Funzioni di frammentazione in due adroni

Marco Radici

INFN e DFNT – Univ. di Pavia

Dottorato di Ricerca in Fisica – Univ. Pavia – A.A. 2006/07

Outline

1. Introduzione: OPE → I.P.M. → approccio diagrammatico
   → teoremi di fattorizzazione
2. Frammentazione in 1 adrone: stato dell'arte per e+e- → h + X;
   → sviluppo in N^nLO, N^mLL, $1/Q^{t-2}$
3. Introduzione alle regole del **Jet Calculus**

1. **Introduzione**
2. Frammentazione in 1 adrone
3. Jet Calculus

1. **OPE**
2. Approccio diagrammatico
3. Teoremi di fattorizzazione

Preambolo

- teoria delle interazioni forti rinormalizzabile $\rightarrow$ divergenze ultraviolette (UV) cancellate da opportuni controtermini nella $\mathcal{L}_{QCD}$

- Operator Product Expansion (OPE) garantisce:

$$\hat{A}(x)\,\hat{B}(y) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y)\,\hat{O}_i\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

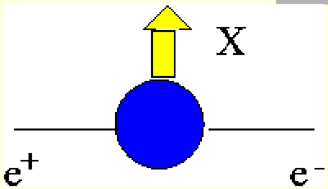
- eliminazione di patologie nella definizione di $W^{\mu\nu}$ di processi elementari
- fattorizzazione rigorosa tra fisica a corta e lunga distanza
- classificazione dei termini dominanti per processi dominati da cinematica sul Light-Cone (LC)
- contiene l'asymptotic freedom, assunta nel Parton Model (PM), ma non produce confinamento
- sottoprodotto: regola di somma di momento

$$\underbrace{M_F^n(Q^2)}_{\text{dati}} \;\leftrightarrow\; \underbrace{C_n(Q^2,\mu_F)}_{\text{calcolo}}\,\underbrace{\langle P|\hat{O}_{\mu_1\ldots\mu_n}(0,\mu_F)|P\rangle}_{\text{reticolo}}$$

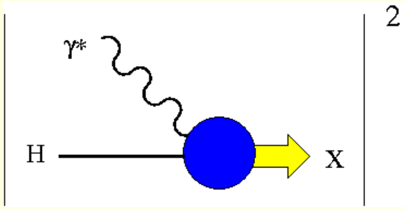
1. **Introduzione**
2. Frammentazione in 1 adrone
3. Jet Calculus

1. OPE
2. **Approccio diagrammatico**
3. Teoremi di fattorizzazione

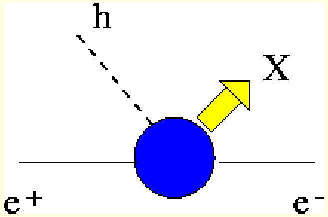
- OPE dimostrabile solo per e^+e^- inclusivo



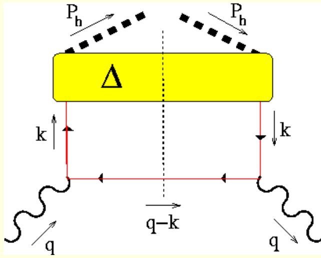
e DIS inclusivo



- per processi Semi-Inclusivi (SI)
  → ricerca di contributi principali
  in processi dominati da LC kin.
  (approccio diagrammatico)
  → Improved PM (IPM)

