


Riassunto della lezione precedente

struttura generale di simmetria
dello spettro di mesoni e barioni
→ modello a quark costituenti

evidenza sperimentale di struttura
elementare interna del protone
→ modello a partoni

quark confinati  partoni quasi liberi

coupling che cambia con la scala di energia
quale teoria ?

invarianza per gruppo abeliano di trasformazioni locali di gauge → QED

invarianza per gruppo non abeliano di trasformazioni locali di gauge → QCD

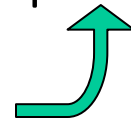


campi di gauge interagiscono con se stessi
→ vertici trilineari e quadrilineari; conseguenze ?

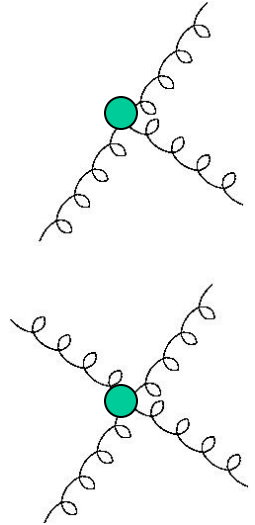
Peculiarità di teoria di gauge non abeliana

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu D_\mu - m] \psi(x) - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^i)^2$$

$$\left. \begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ [t^a, t^b] &= i f^{abc} t^c \end{aligned} \right\}$$



accoppiamenti
trilineari e
quadrilineari
dettati dal
gruppo
di simmetria



Quali conseguenze?

Eq. di “Maxwell” per campi vettoriali

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QCD}}}{\partial A_\mu^a} = \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{QCD}}}{\partial \partial_\nu A_\mu^a} \longrightarrow \partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A^{\mu b} F_{\mu\nu}^c = -g \bar{\psi} \gamma_\nu t^a \psi$$



per $\nu = 0$ analogo della legge di Gauss per carica di colore a distribuita
con densità ρ^a che genera un campo elettrico $E_i^a = F_{0i}^a$

$$\partial_i E_i^a = g \rho^a + g f^{abc} A_i^b E_i^c$$



densità di carica puntiforme di colore a =1

$$\partial_i E_i^1 = g \delta(\vec{x}) \delta_{a1} \quad A_i^2$$

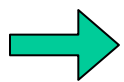
fluttuazione di vuoto

$$\partial_i E_i^3 = g f^{321} A_i^2 E_i^1$$

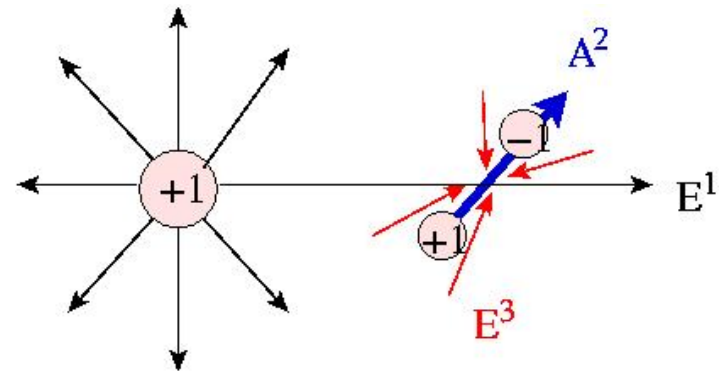
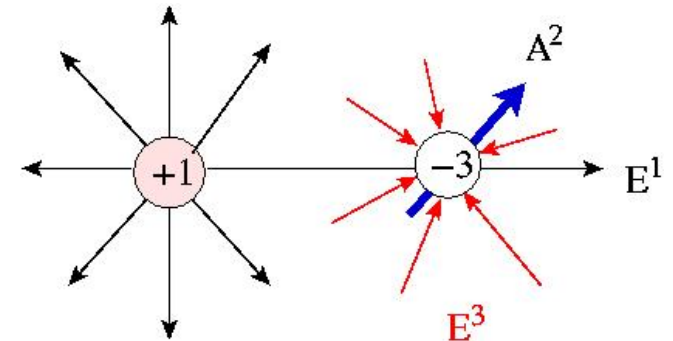
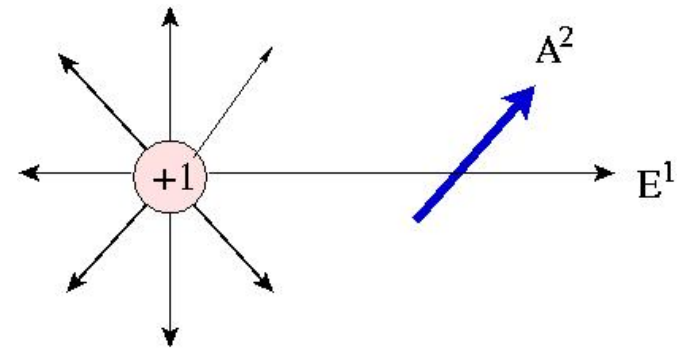
“risucchio” del campo E^3

