

# Riassunto della lezione precedente

- color-gauge invariance dei correlatori bilocali
  - operatore di gauge link
  - funzioni T-odd permesse anche nello stato iniziale
  - struttura piu` ricca al leading twist → diverse sorgenti di SSA
- effetto Sivers: distinguibilità da effetto Collins;
  - analisi in flavor di dati HERMES → segno di funzione di Sivers;
  - analisi sistematica di dati HERMES+BNL+COMPASS
    - parametrizzazione per  $f_{1T}^{\perp q}$   $q=u,d$
  - teorema di Collins:  $f_{1T}^{\perp}(\text{SIDIS}) = - f_{1T}^{\perp}(\text{Drell-Yan})$
  - legame tra  $f_{1T}^{\perp}$  e GPD E
- GPD: introduzione intuitiva “diagrammatica”
  - cinematica DVCS
  - correlatore non locale e non diagonale
  - analisi a twist=2 → 8 GPD

# Analisi in twist del correlatore non diagonale

estrazione del contributo al leading twist procede come per PDF:

- proiezione delle componenti LC “good” con operatori  $\gamma^+$ ,  $\gamma^+\gamma_5$ ,  $i\sigma^{i+}\gamma_5$  integrando su direzione “-” soppressa

$$\begin{aligned}\Phi'[\gamma^+] &= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ix\bar{P}^+z^-} \langle P'S' | \bar{\psi} \left( -\frac{z^-}{2} \right) \gamma^+ \psi \left( \frac{z^-}{2} \right) | PS \rangle \Big|_{z^+=z_\perp=0} \\ &= \frac{1}{\bar{P}^+} \bar{u}(P'S') \left\{ \gamma^+ H(x, \xi, t) + \frac{i\sigma^{+\nu} \Delta_\nu}{2M} E(x, \xi, t) \right\} u(PS)\end{aligned}$$

q non polarizzato  
non helicity flip

$$\begin{aligned}\Phi'[\gamma^+\gamma_5] &= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ix\bar{P}^+z^-} \langle P'S' | \bar{\psi} \left( -\frac{z^-}{2} \right) \gamma^+\gamma_5 \psi \left( \frac{z^-}{2} \right) | PS \rangle \Big|_{z^+=z_\perp=0} \\ &= \frac{1}{\bar{P}^+} \bar{u}(P'S') \left\{ \gamma^+\gamma_5 \tilde{H}(x, \xi, t) + \frac{\gamma_5 \Delta^+}{2M} \tilde{E}(x, \xi, t) \right\} u(PS)\end{aligned}$$

q polarizzato long.  
non helicity flip

$$\begin{aligned}\Phi'[i\sigma^{i+}\gamma_5] &= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ix\bar{P}^+z^-} \langle P'S' | \bar{\psi} \left( -\frac{z^-}{2} \right) i\sigma^{i+}\gamma_5 \psi \left( \frac{z^-}{2} \right) | PS \rangle \Big|_{z^+=z_\perp=0} \\ &= \frac{i}{\bar{P}^+} \bar{u}(P'S') \left\{ \sigma^{i+}\gamma_5 H_T(x, \xi, t) + \frac{\epsilon^{i+\alpha\beta} \Delta_\alpha \bar{P}_\beta}{M^2} \tilde{H}_T(x, \xi, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon^{i+\alpha\beta} \Delta_\alpha \gamma_\beta}{2M} E_T(x, \xi, t) + \frac{\epsilon^{i+\alpha\beta} \bar{P}_\alpha \gamma_\beta}{M} \tilde{E}_T(x, \xi, t) \right\} u(PS)\end{aligned}$$

helicity flip

## Osservazioni :

- $S' \neq S$  : correlatore non diagonale nello spin  $\rightarrow$  helicity flip del N possibile  
 $\lambda_N \rightarrow x^2 \rightarrow$  n. raddoppia (quadruplica) per GPD che conservano (cambiano)  
 $\lambda_N \otimes \lambda_q \rightarrow x^4$  l'elicità del quark, rispetto al n. di PDF corrispondenti
- chiral-even  $E, \tilde{E}$  collegate a cambio di elicità nel N ma non nel quark  
 $\rightarrow$  possibile solo per effetto del momento angolare orbitale dei quark  
 $H_T, \hat{H}_T, E_T, \tilde{E}_T$  sono chiral-odd
- correlatore non diagonale  $\rightarrow$  le GPD non sono densità di probabilità, ma  
 ampiezze di interferenza tra due stati differenti  $\rightarrow$  non c'è immediata  
 interpretazione probabilistica al leading twist  
 (ma è possibile se GPD sono overlap di funzioni d'onda light-cone  $\leftrightarrow$  vedi  
 interpretazione intuitiva precedente)

- limite forward

$$H(x, 0, 0) = f_1(x)$$

$$\tilde{H}(x, 0, 0) = g_1(x)$$

$$H_T(x, 0, 0) = h_1(x)$$

- 1° momento di Mellin

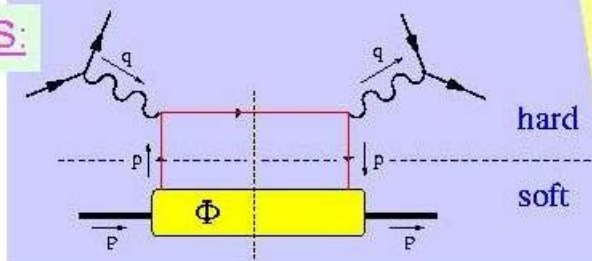
$$F_1(t) = \int dx H(x, \xi, t) \quad F_2(t) = \int dx E(x, \xi, t)$$

$$G_A(t) = \int dx \tilde{H}(x, \xi, t) \quad G_P(t) = \int dx \tilde{E}(x, \xi, t)$$

