

Riassunto della lezione precedente

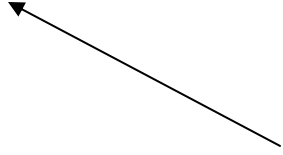
- **Operator Product Expansion.** Primo esempio: il teorema di Wick
- OPE su prodotto di correnti e.m. di quark liberi
 - applicazione a DIS ed e^+e^- inclusivi
 - classificazione delle singolarita` a corte distanze
 - termine dominante coincide con QPM
- procedura generale :
 - sviluppo di OPE in coefficienti di Wilson con singolarita` decrescenti
 - operatori bilocali regolari sviluppabili in serie di operatori locali
 - risultato finale per il tensore adronico e` una serie di prodotti di potenze di $1/Q^2$ per elementi di matrice adronici degli operatori locali
 - il parametro di classificazione dello sviluppo in potenze e` il twist

Definizione operativa di twist

(Jaffe, 1995)

procedura per il calcolo di $W_{\mu\nu}$:

- espansione OPE per operatore bilocale in serie di operatori locali
- trasformata di Fourier di ciascun termine
- somma dei termini ottenuti
- risultato finale esprimibile in serie di potenze di M/Q attraverso il **twist**
 $t = d$ (dimensione canonica) - n_α (spin) ≥ 2

$$\begin{aligned}
 2MW_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle \\
 &\sim \frac{1}{2\pi^2} \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \epsilon(x^0) \partial^1(x^2) \langle P | \hat{O}_V^\rho(x, 0) | P \rangle \\
 &\sim \sum_{\{\alpha\}} \int d^4x e^{iq \cdot x} \left[C_{\mu\nu\{\alpha\}}(x^2) - \left(C_{\mu\nu\{\alpha\}}(x^2) \right)^\dagger \right] x^{\mu_1} \dots x^{\mu_{n_\alpha}} \langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_{n_\alpha}}(0) | P \rangle \\
 &\sim c_{\hat{O}} \sum_{\{\alpha\}} c'_{\{\alpha\}} \left(\frac{M}{\sqrt{q^2}} \right)^{d-n_\alpha-2} \left(\frac{1}{x_B} \right)^{n_\alpha} \sim \frac{1}{(x^2)^{3+\frac{n_\alpha-d}{2}}}
 \end{aligned}$$


(continua)

e' possibile lavorare direttamente con operatori bilocali evitando gli step di cui sopra ? Qual e' il twist t di un operatore bilocale ?

Esempio :



$$\begin{aligned}\bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(x) &= \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(0) + x_\nu \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \partial^\nu \psi(0) + \dots \\ &\equiv J^\mu(0) + x_\nu \theta^{\mu\nu}(0) + \dots\end{aligned}$$

se locale $\rightarrow t=2$

$t=2$

$$\theta^{\mu\nu} = \left(\theta^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \theta^\lambda_\lambda \right) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \theta^\lambda_\lambda$$

$t=2$ $t=4$

quindi se versione locale di operatore bilocale ha twist $t=2$
 \rightarrow operatore bilocale ha twist $t \geq 2$

(continua)

poiche' operatore bilocale di twist t contribuisce a potenze del tipo

$$\left(\frac{M}{Q}\right)^{t-2}, \left(\frac{M}{Q}\right)^{t+2-2}, \dots, \quad t \geq 2$$

definizione operativa di twist per un operatore bilocale regolare

=

la potenza leading in M/Q a cui l'elemento di matrice dell'operatore contribuisce al processo deep-inelastic considerato nel limite di corte distanze (\leftrightarrow nel regime DIS)

- N.B. - le potenze di M necessarie si determinano decomponendo l'elemento di matrice in tensori di Lorentz e facendo un'analisi dimensionale
- definizione non coincide con $t = d - \text{spin}$, ma questa e' piu' comoda e permette di stimare direttamente il grado di soppressione $1/Q$

correzioni di potenze	correzioni QCD	1	α_s	α_s^2	...
1		QPM	→	IQPM	→
1/Q			Operator Product Expansion		
1/Q ²					
1/Q ³				
...					