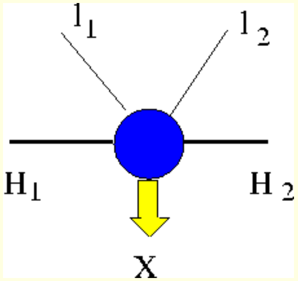


$O(\alpha_s^0)$ ~

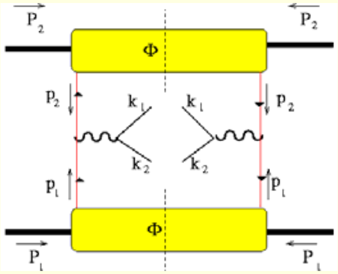


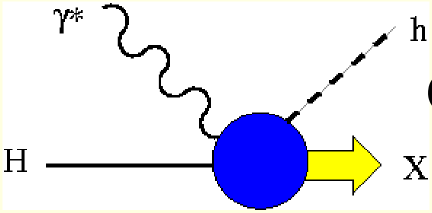
1hSI e^+e^-

ma anche Drell-Yan

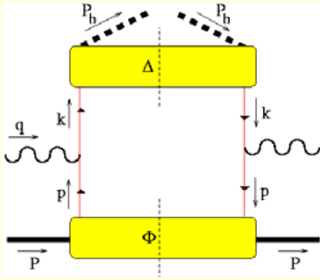


~





$O(\alpha_s^0)$ ~



1hSI DIS

1. **Introduzione**
2. Frammentazione in 1 adrone
3. Jet Calculus

1. OPE
2. Approccio diagrammatico
3. **Teoremi di fattorizzazione**

- Teoremi di fattorizzazione *ad hoc* per ciascun processo:

- $e^+ e^- \to h + X$
- $\gamma^* p \to h + X$

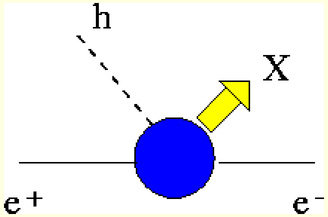
Ellis et al., N.P. **B152** (79) 285
Amati, Petronzio, Veneziano, N.P. **B140** (78) 54
Altarelli, Ellis, Martinelli, Pi, N.P. **B160** (79) 301
Furmanski e Petronzio, Z.P. **C11** (82) 293

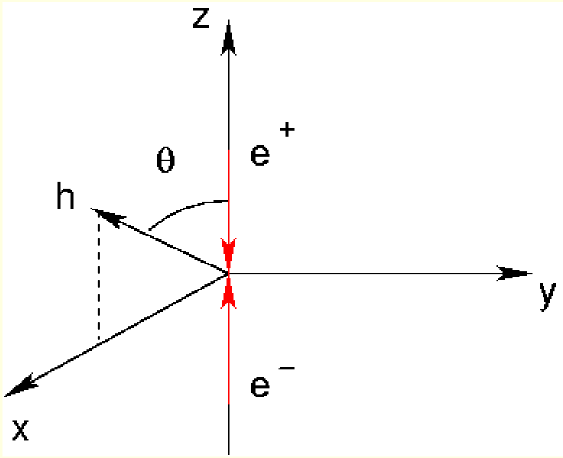
- $H_1 H_2 \to l_1 l_2 + X$ Collins, Soper, Sterman, N.P. **B250** (85) 199

- Generalizzati per includere dinamica non collineare (transverse momentum dependent parton distributions – TMD):

- $e^+ e^- \to h + X$ Collins e Soper, N.P. **B193** (81) 381
- $\gamma^* p \to h + X$ Collins e Metz, P.R.L. **93** (04) 252001
Ji, Ma, Yuan, P.R. D**71** (05) 034005

Frammentazione in 1 adrone





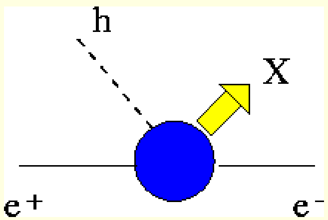
$k^{\pm\,\mu} = (E, 0\ , 0, \mp E)$

$q^{\mu} \ = (2E, \mathbf{0}\ )$

$P_h^{\mu} = (E_h, E_h \sin\theta, 0\ , E_h \cos\theta)$

$$z = \frac{2P_h \cdot q}{q^2} \sim \frac{4EE_h}{4E^2} = \frac{E_h}{E} \quad \begin{cases} E_h \sim 0 & z \to 0 \\ E_h \sim E & z \to 1 \end{cases}$$

$\sim$ "x_B^{-1}", misura elasticita`



$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{F}} |\mathcal{M}|^2 \, dR \qquad \mathcal{F} = 4\sqrt{(k\cdot k')^2 - k^2 k'^2} = 2Q^2 \equiv 2s$$

$$dR = (2\pi)^4 \delta(q - P_X - P_h) \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \frac{d\mathbf{P}_h}{(2\pi)^3 2E_h}$$