# comportamento “ibrido” delle GPD

bilocale diagonale

DIS:

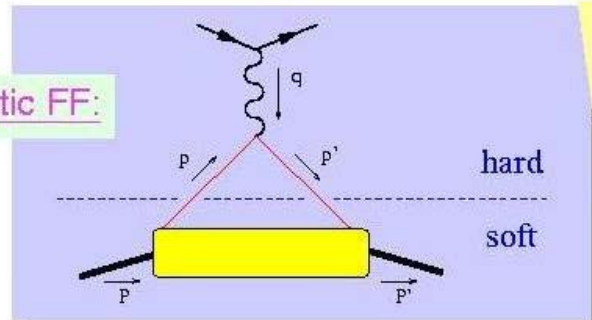


$$P^+ \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i p^+ z^-} \langle P, S | \bar{\psi}(\frac{-\bar{z}}{2}) \gamma^+ \psi(\frac{\bar{z}}{2}) | P, S \rangle$$

$$= \bar{u}(P, S) \gamma^+ u(P, S) q(x)$$

locale non diagonale

elastic FF:

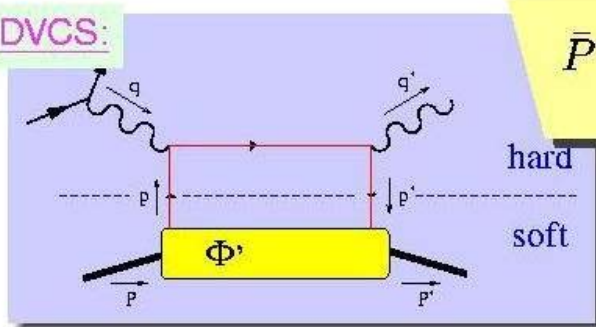


$$\langle P', S' | \bar{\psi}(0) \gamma^+ \psi(0) | P, S \rangle$$

$$= \bar{u}(P', S') \left\{ \gamma^+ F_1(t) + \frac{i \sigma^{+\nu} \Delta_\nu}{2M} F_2(t) \right\} u(P, S)$$

bilocale non diagonale

DVCS:

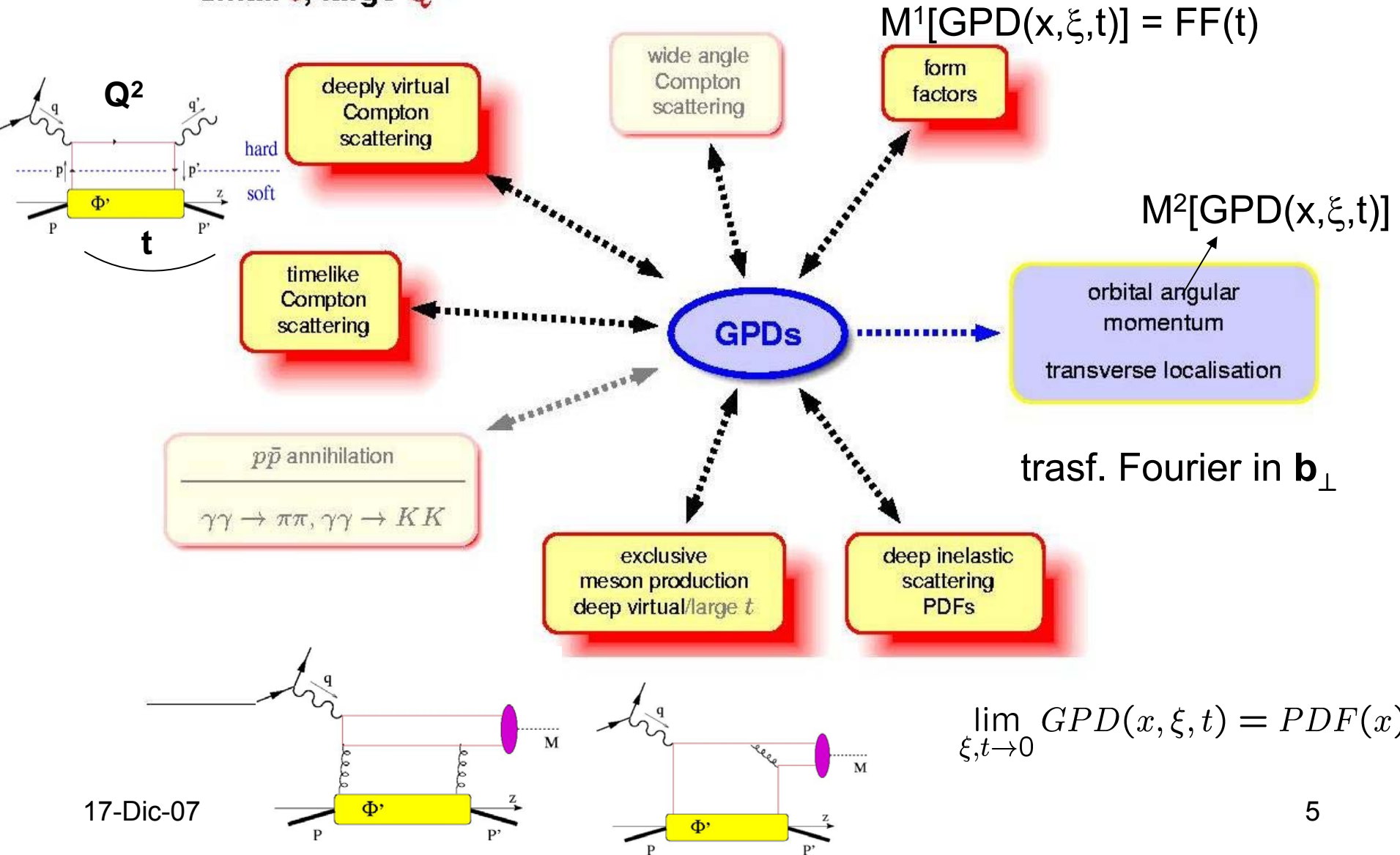


$$\bar{P}^+ \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i p^+ z^-} \langle P', S' | \bar{\psi}(\frac{-\bar{z}}{2}) \gamma^+ \psi(\frac{\bar{z}}{2}) | P, S \rangle$$

$$= \bar{u}(P', S') \left\{ \gamma^+ H(x, \xi, t) + \frac{i \sigma^{+\nu} \Delta_\nu}{2M} E(x, \xi, t) \right\} u(P, S)$$

# Mappa delle "interconnessioni" GPD in regime DVCS

small  $t$ , large  $Q^2$



# Localizzazione dei partoni

- $P' \neq P : \Delta (e \Delta_{\perp}) \neq 0$  quindi accesso alla dislocazione dei quark nel parametro di impatto  $\mathbf{b}_{\perp}$  sul piano  $\perp$  al momento "longitudinale"  $x$

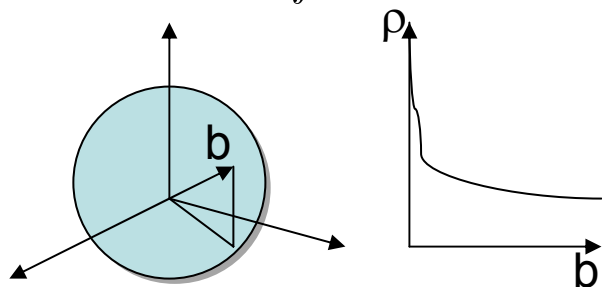
$$\Phi' = \int dz dz' e^{ip \cdot z - ip' \cdot z'} \dots \bar{\psi}(z') \dots \psi(z) \dots \rightarrow e^{i\bar{p} \cdot (z - z') + i\Delta \cdot \frac{z + z'}{2}} \dots$$

PDF,  $\Delta=0$  per invarianza traslazionale

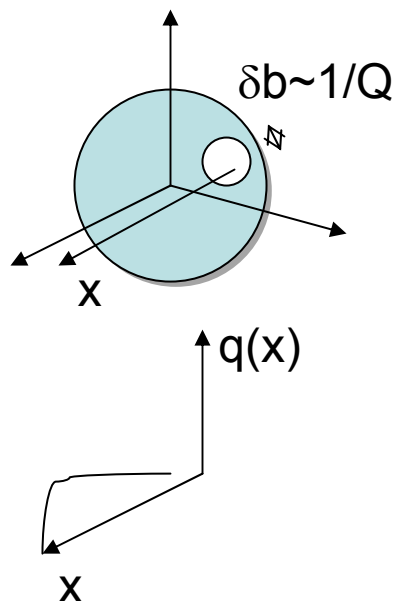
$\Delta \neq 0 \rightarrow b = (z + z')/2$   $\Delta_{\perp} \rightarrow \mathbf{b}_{\perp}$   
localizzazione 2d

fattore di forma  
 $\rightarrow$  distrib. 1-dim spaziale

$$F(t = \Delta^2) = \int d\vec{b} e^{i\vec{b} \cdot \vec{\Delta}} \rho(b)$$

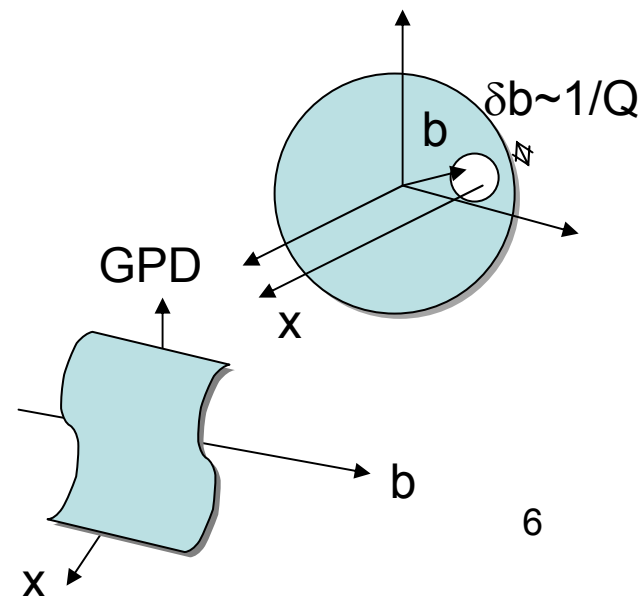


PDF  $\rightarrow$   
distrib. 1-dim in  $x$



GPD  $\rightarrow$  distrib. 3-dim in  $x, \mathbf{b}_{\perp}$

$$H(x, 0, t) = \int d\mathbf{b}_{\perp} e^{-i\Delta_{\perp} \cdot \mathbf{b}_{\perp}} f_1(x, \mathbf{b}_{\perp})$$