N.B. per il momento solo
per e^+e^- e DIS inclusivo

Momentum sum rule

$$4\pi M W_{\mu\nu} = \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle \sim c_{\hat{O}} \sum_{\{\alpha\}} c'_{\{\alpha\}} \left(\frac{M}{\sqrt{q^2}} \right)^{d-n_\alpha-2} \left(\frac{1}{x_B} \right)^{n_\alpha}$$

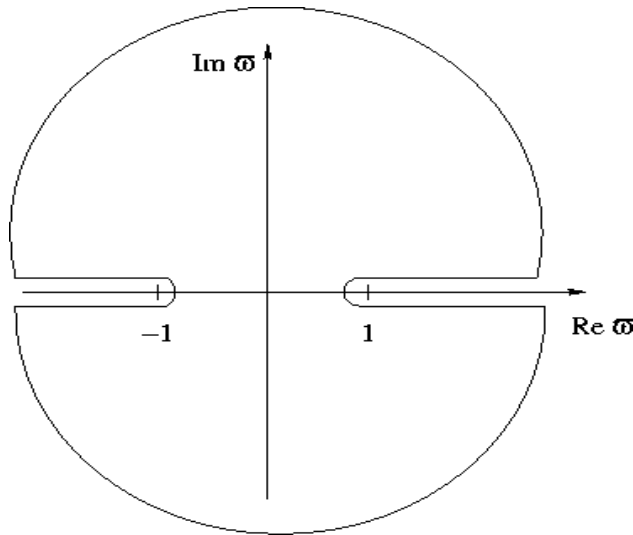
teorema ottico : $2\pi W^{\mu\nu} = \text{Im } T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | \mathcal{T} [J^\mu(x) J^\nu(0)] | P \rangle \sim \sum_n \frac{1}{\left(\sqrt{q^2} \right)^{t-2}} \underbrace{\tilde{c}_n M^{d-n-2} \left(\frac{1}{x_B} \right)^n}_{\text{memoria di}} C_n^{\mu\nu}(q^2, \mu_F) \langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}(0, \mu_F) | P \rangle$$

ma $x_B \leq 1 \rightarrow$ serie converge in regione non fisica $x_B > 1$!

(continua)

piano complesso di
 $\omega = 1 / x_B$



$$T(\omega) = T(-\omega)$$

$$T^*(\omega^*) = T(\omega)$$

$$T_{\mu\nu}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-1} d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' + i\epsilon)}{\omega' - \omega} \right. \\
+ \int_{-1}^{-\infty} d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' - i\epsilon)}{\omega' - \omega} \\
+ \int_{\infty}^1 d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' - i\epsilon)}{\omega' - \omega} \\
\left. + \int_1^{\infty} d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' + i\epsilon)}{\omega' - \omega} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \left[\frac{\text{Im} T_{\mu\nu}(\omega')}{\omega' + \omega} + \frac{\text{Im} T_{\mu\nu}(\omega')}{\omega' - \omega} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \text{Im} T_{\mu\nu}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}$$

(continua)

$$T_{\mu\nu}(\omega) \stackrel{\omega/\omega' \sim 0}{\sim} \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ pari}} \int_1^\infty \frac{d\omega'}{\omega'} \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^n \text{Im } T_{\mu\nu}(\omega')$$



$$y = \frac{1}{\omega'} \longrightarrow = 2 \sum_n \frac{1}{\pi} \int_0^1 dy y^{n-1} \text{Im } T_{\mu\nu}(y) \left(\frac{1}{x_B}\right)^n$$

teorema
ottico $\longrightarrow \propto$

$$\sum_n \int_0^1 dy y^{n-1} F(y, Q^2) \left(\frac{1}{x_B}\right)^n$$

$$\equiv \sum_n M_F^n(Q^2) \left(\frac{1}{x_B}\right)^n \equiv \sum_n \frac{1}{(\sqrt{q^2})^{t-2}} \tilde{c}_n M^{d-n-2} \left(\frac{1}{x_B}\right)^n$$

$$M_F^n(Q^2) \leftrightarrow C_{\mu\nu, n}(Q^2, \mu_F) \langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}(0, \mu_F) | P \rangle$$