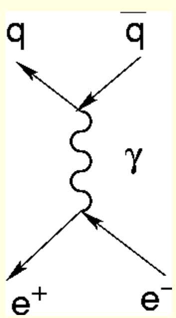
fattorizzazione $O(\alpha_s{}^0)$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$$

$$L_{\mu\nu} = 2\,(k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - k\cdot k' \, g_{\mu\nu})$$

$$H^{\mu\nu} = \sum_{S_X} \langle 0|J^\mu|P_X, P_h\rangle\langle P_X, P_h|J^\nu|0\rangle$$

~

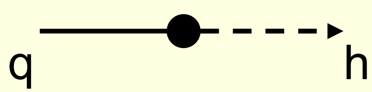


$$d\hat{\sigma} = \frac{1}{\mathcal{F}} |\widehat{\mathcal{M}}|^2 \, d\widehat{R} \qquad d\widehat{R} = dR(\mathbf{P}_X \leftrightarrow \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_h \leftrightarrow \mathbf{P}_2)$$

$$\widehat{H}^{\mu\nu} = e_q^2 \, \mathrm{Tr}\,[\bar{u}\gamma^\mu v \, \bar{v}\gamma^\nu u]$$

$$\otimes$$

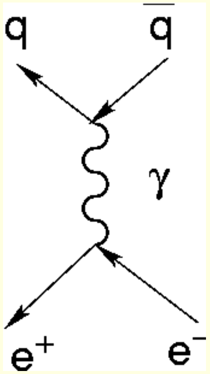
$$D^{q\to h}(z)$$



decay function

1. Introduzione
2. **Frammentazione in 1 adrone**
3. Jet Calculus

1. **Calcolo nel Parton Model (LO)**
2. Calcolo al NLO
3. Large Logs
4. Stato dell'arte per e+e- $\rightarrow$ h + X



dal PM:

$$\hat{\sigma}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) \equiv \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$$
$$= \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4Q^2} e_q^2 \int d\Omega \,(1 + \cos^2\theta) = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} e_q^2$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dz} = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} e_q^2 \, \delta(1-z)$$
$$\frac{1}{\hat{\sigma}} \frac{d\hat{\sigma}}{dz} = \delta(1-z)$$

Definizione di $\otimes$:

$$f \otimes g(x) \equiv \int_0^1 dydz \, f(y)\, g(z)\, \delta(x - yz)$$
$$= \int_0^1 \frac{dz}{z} dy \, \delta\left(\frac{x}{z} - y\right) f(y)\, g(z) = \int_x^1 \frac{dz}{z} f\left(\frac{x}{z}\right) g(z)$$

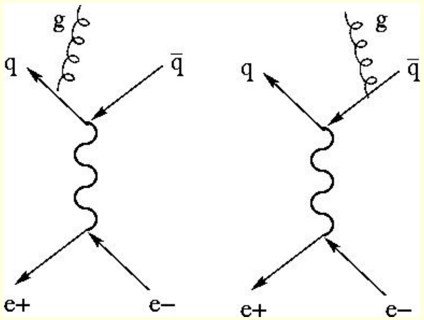
Ergo:

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dz} = \frac{1}{\hat{\sigma}}\frac{d\hat{\sigma}}{dz} \otimes D^{q\rightarrow h} = \int_z^1 \frac{dy}{y} \delta\left(1 - \frac{z}{y}\right) D^{q\rightarrow h}(y) \equiv D^{q\rightarrow h}(z)$$

funzione di frammentazione osservabile

decay function non osservabile

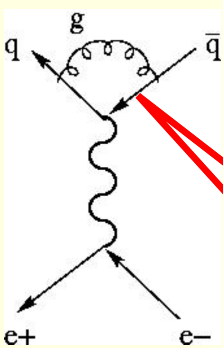
Oltre il PM: $O(\alpha_s) \Leftrightarrow$ Next-to-Leading Order (NLO)



emissione di g reale non è sufficiente:

