Teorema di equipartizione dell'energia

Ludwig Boltzmann (1844–1906)

Per una hamiltoniana quadratica nelle variabili canoniche

$$H = ap^2 + bq^2$$

l'energia media per grado di libertà è: $\boxed{E = kT}$

Infatti

$$\begin{aligned} E &= \frac{\displaystyle\int dq \int dp \, (ap^2 + bq^2) \, e^{-\beta(ap^2+bq^2)}}{\displaystyle\int dq \int dp \, e^{-\beta(ap^2+bq^2)}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln \int dq \int dp \, e^{-\beta ap^2} - \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \int dq \int dp \, e^{-\beta bq^2} \\ &= \tfrac{1}{2}kT + \tfrac{1}{2}kT \end{aligned}$$

N.B. integrale di Poisson: $\displaystyle\int_0^\infty dy \; e^{-y^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Esempi:

gas perfetto: $E = 3N \times \frac{1}{2}kT = \frac{3}{2}RT$

solido cristallino monoatomico: $E = 3N \times kT = 3RT$