$$\partial_i E_i^1 = g \delta(\vec{x}) \delta_{a1} + g f^{123} A_i^2 E_i^3$$

$$\left. \begin{array}{l} > 0 \quad \vec{A}^2 \parallel \vec{E}^3 \\ < 0 \quad \vec{A}^2 \parallel^{-1} \vec{E}^3 \end{array} \right\} \text{dipolo di carica } a=1 \text{ orientato verso sorgente}$$



allontanandosi dalla sorgente si vede carica a =1 più forte → antiscreening



QED

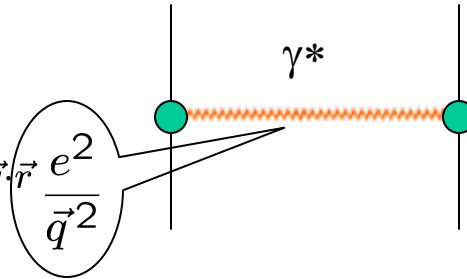
parallelo

QCD

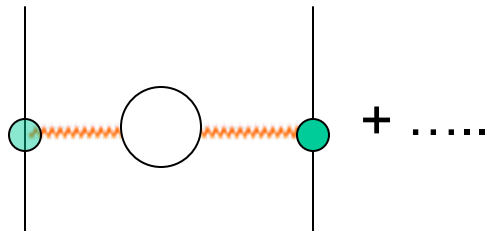
potenziale Coulombiano

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{|\vec{r}|}$$

$$= \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{\vec{q}^2}$$



correzioni
perturbative



non separabili sperimentalmente

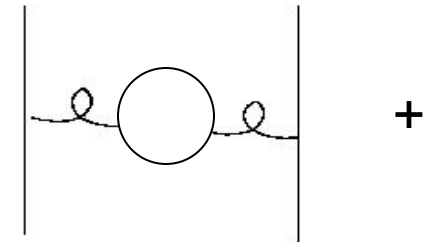
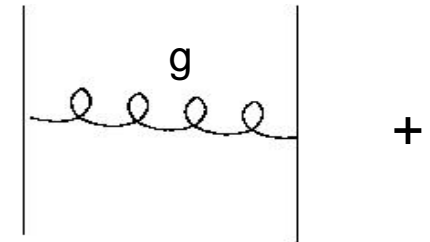
→ chi è $V(\mathbf{r})$? Chi è e ?

Alla scala \mathbf{q}_0 definisco $\hat{V}(\vec{q}_0) \doteq \frac{e^2}{\vec{q}_0^2}$