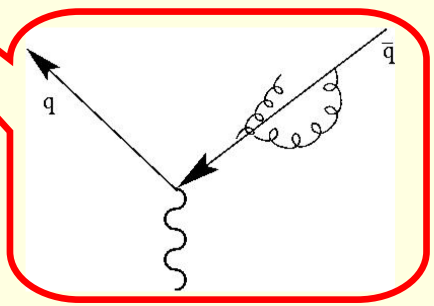
$$d\hat{\sigma} \sim \frac{z_1^2 + z_2^2}{(1 - z_1)(1 - z_2)}$$

poli non integrabili



emissione di g virtuale cancella divergenze di g reale
$\rightarrow$ sez. d'urto totale finita

$$\hat{\sigma}^{NLO} = \hat{\sigma}^{o} \left(1 + \frac{\alpha_s}{2\pi}\right)$$



emissione di radiazione soft
$\rightarrow$ A.P. splitting functions
$\rightarrow$ divergenze collineari in $d\sigma$

1. Introduzione
2. **Frammentazione in 1 adrone**
3. Jet Calculus

1. Calcolo nel Parton Model (LO)
2. **Calcolo al NLO**
3. Large Logs
4. Stato dell'arte per e+e- → h + X

regolarizzazione dimensionale D=4-ε alla scala fittizia μ_D

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma^{NLO}}\frac{d\sigma^{NLO}}{dz} &= \frac{1}{\hat{\sigma}^{NLO}}\frac{d\hat{\sigma}^{NLO}}{dz} \otimes D(z) \\
&= \sum_{ij} e_i^2 \left\{ \delta(1-z)\left[1+\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{ij}\left(\log\frac{Q^2}{\mu_D^2}-\frac{1}{\epsilon}+\gamma_E-\log(4\pi)\right)\right]+\frac{\alpha_s}{2\pi}f_{ij}(z)\right\}\otimes D_j(z) \\
&= \sum_{ij} e_i^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} f_{ij}(z) \otimes D_j^{NLO}(z)
\end{aligned}
$$

$$
D_i^{NLO}(z) = \sum_j D_j(z)\otimes\delta(1-z)\left\{1+\frac{\alpha_s}{2\pi}P_{ij}\left(\log\frac{Q^2}{\mu_D^2}-\frac{1}{\epsilon}+\gamma_E-\log(4\pi)\right)\right\}
$$

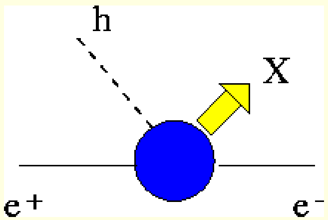
termini finiti = emissione di g "duri" a grande angolo

$$
= \frac{1}{\hat{\sigma}^{NLO}}\frac{d\hat{\sigma}^{NLO}}{dz}\bigg|_{reg.} \otimes D^{NLO}(z)
$$

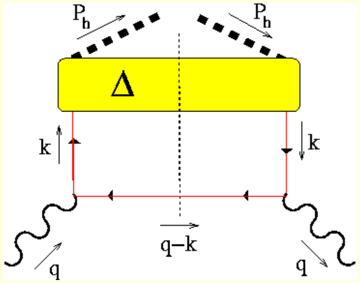
- divergenze collineari assorbite in D, universale e incognita; schema $\overline{\text{MS}}$
- cancellazione di scala fittizia μ_D e dipendenza da scala fattorizzazione $\mu_F^2=Q^2$
- indipendenza della fisica da μ_F : evoluzione di $d\sigma^{el}$ e D deve compensarsi

$$
\frac{d\, d\sigma^{NLO}}{d\log\mu_F^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dD_i^{NLO}}{d\log Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\sum_j P_{ij}\otimes D_j^{NLO}
$$

Ricapitolando:



← teorema →
di fattorizzazione



$$\Delta(k, P_h) = \sum_{S_h, X} \int \frac{d^4\zeta}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot\zeta} \times \langle 0|\psi(\zeta)|P_h S_h, X\rangle \times \langle P_h S_h, X|\bar{\psi}(0)|0\rangle$$

$$\frac{d\sigma}{dz} = d\hat{\sigma}(\alpha_s, Q, \mu_F) \otimes D(z, \mu_F)$$

calcolo ad ordine fisso
$O(\alpha_s^n) = N^nLO$

assorbe le divergenze
collineari corrispondenti

espansione $1/Q^n$
proiezioni di twist t

$$\begin{aligned} \Delta^{[\gamma^-]} &= D_1(z) & 2 \\ \Delta^{[1]} &= E(z) & 3 \\ \Delta^{[\gamma^-\gamma^+]} &= iH(z) & 3 \end{aligned}$$

$$\Delta^{[\Gamma]}(z) = \frac{1}{4z} \int dk^+ d\mathbf{k}_T \, \mathrm{Tr}\left[\Delta(k, P_h)\,\Gamma\right]\Big|_{k^- = P_h^-/z}$$

però questa classificazione può non essere sufficiente!

Esempio: fattorizzazione di quark pesante con massa m_q
calcolo di $d\hat{\sigma}^{NLO}$ non richiede μ_D ma m_q, che fa da I.R. cut-off

$$\sim \ldots \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ij} \log \frac{Q^2}{m_q^2} \ldots \equiv \frac{P_{ij}}{2\pi b_0} \left(\log \frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}} \right)^{-1} \log \frac{Q^2}{m_q^2} \sim \text{const.}$$

serie non converge!

Altri esempi: $H_1\ H_2 \rightarrow jet_1\ jet_2 + X$ con largo $p_T \ll \sqrt{s}$ $\quad \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \log \frac{s}{p_T^2} \sim 1$

$H_1\ H_2 \rightarrow l_1\ l_2 + X$ con largo $p_T \ll Q$ $\quad \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \log \frac{Q^2}{p_T^2} \sim 1$

importanza di altre scale "semi-dure" rispetto a Q^2 in processi S.I.
$\rightarrow$ analizzare spettro di molti adroni in frammentazione singola

1. Introduzione
2. **Frammentazione in 1 adrone**
3. Jet Calculus

1. Calcolo nel Parton Model (LO)
2. Calcolo al NLO
3. **Large Logs**
4. Stato dell'arte per e+e- $\rightarrow$ h + X

Prima di considerare la frammentazione in multiadroni, rivediamo l'esempio della frammentazione del quark pesante m_q:

a scala Q produzione di q massless > frammentazione di q massless in q con $m_q \neq 0$ > frammentazione di q con $m_q \neq 0$ in h

$\mu \sim Q$ $\qquad$ $\mu_0 \sim m_q$

$$d\sigma(Q, m_q) = d\hat{\sigma}(Q, \mu) \otimes E(\mu, \mu_0) \otimes D(\mu_0, m)$$ cosicché

$$\underbrace{\log \frac{Q^2}{m_q^2}}_{\text{large}} = \underbrace{\log \frac{Q^2}{\mu^2}}_{\text{small}} \times \underbrace{E(\mu, \mu_0)}_{\text{calcolabile}} \times \underbrace{\log \frac{\mu_0^2}{m_q^2}}_{\text{small}} \qquad \mu \gg \mu_0$$

scale $\mu \sim Q >> \mu_0 \sim m_q$ sono fittizie; invarianza della fisica $\dfrac{d(d\sigma)}{d \log \mu^2} = 0$

$\rightarrow$ equazioni di evoluzione DGLAP di E:
$$\begin{cases} \dfrac{dE_i(\mu, \mu_0)}{d \log \mu^2} = -\dfrac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} P_{ij} \otimes E_j(\mu, \mu_0) \\ E(\mu_0, \mu_0) = 1 \end{cases}$$

Konishi, Ukawa, Veneziano
N.P. **B157** (79) 45

funzione di frammentazione perturbativa di un q in un q

$$\frac{dE_i(\mu,\mu_0)}{d\log\mu^2} = -\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} P_{ij} \otimes E_j(\mu,\mu_0)$$
$$E(\mu_0,\mu_0) = 1$$

taking 1 loop

$$\alpha_s(\mu) = \frac{1}{b_0 \log \frac{\mu^2}{\Lambda^2_{QCD}}}$$

$$\log E(\mu,\mu_0) = \frac{P^{(0)}}{2\pi b_0} \log \frac{\alpha_s(\mu_0)}{\alpha_s(\mu)}$$