# Localizzazione trasversa 2d dei partoni

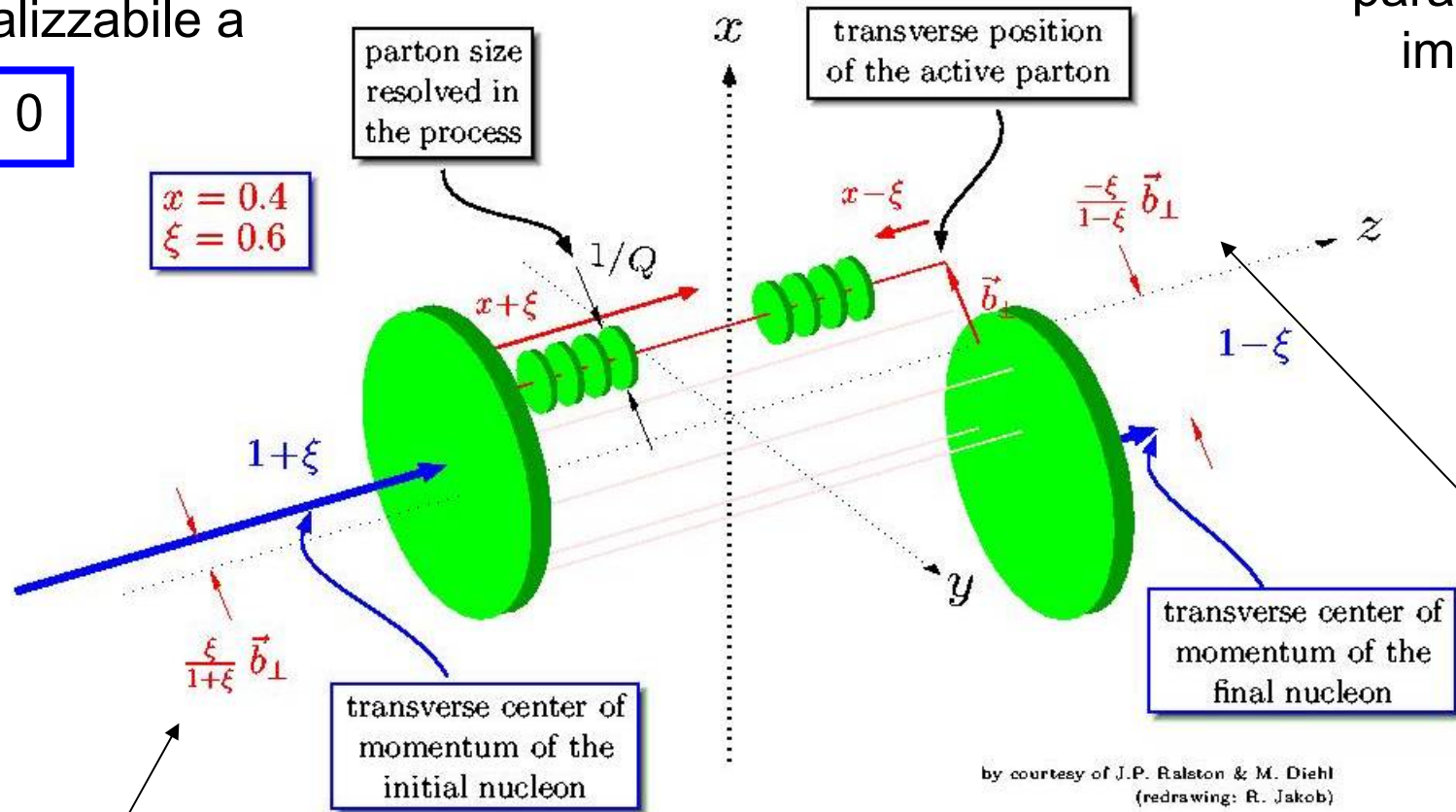
densita` di  
probabilita` nello  
spazio del  
parametro di  
impatto  $\mathbf{b}_\perp$

$$\xi = 0$$

$$H(x, \xi = 0, t = -\Delta_\perp^2) = \int d\mathbf{b}_\perp e^{-i\Delta_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp} f_1(x, \mathbf{b}_\perp)$$

generalizzabile a

$$\xi \neq 0$$



boost da "average frame"  
a sistema del N iniziale

boost da "average frame"  
a sistema del N finale

# Momentum sum rule per operatore locale twist=2 generico

$$\begin{aligned}
 \langle P' | \bar{q}(0) \gamma \cdot n q(0) | P \rangle &= \bar{u}_{P'} \gamma \cdot n u_P F_1(t) + \bar{u}_{P'} \frac{i\sigma^{\mu\nu} n_\mu \Delta_\nu}{2M} u_P F_2(t) \\
 &= \int dx \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda \cdot x} \langle P' | \bar{q}(-\lambda n/2) \gamma \cdot n U_{[-\lambda/2, \lambda/2]} q(\lambda n/2) | P \rangle \equiv M^1[\Phi'[\gamma^+]] \\
 &\equiv \bar{u}_{P'} \gamma \cdot n u_P \int dx H(x, \xi, t) + \bar{u}_{P'} \frac{i\sigma^{\mu\nu} n_\mu \Delta_\nu}{2M} u_P \int dx E(x, \xi, t) + \dots
 \end{aligned}$$

$$t = \Delta^2 = (P' - P)^2$$

$$n^\mu = (0, 1, 0_T)$$

Momento di Mellin (m+1)-esimo



$$\begin{aligned}
 M^{m+1}[\Phi'[\gamma^+]] &= \int dx x^m \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda \cdot x} \langle P' | \bar{q}(-\lambda n/2) \gamma \cdot n U_{[-\lambda/2, \lambda/2]} q(\lambda n/2) | P \rangle \\
 &= \underbrace{\langle P' | \bar{q}(0) \gamma \cdot n (-i\overleftrightarrow{D} \cdot n)^m q(0) | P \rangle}_{\text{}} \quad \begin{aligned} \overleftrightarrow{D} &= \frac{\vec{D} - \overleftarrow{D}}{2} \\ D &= \partial - ig A \end{aligned}
 \end{aligned}$$