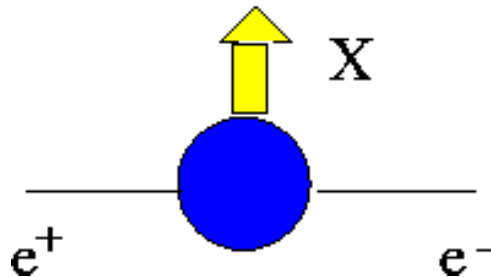
momenti delle
funzioni di struttura
(misurabili)

coeff. Wilson
(calcolabili in
pQCD)

incognite
(calcolabili
su reticolo)

OPE dimostrabile solo per e^+e^- e DIS inclusivi

e^+e^- inclusivo

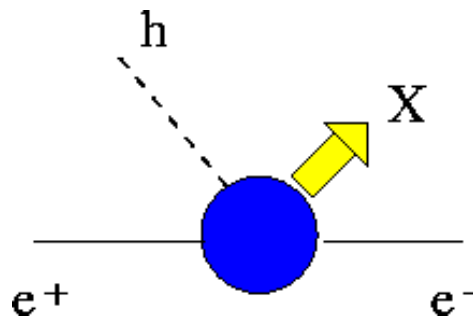


$$W^{\mu\nu} = \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle$$

$q^\mu \stackrel{c.m.}{=} (q^0, 0)$ regime DIS: $Q^2 \rightarrow \infty \Rightarrow q^0 \rightarrow \infty$
 causalità $\Rightarrow [..]$ definito su $\xi^2 \geq 0$
 contributo principale all'integrale da $q \cdot \xi$ finito
 $\Rightarrow \xi^0 \sim 0 \Rightarrow \xi \sim 0$

operatore composito a corte distanze \rightarrow OPE

e^+e^- semi-inclusivo



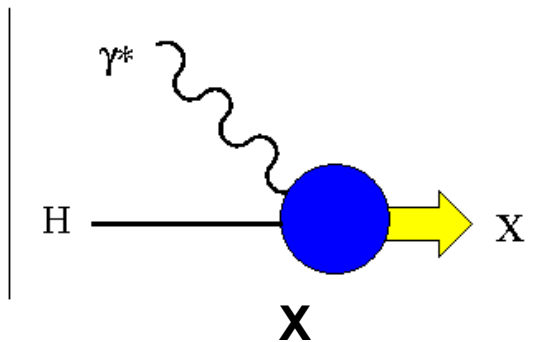
$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_X \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | 0 \rangle$$

sistema dell'adrone a riposo $P_h^\mu = (M_h, \mathbf{0})$

$q \cdot \xi$ finito $\rightarrow W^{\mu\nu}$ dominato da $\xi^2 \sim 0$

ma stato $|P_h\rangle$ impedisce chiusura \sum_X
 \rightarrow OPE non puo` essere applicata

DIS inclusivo



$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | P \rangle$$

dominante per $\xi^2 \sim 0$

ma relazioni di dispersione per ampiezza Compton

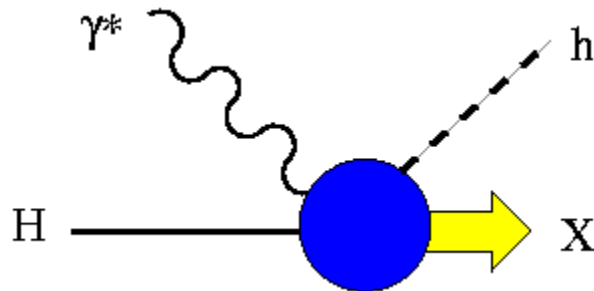
$T^{\mu\nu}$ in piano complesso $v = 1/x_B$

→ serie di potenze $(1/x_B)^n$ con raggio $\rightarrow 0$ in limite DIS

$\Rightarrow (x_B \rightarrow \infty) \Leftrightarrow (\mathbf{q}=0 \text{ e } v \rightarrow i\infty)$

$q\cdot\xi$ finito in limite DIS $\rightarrow \xi^0 \sim 0 \rightarrow \xi^\mu \sim 0$