$$E(\mu,\mu_0) = \left[\frac{\alpha_s(\mu_0)}{\alpha_s(\mu)}\right]^{P^{(0)}/2\pi b_0}$$

in generale include $\alpha_s^n \log^n$
→ risommazione collineare al Leading Logarithm (LL)

taking 2 loops

$$E(\mu,\mu_0) = \left[\frac{\alpha_s(\mu_0)}{\alpha_s(\mu)}\right]^{P^{(0)}/2\pi b_0} \times \exp\left\{\frac{\alpha_s(\mu_0)-\alpha_s(\mu)}{4\pi^2 b_0}\left(P^{(1)} - \frac{2\pi b_1}{b_0} P^{(0)}\right)\right\}$$

include $\alpha_s^n \log^{n-1}$ → risommazione collineare al Next-to-Leading Logarithm (NLL)

Vale anche per risommazione di radiazione soffice (Sudakov)

LL $\alpha_s^n \left[\log^{2n-1}(1-x)/(1-x)\right]$

NLL $\alpha_s^n \left[\log^{2n-2}(1-x)/(1-x)\right]$

Mele e Nason, N.P. **B361** (91) 626
Cacciari e Greco, NP. **B421** (94) 530

Bonciani *et al*., N.P. **B529** (98) 424

1. Introduzione
2. **Frammentazione in 1 adrone**
3. Jet Calculus

1. Calcolo nel Parton Model (LO)
2. Calcolo al NLO
3. Large Logs
4. **Stato dell'arte per e+e- $\rightarrow$ h + X**

Situazione: $d\hat{\sigma}(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ nota a $O(\alpha_s^2)$ Rijken e van Neerven, P.L. **B386** (96) 422

time-like P_{ij} anche a $O(\alpha_s^3)$ per osservabili non-singlet

…h, Vogt, P.L. **B638** (06) 61

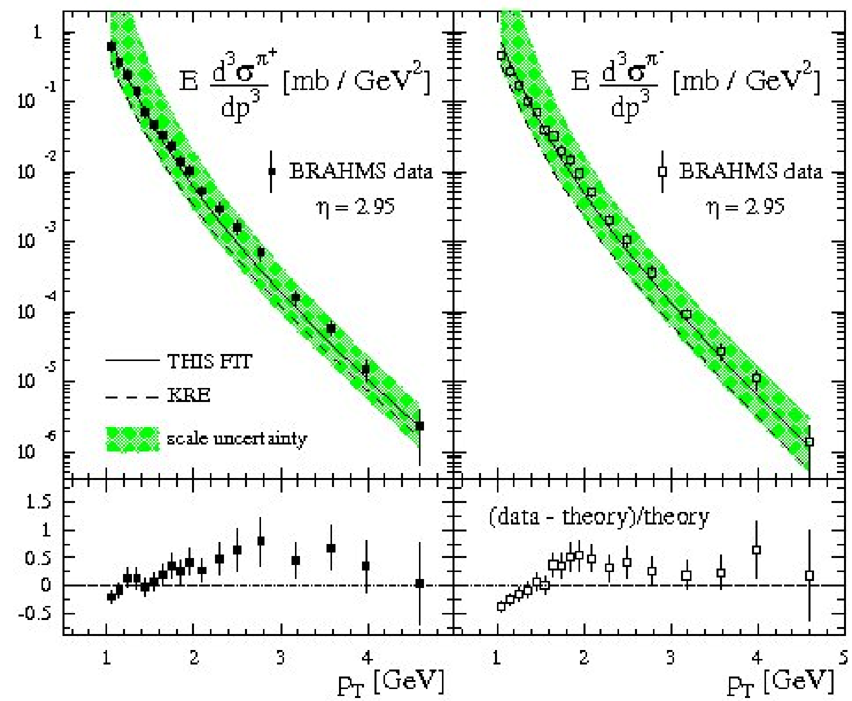


FIG. 5: upper panels comparison of our NLO results for single-inclusive charged pion production $pp \rightarrow \pi^\pm X$ at rapidity $\eta = 2.95$ (solid lines) with BRAHMS data [21] using $\mu_f = \mu_r = p_T$. Also shown are the results obtained with the KRE [7] parametrization (dashed lines). The shaded bands indicate theoretical uncertainties when all scales are varied in the range $p_T/2 \leq \mu_f = \mu_r \leq 2p_T$. lower panels "(data-theory)/theory" for our NLO results.