prototipo di operatore più generale  $\hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_m}^\mu = \bar{q}(0) \gamma^\mu i\overleftrightarrow{D}^{\mu_1} \dots i\overleftrightarrow{D}^{\mu_m} q(0)$

similmente per  $\hat{A}_{\mu_1 \dots \mu_m}^\mu = \bar{q}(0) \gamma^\mu \gamma_5 i\overleftrightarrow{D}^{\mu_1} \dots i\overleftrightarrow{D}^{\mu_m} q(0)$   
etc ...



(continua)

decomposizione in fattori di forma generalizzati  
(invarianza per trasf. di Lorentz, parità e time-reversal)

$$\begin{aligned}\langle P' | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_m}^\mu | P \rangle &= \bar{u}(P') \gamma^\mu u(P) \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m A_{m+1,i}(t) \Delta^{\mu_1} \dots \Delta^{\mu_i} \bar{P}^{\mu_{i+1}} \dots \bar{P}^{\mu_m} \\ &+ \bar{u}(P') \frac{i\sigma^{\mu\nu} \Delta_\nu}{2M} u(P) \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m B_{m+1,i}(t) \Delta^{\mu_1} \dots \Delta^{\mu_i} \bar{P}^{\mu_{i+1}} \dots \bar{P}^{\mu_m} \\ &+ \bar{u}(P') u(P) \frac{\bar{P}^\mu}{M} \text{mod}(m, 2) C_{m+1}(t) \Delta^{\mu_1} \dots \Delta^{\mu_m} \Delta^{\mu_m+1}\end{aligned}$$

N.B. potenze pari di  $\Delta$  per invarianza time-reversal ( $P \leftrightarrow P' \Rightarrow \Delta \rightarrow -\Delta$ )

si sceglie vettore light-like  $n^\mu$  tale che  $n \cdot \bar{P} = 1$  ;  $n \cdot \Delta = -2\xi$

e si contraggono tutti gli indici

(continua)

$$n_\mu n_{\mu_1} \dots n_{\mu_m} \langle P' | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_m}^\mu | P \rangle =$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}(P') \gamma \cdot n u(P) \left[ \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m A_{m+1,i}(t) (2\xi)^i + \text{mod}(m, 2) C_{m+1}(t) (2\xi)^{m+1} \right] \\ & + \bar{u}(P') \frac{i\sigma^{\mu\nu} n_\mu \Delta_\nu}{2M} u(P) \left[ \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m B_{m+1,i}(t) (2\xi)^i - \text{mod}(m, 2) C_{m+1}(t) (2\xi)^{m+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{m+1}[\Phi'[\gamma^+]] &= \int dx x^m \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda \cdot x} \langle P' | \bar{q}(-\lambda n/2) \gamma \cdot n U_{[-\lambda/2, \lambda/2]} q(\lambda n/2) | P \rangle \\ &= \bar{u}_{P'} \gamma \cdot n u_P \int dx x^m H(x, \xi, t) + \bar{u}_{P'} \frac{i\sigma^{\mu\nu} n_\mu \Delta_\nu}{2M} u_P \int dx x^m E(x, \xi, t) \end{aligned}$$

N.B. per G si ottiene  $M^m \rightarrow M^{m-1}$  perché q & G si mischiano nell'evoluzione

## Polinomialità delle GPD

$$M_H^{m+1}(\xi, t) = \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m A_{m+1,i}(t) (2\xi)^i + \text{mod}(m, 2) C(t) (2\xi)^{m+1}$$

$$M_E^{m+1}(\xi, t) = \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m B_{m+1,i}(t) (2\xi)^i - \text{mod}(m, 2) C(t) (2\xi)^{m+1}$$

condizione stringente per i modelli, perché ottenuta da principi generali di invarianza

“D-term” con supporto in  
 $-\xi \leq x \leq \xi$   
cioè non accessibile a PDF

polinomialità di GPD offre soluzione a problema della “spin crisis”

# Regola di somma per momento angolare

elicità (PDF) definite in IFM (o su LC)  $\neq$  spin dei partoni di valenza

punto di partenza: definizione gauge invariante degli operatori in gioco

R.L. Jaffe e A. Manohar, N.P. **B337** (90) 509

X. Ji, J. Tang e P. Hoodboy, P.R.L. **76** (96) 740

densità d'energia-impulso  
(operatore locale)