DIS semi-inclusivo

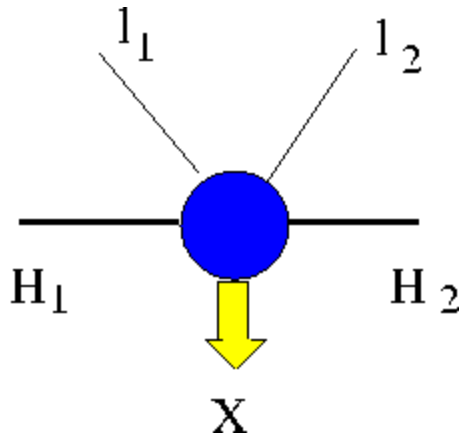


$$2MW^{\mu\nu} \propto \sum_X \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | P \rangle$$

stato $|P_h\rangle$ impedisce chiusura \sum_X

→ OPE non può essere applicata

Drell-Yan



$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2} s \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P_1 P_2 | J^\mu(\xi) J^\nu(0) | P_1 P_2 \rangle$$

$q\cdot\xi$ finito \rightarrow dominanza per $\xi^2 \sim 0$

ma $\langle .. \rangle$ non è limitato in nessun sistema
perché $s=(P_1+P_2)^2 \sim 2P_1 \cdot P_2 \geq Q^2$ e nel
limite $Q^2 \rightarrow \infty$ entrambe P_1, P_2 non limitati
 $W^{\mu\nu}$ riceve contributi fuori dal light-cone!

Quali sono i diagrammi dominanti per i processi in cui
non si può applicare l'OPE ?

È possibile applicare il concetto dell'OPE (fattorizzazione) anche
a processi semi-inclusivi?

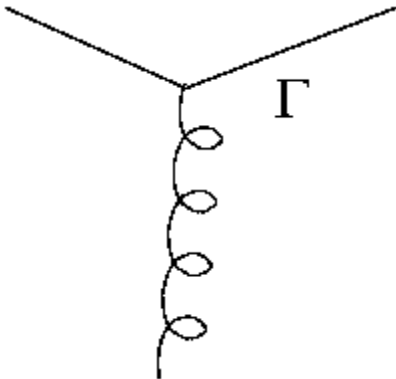
Classificazione dei contributi dominanti ai vari processi hard

Premessa :

- propagatore di quark libero a corte distanze $S_F(x)$

$$\begin{aligned} S_F(x) &= (i\gamma \cdot \partial + m) \Delta(x) \sim (i\gamma \cdot \partial + m) \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{-2\gamma \cdot x}{(x^2 - i\epsilon)^2} \frac{i}{4\pi^2} + \dots \sim \frac{1}{x^3} + \text{termini meno singolari} \end{aligned}$$

- interazione con gluone non incrementa la singolarita`



$$\sim \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} S_F(x - y) \Gamma S_F(y) \sim \frac{1}{x^2}$$

(continua)

e^+e^- inclusivo

$$\text{teorema ottico} = \text{Im} \left\{ \text{diagramma} \right\} \sim \text{Tr} [S_F(x)]^2 \sim \frac{1}{x^6}$$

contributo dominante a corte distanze $\rightarrow \sigma_{\text{tot}}$ del QPM
 correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$

e^+e^- semi-inclusivo

$$2 \sim \text{diagramma}$$

diagramma dominante a corte distanze perche' $\sim S_F(x) \sim \frac{1}{x^3}$

correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$ quindi fattorizzazione
 tra vertice hard e frammentazione soft funziona

(continua)

