Spazio di Hilbert astratto

- spazio vettoriale (lineare) complesso: $\mathcal{H}$

$$\begin{array}{rcl} \text{sistema fisico} & \Leftrightarrow & \mathcal{H} \\ \text{un vettore} \in \mathcal{H} & = & \text{ket } |\Psi\rangle \in \mathcal{H} \\ \text{stato del sistema} & \Leftrightarrow & |\Psi\rangle \in \mathcal{H} \end{array}$$

- base $\{\, |e_i\rangle \,\}$ in $\mathcal{H}$: $\quad |a\rangle = \sum_i a_i \, |e_i\rangle$

- funzionale lineare su $\mathcal{H}$

  $\forall |a\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow \phi(a)$

  $|r\rangle = c_1 |a\rangle + c_2 |b\rangle \Rightarrow c_1 \phi(a) + c_2 \phi(b)$

- ogni $\phi \Leftrightarrow$ unico $|b\rangle$ tale che $\forall |a\rangle \in \mathcal{H}$ $\boxed{\phi(a) = \langle b|a\rangle}$

  infatti: $\quad \phi(a) = \sum_i a_i \, \phi(e_i) = \sum_i b_i^* \, a_i = \langle b|a\rangle$

  con $b_i^* = \phi(e_i)$, $\quad |b\rangle = \sum_i b_i \, |e_i\rangle$

- corrispondenza biunivoca: $\mathcal{H} \Leftrightarrow \mathcal{H}'$

  $\mathcal{H}' =$ spazio duale di $\mathcal{H}$

  bra $= \langle b| \in \mathcal{H}' \Leftrightarrow$ ket $= |b\rangle \in \mathcal{H}$

  $|r\rangle = c_1 |a\rangle + c_2 |b\rangle \Leftrightarrow \langle r| = c_1^* \langle a| + c_2^* \langle b|$

  prodotto scalare $=$ bracket $\langle b|a\rangle$