Fluttuazioni di energia

$$(\Delta E)^2 \equiv \langle (E - \langle E\rangle)^2 \rangle = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2$$

Si ha: $\quad -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\langle E\rangle = (\Delta E)^2$

- Planck: $\langle E\rangle = n(\nu)\, h\nu$

$$(\Delta E)^2 = (h\nu)^2\, n(\nu)[n(\nu)+1]$$

- Rayleigh-Jeans: $\langle E\rangle = kT$

$$\begin{aligned}(\Delta E)^2 &= (kT)^2\\ &= \langle E\rangle^2\\ &= (h\nu)^2\, n^2(\nu) \qquad (h\nu \ll kT)\end{aligned}$$

- Wien: $\langle E\rangle = h\nu\, e^{-h\nu/kT}$

$$\begin{aligned}(\Delta E)^2 &= (h\nu)^2\, e^{-h\nu/kT}\\ &= h\nu\,\langle E\rangle\\ &= (h\nu)^2\, n(\nu) \qquad (h\nu \gg kT)\end{aligned}$$

Gas di particelle indipendenti

$$N \text{ particelle nel volume } V, \quad N \gg 1, \quad \frac{N}{V} = \rho$$

$$\begin{aligned} v \ll V: \qquad w &= \frac{v}{V} = \frac{\rho v}{N} \\ &= \text{probabilità che } \textcolor{red}{\text{una}} \text{ particella sia in } v \\ 1 - w &= \text{probabilità che } \textcolor{red}{\text{quella}} \text{ particella non sia in } v \end{aligned}$$

Probabilità:

$$\begin{array}{ll} \text{nessuna particella in } v: & (1-w)^N \simeq 1 - Nw = 1 - \rho v \simeq e^{-\rho v} \\ 1 : & \binom{N}{1} w(1-w)^{N-1} \simeq \frac{\rho v}{1!} e^{-\rho v} \\ 2 : & \binom{N}{2} w^2(1-w)^{N-2} \simeq \frac{(\rho v)^2}{2!} e^{-\rho v} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n : & \binom{N}{n} w^n(1-w)^{N-n} \simeq \frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} \end{array}$$

Distribuzione di Poisson: $\quad p(n) = \dfrac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v}$

Fluttuazioni del numero di particelle

Valori medi:

$$
\begin{aligned}
\langle n \rangle = \sum_n n\, p(n) &= \sum_n n \frac{(\rho v)^n}{n!} e^{-\rho v} \\
&= \rho v \sum_{n'} \frac{(\rho v)^{n'}}{n'!} e^{-\rho v} \\
&= \rho v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle n(n-1) \rangle &= \sum_n n(n-1)\, p(n) = (\rho v)^2 \\
&= \langle n \rangle^2
\end{aligned}
$$

Fluttuazioni:

$$
\begin{aligned}
(\Delta n)^2 &\equiv \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \\
&= \langle n(n-1) + n \rangle - \langle n \rangle^2 \\
&= \langle n \rangle
\end{aligned}
$$

Fluttuazioni di pressione della radiazione

$t \quad \longrightarrow \quad t+\tau: \qquad mv \quad \longrightarrow \quad mv - Pv\tau + \Delta$

in equilibrio: $\quad \langle (mv)^2 \rangle = \langle (mv - Pv\tau + \Delta)^2 \rangle$

$$\longrightarrow \quad \langle \Delta^2 \rangle = 2P\,\tau\, m\, \langle v^2 \rangle$$

teorema di equipartizione dell'energia: $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$

Einstein trova la costante di attrito P dovuta alla pressione di radiazione per grado di libertà e per unità di superficie:

$$P = \frac{1}{2c} \frac{(h\nu)^2}{kT}\, n(\nu)\,[n(\nu)+1]$$

Fluttuazioni della quantità di moto trasferita nel tempo τ allo specchio dalle fluttuazioni irregolari della pressione:

$$\frac{\langle \Delta^2 \rangle}{\tau} = \frac{1}{c} (h\nu)^2\, n(\nu)\,[n(\nu)+1]$$