DIS inclusivo

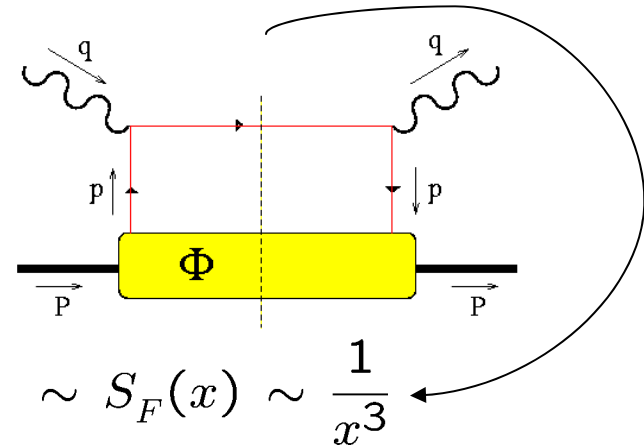
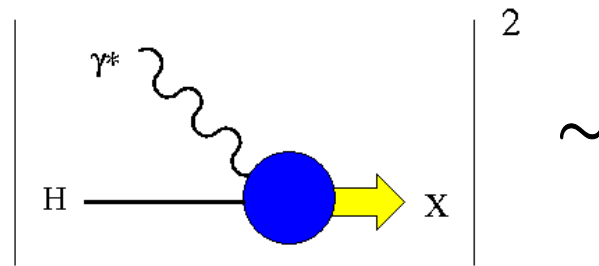
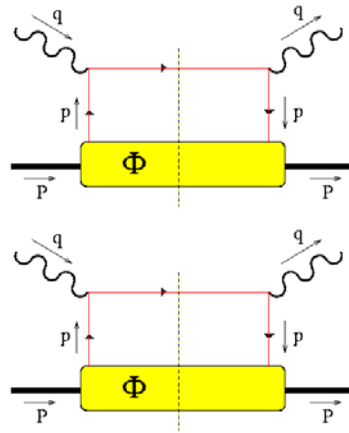
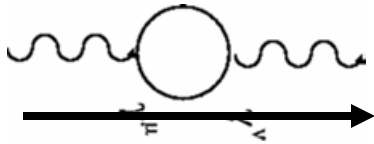


diagramma dominante a corte distanze perche' $\sim S_F(x) \sim \frac{1}{x^3}$
 correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$ quindi si ritrova risultato di OPE

$$\epsilon(\xi^0) [J_\mu(\xi), J_\nu(0)] =$$

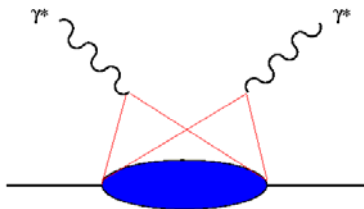


$$\frac{i(2\xi_\mu\xi_\nu - \xi^2 g_{\mu\nu})}{3\pi^3} \partial^3(\xi^2)$$

$$+ \frac{\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0)$$

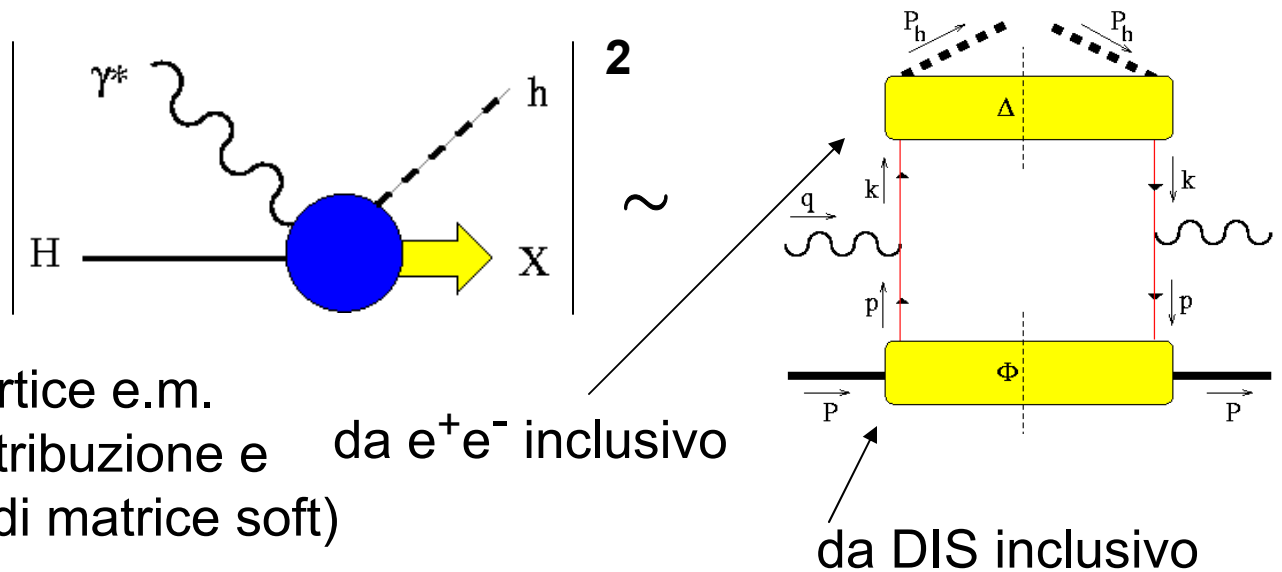
$$+ \frac{i\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0)$$

