una funzione dispari $\psi_P = \psi$.