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}}{\partial \partial_\mu q} \partial_\nu q - \delta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{QCD} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\
 &= \sum_q \bar{q} \gamma^\mu i D^\nu q + G^{\mu\alpha} G^\nu_\alpha + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} \\
 &= T_q^{\mu\nu} + T_G^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow P^\nu = \int d\mathbf{x} T^{0\nu} \quad \text{conservato}$$

densità momento angolare

$$M^{\lambda\mu\nu} = x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu} \quad \text{non locale}$$

operatore momento angolare

$$J^i = \epsilon^{ijk} \int d\mathbf{x} M^{0jk}$$

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = 0 \Rightarrow J^i_q, J^i_G \quad \text{conservato}$$

spin del protone  $\rightarrow$  elemento di matrice di componente di operatore  
momento angolare lungo z (o “+”) su stati di protone  
con 3<sup>a</sup> componente dello spin = 1/2 lungo z (o “+”)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \langle P_{\frac{1}{2}} | \hat{J}_z | P_{\frac{1}{2}} \rangle \equiv \langle P_{\frac{1}{2}} | \hat{J}_3 | P_{\frac{1}{2}} \rangle = \int d\mathbf{x} \langle P_{\frac{1}{2}} | M^{012}(x) | P_{\frac{1}{2}} \rangle \\ &= \int d\mathbf{x} \langle P_{\frac{1}{2}} | x_1 T^{02}(x) - x_2 T^{01}(x) | P_{\frac{1}{2}} \rangle \\ &= \int d\mathbf{x} \left[ x_1 \langle P_{\frac{1}{2}} | T^{02}(0) | P_{\frac{1}{2}} \rangle - x_2 \langle P_{\frac{1}{2}} | T^{01}(0) | P_{\frac{1}{2}} \rangle \right]\end{aligned}$$

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$   
invarianza traslazionale

$T^{\mu\nu}$  operatore locale a twist=2  $\rightarrow$  decomposizione per m=1

9

$$\begin{aligned}\langle P' | T^{\mu\nu} | P \rangle &= \bar{u}(P') \gamma^\mu u(P) A_{2,0}(t) \bar{P}^\nu + \bar{u}(P') \frac{i\sigma^{\mu\alpha} \Delta_\alpha}{2M} u(P) B_{2,0}(t) \bar{P}^\nu \\ &\quad + \bar{u}_{P'} u_P \frac{\bar{P}^\mu}{M} C_2(t) \Delta^\nu\end{aligned}$$

sia per q che G

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \langle P_{\frac{1}{2}} | \hat{J}_z | P_{\frac{1}{2}} \rangle = \frac{1}{2} [A_{20}(0) + B_{20}(0)] \equiv \frac{1}{2} [A(0) + B(0)] \\ &= \sum_q \frac{1}{2} [A_q(0) + B_q(0)] + \frac{1}{2} [A_G(0) + B_G(0)] \\ &= \sum_q \langle \hat{J}_z^q \rangle + \langle \hat{J}_z^G \rangle\end{aligned}$$



## Commenti



$$\begin{aligned}\langle P | \hat{P}^+ | P \rangle &= \int d\mathbf{x} \langle P | T^{0+} | P \rangle \propto A(0) P^+ \\ &= M^2 [\Phi[\gamma^+]] \propto P^+ \int_{-1}^1 dx x f_1(x)\end{aligned}$$

sia per q che G, cioè

$$\begin{aligned}\sum_q \int_{-1}^1 dx x f_1^q(x) + \int_0^1 dx G(x) &= \sum_q A_q(0) + A_G(0) \\ &= \sum_q \langle P_q^+ \rangle + \langle P_G^+ \rangle = 1\end{aligned}$$

frazione di momento portata  
da quark & gluoni  
A(0) generalizza  $F_1(0)$

$$\frac{1}{2} = \langle P_{\frac{1}{2}} | \hat{J}_z | P_{\frac{1}{2}} \rangle = \frac{1}{2} [A(0) + B(0)]$$

analogamente B(0)  
generalizza  $F_2(0)$

- analogamente  $T^{\mu\nu}$  fornisce la frazione di spin del protone portata da quark & gluoni
- ma non esiste esperimento per “rivelare”  $T^{\mu\nu}$  (tensore sensibile a sonda tensoriale: il gravitone?)
- come misurare spin dei costituenti? Soluzione: polinomialità delle GPD

(continua)

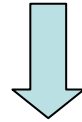
• per  $m=1$

11

$$M_H^2(\xi, t) = \int_{-1}^1 dx x H(x, \xi, t) = A_{2,0}(t) + C_2(t) (2\xi)^2$$

$$M_E^2(\xi, t) = \int_{-1}^1 dx x E(x, \xi, t) = B_{2,0}(t) - C_2(t) (2\xi)^2$$

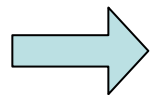
$M^2$  per  $q$  ;  
 $M^1$  per  $G$



$$\sum_q \int_{-1}^1 dx x [H^q(x, 0, 0) + E^q(x, 0, 0)] + \int_0^1 dx [H^G(x, 0, 0) + E^G(x, 0, 0)]$$

$$\equiv \sum_q \int_{-1}^1 dx x [f_1^q(x) + E^q(x, 0, 0)] + \int_0^1 dx [f_1^G(x) + E^G(x, 0, 0)]$$

$$= \sum_{i=q,G} A_i(0) + B_i(0) = 2 \left[ \sum_q \langle \hat{J}_z^q \rangle + \langle \hat{J}_z^G \rangle \right] = A(0) + B(0) = 2 \langle P_{\frac{1}{2}} | \hat{J}_z | P_{\frac{1}{2}} \rangle$$



DIS non polarizzato  $ep \rightarrow e'X$  ( $\rightarrow f_1$ ) +

DVCS “ “  $ep \rightarrow e' \gamma p'$  ( $\rightarrow E$  ma convoluzione più difficile)

permettono in linea di principio di decomporre lo spin  $\frac{1}{2}$  del  $p$   
in termini di momento angolare totale dei partoni



si deduce anche  $\sum_{i=q,G} B_i(0) = 0$

# Come varia il peso relativo di $J_q$ e $J_G$ ?

- tutte le definizioni precedenti dipendono da scala di rinormalizzazione  $\mu$
- operatori  $\hat{O}$  ed el. matrice  $\langle \hat{O} \rangle$  dallo stesso  $T^{\mu\nu} \rightarrow$  stessa evoluzione
- $\int dx$  non cambia comportamento a corto raggio (QCD)  $\rightarrow$  evoluzione DGLAP