$$+ \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, \xi)$$



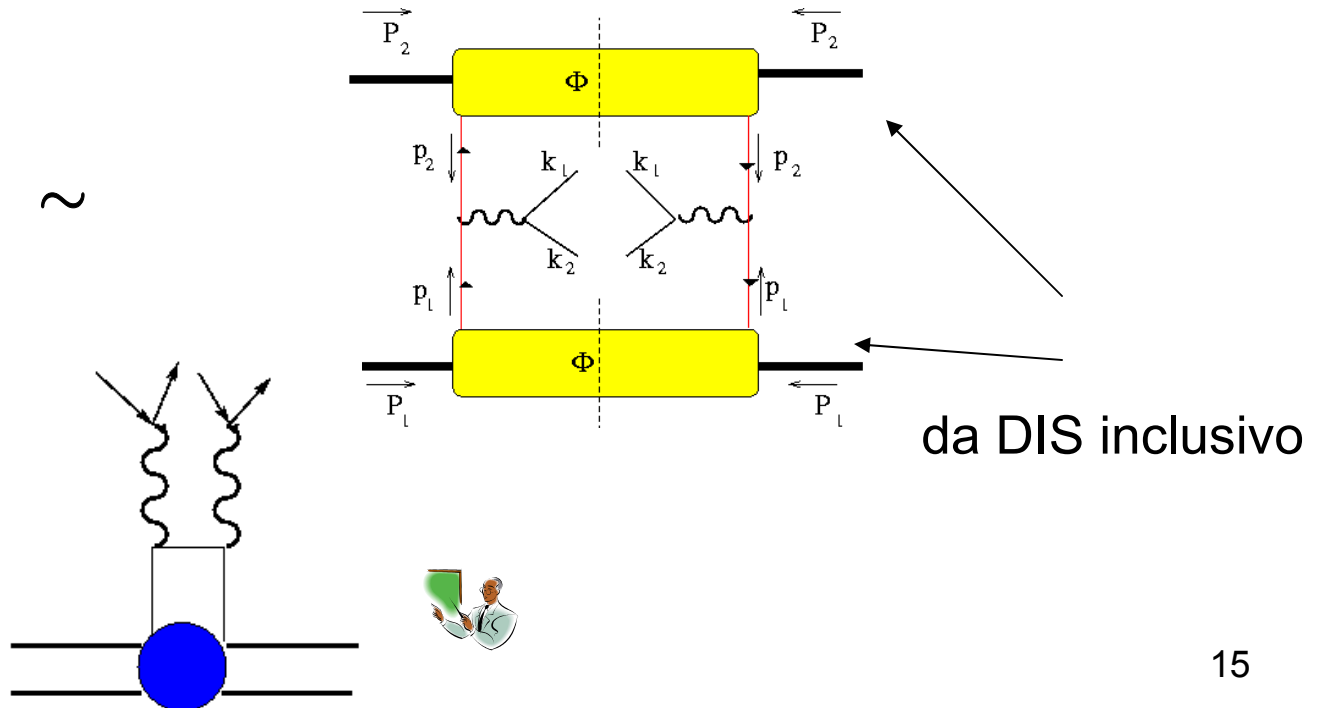
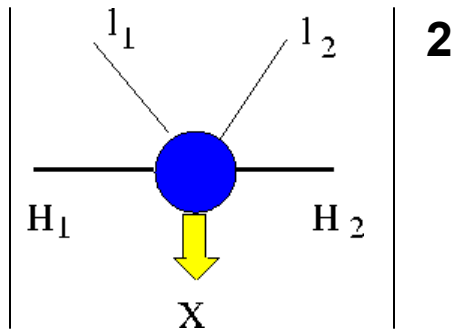
(continua)

DIS semi-inclusivo



fattorizzazione tra vertice e.m.
hard e funzioni di distribuzione e da e^+e^- inclusivo
frammentazione (el. di matrice soft)

Drell-Yan



correzioni di potenze	correzioni QCD	1	α_s	α_s^2	...
		QPM	→	IQPM	→
1					
1/Q					
1/Q ²					
1/Q ³					
...					