NLO fit

de Florian, Sassot, Stratmann, hep-ph/0703242

Ricapitolando:

- funzione di frammentazione perturbativa $E^{q\rightarrow q}$ risomma contributi collineari e soft da large logs $\rightarrow$ introduce nuovo ordine di precisione:
  $O(\alpha_s^n)$ = N^nLO $O(1/Q^n)$ = twist 2+n $O(\alpha_s^n \log^n)$ = LL $O(\alpha_s^n \log^{n-1})$ = NLL

- introduce nuova formulazione dell'evoluzione, adatta all'applicazione ricorsiva del processo di branching con le regole del **Jet Calculus**
  Per α_s a 1 loop $\rightarrow$ LL, si ottiene

Konishi, Ukawa, Veneziano
N.P. **B157** (79) 45

$$\begin{aligned} D^{i\to h}(z,Q^2) &= \sum_j E_i^j(Q^2,Q_0^2) \otimes D^{j\to h}(z,Q_0^2) \\ \frac{dE_i^j(z,Y)}{dY} &= \sum_m E_m^j(z,Y) \otimes P_{mi}^{(0)} \end{aligned}$$

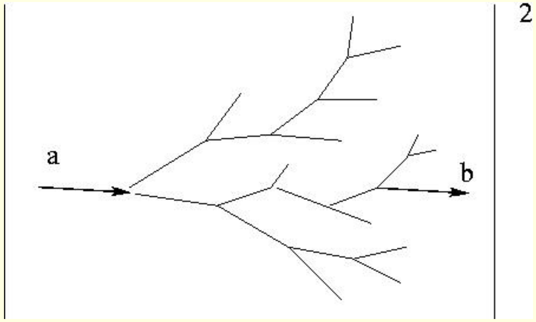
$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2\pi b_0} \log \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(Q^2)} \\ \alpha_s(Q^2) &= \frac{1}{b_0 \log \frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}}} \\ b_0 &= \frac{11N_c - 2N_f}{12\pi} \end{aligned}$$

rapidity

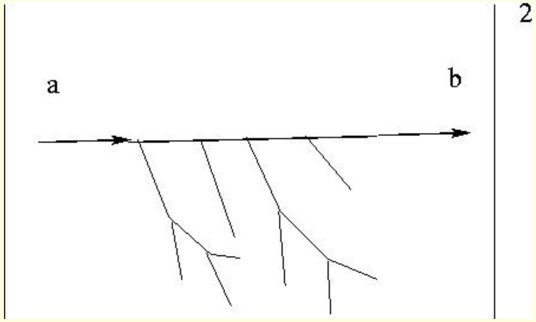
Frammentazione in 1 adrone in Jet Calculus

at LL

branching $\leftrightarrow P^{(0)}$



no interferenze



strong ordering $i \rightarrow j+k$

$q_j^2,\ q_k^2 \ll \varepsilon q_i^2 \quad \varepsilon \ll 1$

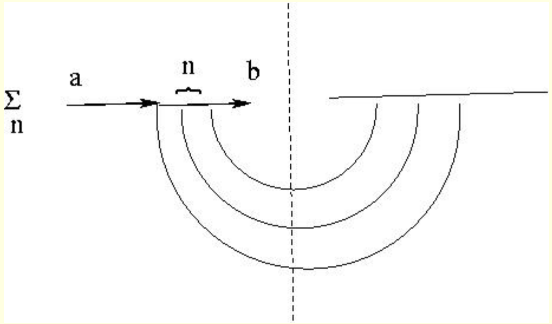
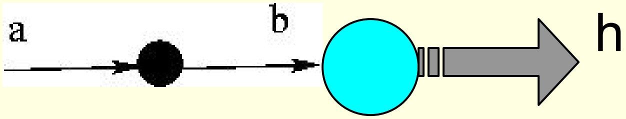


diagramma ladder $\rightarrow$ exp [Y]