Equazioni di evoluzione (al LO)

$$\frac{\partial}{\partial \log \mu^2} \begin{pmatrix} J_q(\mu) \\ J_G(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{qq} & \gamma_{qG} \\ \gamma_{Gq} & \gamma_{GG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_q(\mu) \\ J_G(\mu) \end{pmatrix}$$

matrice delle dimensioni anomale; al LO

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16 & 3n_f \\ 16 & -3n_f \end{pmatrix}$$

soluzione per  $\mu \rightarrow \infty$   $\left\{ \begin{array}{l} J_q^\infty = \frac{1}{2} \frac{3n_f}{16+3n_f} \\ J_G^\infty = \frac{1}{2} \frac{16}{16+3n_f} \end{array} \right.$  cioè  $J_q \sim J_G$  per  $n_f=5$

altri risultati :  $\mu=1$  GeV  $J_G \sim 0.25$  da QCD sum rules  
 $\mu=0.5$  GeV  $J_G \sim 0.24$  da quark models



# Come isolare contributo di momento angolare orbitale?

si dimostra la seguente decomposizione gauge invariante: Ji, P.R.L. **78** ('97) 610

$$\hat{J}_z = \int d\mathbf{x} M^{012} = \epsilon^{ij3} \int d\mathbf{x} [x_i T_q^{0j} + x_i T_G^{0j}] = \hat{J}_z^q + \hat{J}_z^G$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_z^q &= \int d\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma_0 \gamma_3 \gamma_5 \psi + \epsilon^{ij3} \psi^\dagger x_i \times (-iD_j) \psi \right] \\ &= \int d\mathbf{x} \left[ \psi^\dagger \frac{\Sigma_3}{2} \psi + \epsilon^{ij3} \psi^\dagger x_i \times (-iD_j) \psi \right] \equiv \hat{S}_z^q + \hat{L}_z^q \end{aligned}$$

$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$   
operatore elicità

$$\hat{J}_z^G = \epsilon^{ij3} \int d\mathbf{x} x_i \times \underbrace{(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_j}_{\substack{\text{vettore di Poynting del campo di colore} \\ \text{= densità di momento della radiazione}}}$$

$E^i = F^{i0}$   
 $B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ilm} F_{lm}$   
 $\mathbf{D} = \nabla + ig\mathbf{A}$

densità di momento angolare della radiazione

Prendendo elementi di matrice degli operatori sopra su stati  $|P^{1/2}\rangle$  di protone con  $P_z=P$  e  $S_z=1/2$  alla scala di rinormalizzazione  $\mu^2$  abbiamo

$$\frac{1}{2} = \langle \hat{J}_z \rangle \big|_{\mu^2} = \sum_q \langle \hat{J}_z^q \rangle \big|_{\mu^2} + \langle \hat{J}_z^G \rangle \big|_{\mu^2} = \frac{1}{2} \Delta\Sigma(\mu^2) + \sum_q L_z^q(\mu^2) + J_z^G(\mu^2)$$

## Regola di somma di spin?

$$\frac{1}{2} = \langle \hat{J}_z \rangle \Big|_{\mu^2} = \sum_q \langle \hat{J}_z^q \rangle \Big|_{\mu^2} + \langle \hat{J}_z^G \rangle \Big|_{\mu^2} = \frac{1}{2} \Delta\Sigma(\mu^2) + \sum_q L_z^q(\mu^2) + J_z^G(\mu^2)$$

- anomalia  $U_A(1)$  mischia elicità dei q ( $\Delta\Sigma$ ) con quella dei G a NLO  
→ separazione dipendente da schema oltre che da  $\mu^2$
- la relazione operatoriale (da cui scende la regola di cui sopra) è una regola di somma se gli elementi di matrice di operatori locali su stati  $|P^{1/2}\rangle$  possono essere rappresentati come momenti di Mellin di distribuzioni misurate in processi anelastici sugli stessi stati  $|P^{1/2}\rangle$  e con gli stessi operatori di corrente

Verifica: q  $\Delta\Sigma(\mu^2) = \sum_q \int_{-1}^1 dx g_1^q(x, \mu^2) = \sum_q \langle PS | \bar{q} \gamma^+ \gamma_5 q | PS \rangle \Big|_{\mu^2}$

$\rightarrow \int dx \int dz^- e^{ixP^+z^-} \langle PS | \bar{\psi}(0) \gamma^+ \gamma_5 \psi(z^-) | PS \rangle \Big|_{\mu^2}$   
 $\rightarrow \int dx x \int dz^- e^{ixP^+z^-} \langle PS | \bar{\psi}(0) \gamma^+ \psi(z^-) | PS \rangle \Big|_{\mu^2}$

$$\sum_q J_z^q(\mu^2) = \frac{1}{2} \sum_q [A_q(0) + B_q(0)]_{\mu^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx x \left[ f_1^q(x, \mu^2) + E^q(x, 0, 0, \mu^2) \right]$$

$$\int dx x \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ix\bar{P}^+z^-} \langle P'S' | \bar{\psi}\left(-\frac{z^-}{2}\right) \gamma^+ \psi\left(\frac{z^-}{2}\right) | PS \rangle \Big|_{z^+=z_\perp=0}$$