**Operator
Product
Expansion**

↕

diagrammatic
approach

↓

studio sistematico
delle correzioni di
potenze (↔ OPE
per DIS e e^+e^- inclusivi)
(Ellis, Furmanski, Petronzio, '82)

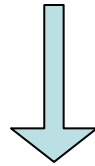
convolution
approach

....

convoluzione con
scattering hard
fattorizzato
(Efremov, Teryaev, Jaffe,
Ji, Ralston, Soper, Qiu,
Sterman, Collins, Leader
Anselmino...)

(continua)

Per tutti i processi di tipo DIS o e^+e^- (sia inclusivi che semi-inclusivi) il contributo dominante al tensore adronico viene dalla cinematica light-cone



- definizione e proprietà delle variabili light-cone
- teoria di campo quantizzata sul light-cone
- algebra di Dirac sul light-cone

Variabili light-cone

dato 4-vettore a^μ

$$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^0 \pm a^3) \quad , \quad \mathbf{a}_\perp = (a^1, a^2)$$

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^+, a^-, \mathbf{a}_\perp)$$

prodotto scalare

$$a \cdot b = a^+ b^- + a^- b^+ - \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp$$

$$a^2 = 2a^+ a^- - \mathbf{a}_\perp^2$$

metrica

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(0,1,2,3)} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$$

“base” light-cone :

$$n_+^\mu = (1, 0, \mathbf{0}_\perp) \quad , \quad n_-^\mu = (0, 1, \mathbf{0}_\perp) \quad ; \quad n_\pm^2 = 0 \quad , \quad n_+ \cdot n_- = 1$$

$$a^\pm = a \cdot n_\mp \longrightarrow a^\mu = (a \cdot n_-) n_+^\mu + (a \cdot n_+) n_-^\mu + \mathbf{a}_\perp$$

metrica “trasversa”

$$g_\perp^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n_+^\mu n_-^\nu - n_+^\nu n_-^\mu = g^{\mu\nu} - n_+^{\{\mu} n_-^{\nu\}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$$

adrone-bersaglio a riposo $P^\mu \stackrel{rest frame}{=} (M, 0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (M, M, \mathbf{0}_\perp)$

DIS inclusivo

bersaglio assorbe momento trasverso di γ^* ; ad esempio se $\mathbf{q} \parallel z$ $P_z=0 \rightarrow P'_z=q \gg M$ in regime DIS

$$P'^\mu = (\sqrt{M^2 + P_z'^2}, 0, 0, P'_z) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} (P'_z, 0, 0, P'_z) = (\sqrt{2} P'_z, 0, 0_\perp)$$

regime DIS \Rightarrow direzione “+” dominante
direzione “-” soppressa

boost di 4-vettore $a^\mu \rightarrow a'^\mu$ lungo asse z

$$a'^0 = \frac{a^0 + \beta a^3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad a'^3 = \frac{\beta a^0 + a^3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad a'_\perp = a_\perp$$

$$a'^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1 + \beta)(a^0 + a^3)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = a^+ \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = a^+ e^\psi$$

$$a'^- = a^- \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = a^- e^{-\psi}$$

N.B. rapidity

$$\psi = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \Rightarrow \beta = \tanh \psi$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (M, M, \mathbf{0}_\perp)$$

boost lungo
asse z

$$P'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

$A = M \rightarrow$ rest frame dell'adrone

$A = Q \rightarrow$ Infinite **M**omentum **F**rame (IFM)

definizioni :

$$q^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-x_N A, \frac{Q^2}{x_N A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

invariante di Nachtmann $x_N = -\frac{q^+}{P^+}$

$$q^2 = 2q^+q^- - \mathbf{q}_\perp^2 = -Q^2$$



$$2P \cdot q = \frac{Q^2}{x_N} - x_N M^2 \implies \frac{1}{x_B} = \frac{1}{x_N} - x_N \frac{M^2}{Q^2} \implies x_N x_B^2(\dots) = x_N x_B^2(\dots)$$

$$x_B^2 - x_N x_B + \frac{x_N^2}{4} = \frac{x_N^2}{4} \left(1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2} \right) \implies x_N = \frac{2x_B}{1 + \sqrt{1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2}}} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} x_B$$