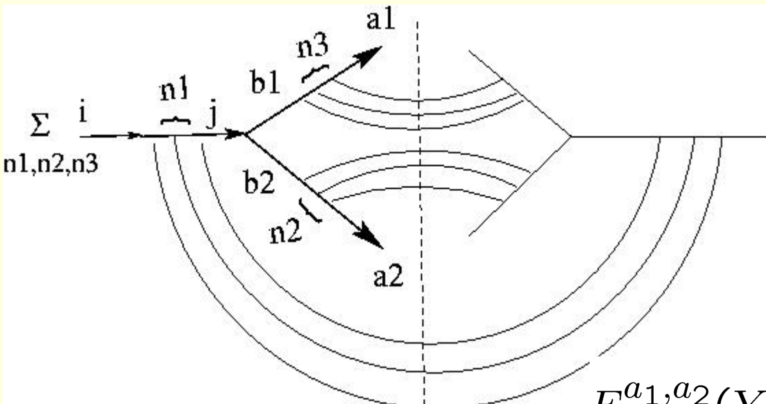
$\equiv E_a^{\ b}$



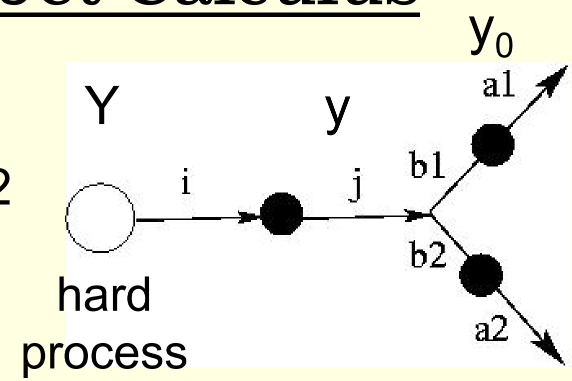
calculable unknown

$$D^{a\rightarrow h}(z,Q^2) = E_a^b(Q^2,Q_0^2) \otimes D^{b\rightarrow h}(z,Q_0^2)$$

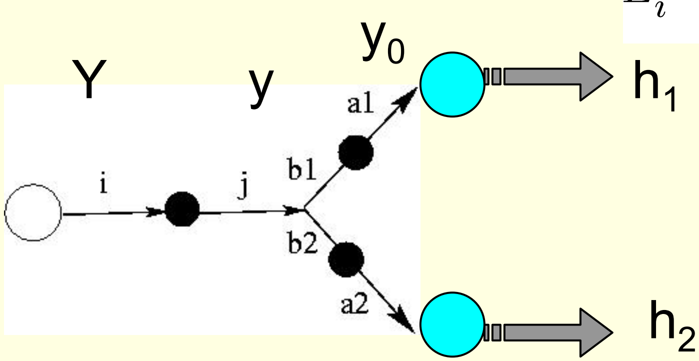
Frammentazione in due adroni in Jet Calculus



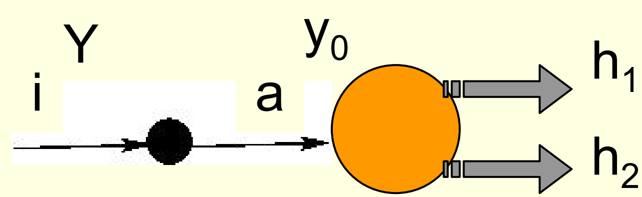
$\equiv E_i^{a1,a2}$



$$E_i^{a_1,a_2}(Y) = \int_{y_0}^{Y} dy\, E_{b_1}^{a_1}(y) \otimes E_{b_2}^{a_2}(y) \otimes \widehat{P}_{b_1 b_2}^{j} \otimes E_i^{j}(Y-y)$$



\+



$$D^{i\to h_1 h_2}(z_1, z_2, Y) = E_i^{a_1,a_2}(Y) \otimes D^{a_1\to h_1}(z_1, y_0) \otimes D^{a_2\to h_2}(z_2, y_0) \quad + E_i^{a}(Y-y_0) \otimes \boxed{D^{a\to h_1 h_2}(z_1, z_2, y_0)}$$