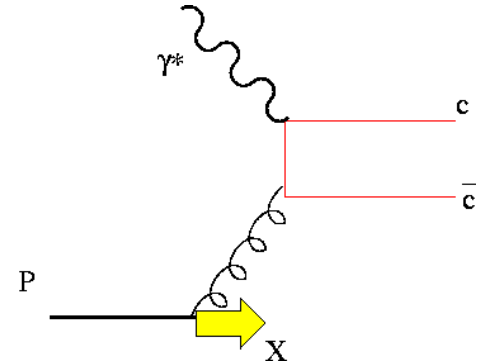
# Momento angolare orbitale

si definisce per differenza

$$\begin{aligned}\sum_q L_z^q(\mu^2) &= \sum_q J_z^q(\mu^2) - \frac{1}{2} \Delta\Sigma(\mu^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_q \int_{-1}^1 dx \left[ x f_1^q(x, \mu^2) + x E^q(x, 0, 0, \mu^2) - g_1^q(x, \mu^2) \right] \\ &\equiv \int_{-1}^1 dx L_z^q(x, \mu^2)\end{aligned}$$

È possibile estrarre l'elicità del gluone  $\Delta G(x)$  da  
 $e+p \rightarrow D+X$  attraverso meccanismo di  $\gamma$ -G fusion  
 (COMPASS); quindi alla scala  $\mu^2$

$$J_z^G \Big|_{\mu^2} = \Delta G(\mu^2) + L_z^G(\mu^2)$$



$$\Delta G(\mu^2) = \int_0^1 dx \Delta G(x, \mu^2) \quad \text{è una regola di somma, perché}$$

$$J_z^G(\mu^2) = \frac{1}{2} [A_G(0) + B_G(0)] = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[ G(x, \mu^2) + E^G(x, 0, 0, \mu^2) \right]$$

quindi, analogamente

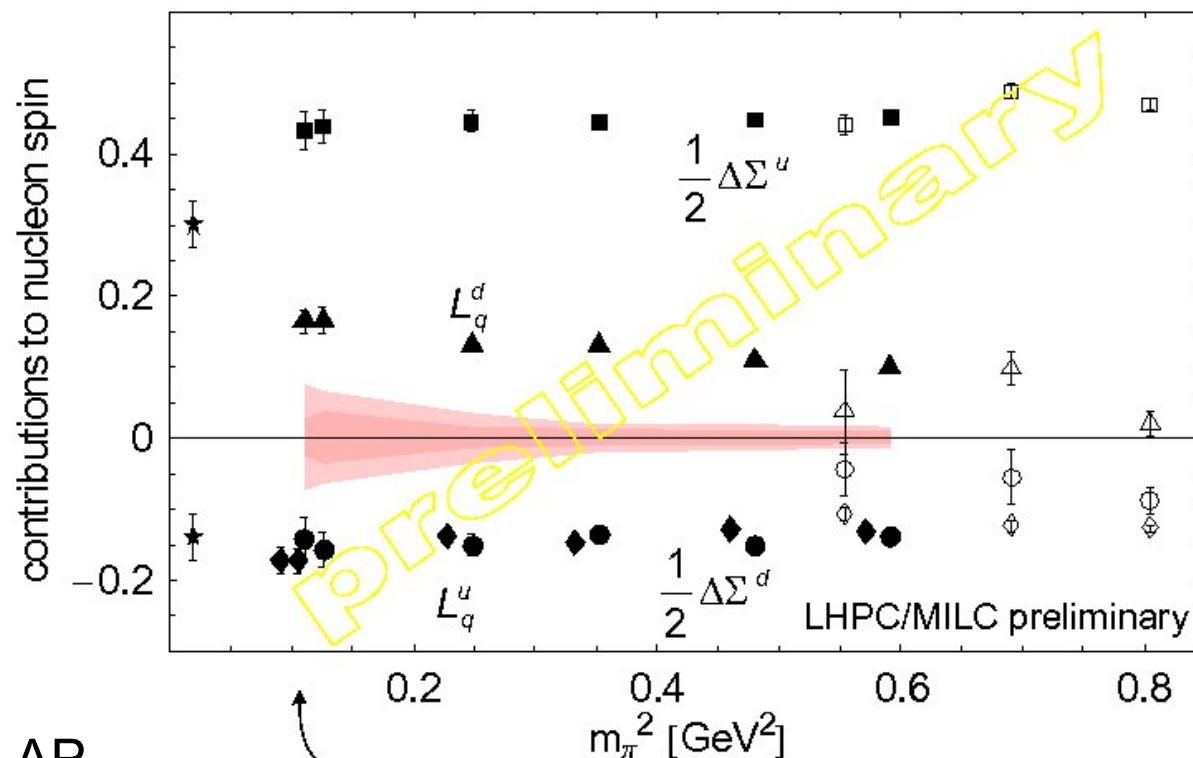
$$L_z^G(\mu^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[ G(x, \mu^2) + E^G(x, 0, 0, \mu^2) - \Delta G(x, \mu^2) \right] \equiv \int_0^1 dx L_z^G(x, \mu^2)$$

(continua)

in sintesi la regola di decomposizione dello spin del protone si può scrivere in modo gauge invariante alla scala di rinormalizzazione  $\mu^2$  come

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Delta\Sigma(\mu^2) + L_q(\mu^2) + \Delta G(\mu^2) + L_g(\mu^2)$$

P. Haegler  
QCD N '06



l'evoluzione DGLAP  
mischia le varie componenti



17-Dic-07

at  $m_\pi \approx 350 \text{ MeV}$

quenched

$$L_q^d \approx -L_q^u \approx 30\% \text{ of } \frac{1}{2}$$