miglior scaling in x_N quando $Q \gtrsim M$

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(xA, \frac{p^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{xA}, \mathbf{p}_\perp \right)$$

frazione light-cone (longitudinale)
di momento partonico

$$p^2 = 2p^+p^- - \mathbf{p}_\perp^2$$

$$x = \frac{p^+}{P^+}$$

Quantizzazione di teoria di campo sul light-cone

regole di commutazione
al tempo $x^0=t=0$
evoluzione in x^0

regole di commutazione
al tempo "light-cone" $x^+=0$
evoluzione in x^+

variabili cinematiche \mathbf{x}

x^- , \mathbf{x}_\perp

momenti coniugati \mathbf{k}

k^+ , \mathbf{k}_\perp

Hamiltoniana k^0

k^-

quanto di campo

$$\psi(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} b_\alpha(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

$$\psi_+(x) = \int \frac{dk^+ d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3 k^+} b_\alpha(\mathbf{k}) u_+(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) v_+(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

$$[b_\alpha(\mathbf{k}), b_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\alpha'}$$

.....

$$[b_\alpha(\mathbf{k}), b_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 k^+ \delta(k^+ - k'^+) \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta_{\alpha\alpha'}$$

spazio di Fock

$$b^\dagger|0\rangle \rightarrow q \quad d^\dagger|0\rangle \rightarrow \bar{q}$$

.....

Algebra di Dirac sul light-cone

rappresentazione usuale delle matrici di Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

↖ così (anti-)particelle hanno solo componenti upper (lower)
nello spinore di Dirac

nuova rappresentazione per teoria di campo light-cone

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_{\perp} = \begin{pmatrix} i\sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & i\sigma_{\perp} \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad \text{ok}$$

definizioni : $\gamma^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 \pm \gamma^3)$ $P_{\pm} = \frac{1}{2}\gamma^{\mp}\gamma^{\pm}$



proiettori $(P_{\pm})^2 = P_{\pm}$; $P_+ P_- = P_- P_+ = 0$, $P_+ + P_- = \mathbf{1}$

$$P_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} , \quad P_+ |\psi\rangle = \phi , P_- |\psi\rangle = \chi$$

Proiettare eq. di Dirac

$$P_{\pm} (i\gamma \cdot D + m) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad D_{\pm} = \partial_{\pm} - igA^{\mp}$$



$$\begin{cases} i\gamma^- D_- \chi = -i\gamma_{\perp} \mathbf{D}_{\perp} \phi - m\phi \\ i\gamma^+ D_+ \phi = -i\gamma_{\perp} \mathbf{D}_{\perp} \chi - m\chi \end{cases} \longleftarrow \begin{array}{l} \text{non contiene "tempo" } x^+ : \chi \text{ dipende} \\ \text{da } \phi \text{ e } \mathbf{A}_{\perp} \text{ a } x^+ \text{ fissato} \\ \phi, \mathbf{A}_{\perp} \text{ gradi di liberta' indipendenti} \end{array}$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{"good"} \\ \longleftarrow \text{"bad"} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{componenti light-cone} \\ P_+ |\psi\rangle \\ P_- |\psi\rangle \end{array}$$

componenti "good" \rightarrow componenti indipendenti e leading
 componenti "bad" \rightarrow dipendenti dall'interazione (quark-gluone)
 e pertanto sopresse

Stati di spin per quark

generatore delle rotazioni di spin lungo z $\Sigma^3 = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2] = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

se momento \parallel z, misura l'elicità`

$\gamma^1, \gamma^2, \gamma_5$ commutano con $P_{\pm} \rightarrow 2$ possibili scelte :

- diagonalizzare γ_5 e $\Sigma^3 \rightarrow$ base di elicità`
- diagonalizzare γ^1 (o γ^2) \rightarrow base di trasversita`

N.B. in base di elicità` $\gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$ $\Sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

elicità` = chiralita` per componente "good" ϕ

elicità` = - chiralita` per componente "bad" χ



N.B. in base trasversa proiettore trasverso di spin $Q_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5 \gamma^1)$

definiamo $Q_{\pm} \phi = \phi_{\perp/\top} = f(\phi_{\pm})$

$\phi_{\perp/\top}$ non sono autostati dell'operatore di spin trasverso !

$$\Sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^1 \\ i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}$$