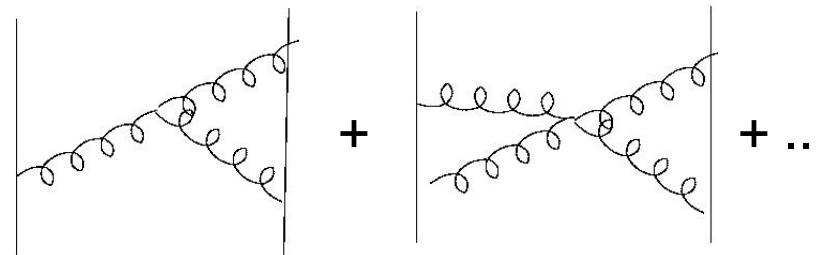
→ $e^2(\vec{q}^2)$

screening

potenziale di colore



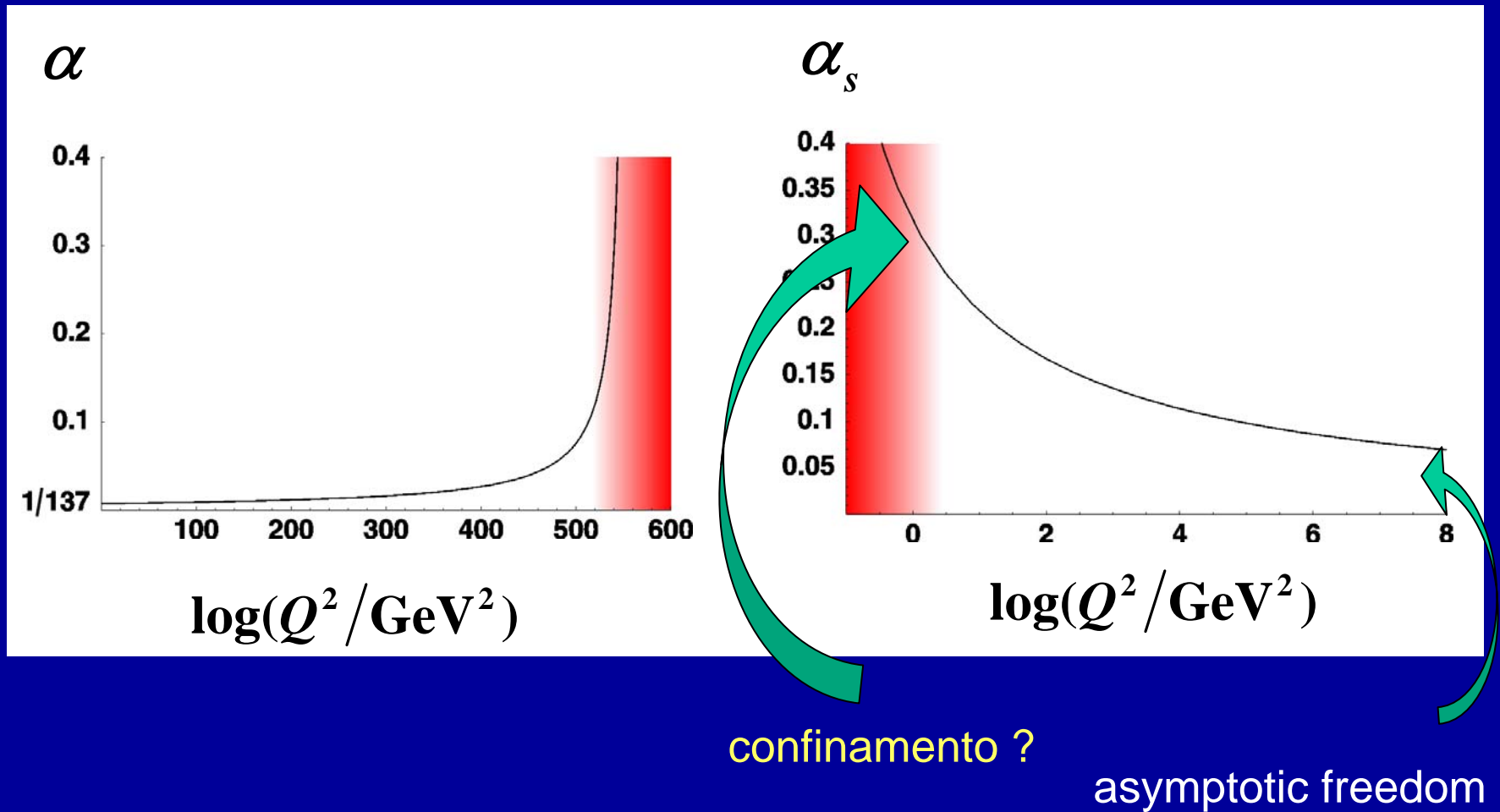
screening



antiscreening (>>)

QED \rightarrow screening

QCD \rightarrow screening + antiscreening ($>>$)



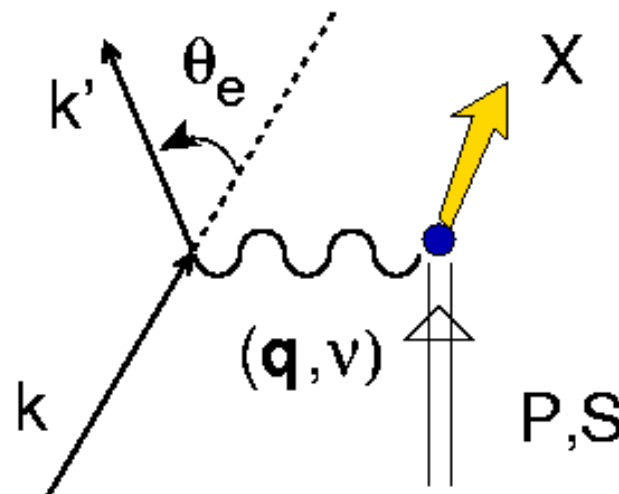
| correzioni pQCD | | 1 | $\log \alpha_s$ | $\log^2 \alpha_s$ | ... |
|--------------------------|------------------|-----|-----------------|-------------------|-----|
| correzioni di potenze | 1 | QPM | → | IQPM | → |
| | 1/Q | | | | |
| | 1/Q ² | ↓ | | | |
| | 1/Q ³ | | | | |
| | ... | | | | |
| | | | | | |

| | | | |
|------------|------------------------------|----|----------------------------|
| Diffusione | leptone | -- | adrone |
| | (elettrone, neutrino, muone) | | (nucleone, nucleo, fotone) |

- Quantum ElectroDynamics (QED) nota ad ogni ordine
- sonda leptonica esplora tutto il volume del bersaglio
- $\alpha_{em} \sim$ costante struttura fine piccola \rightarrow sviluppo perturbativo possibile
- approssimazione di Born (scambio di un fotone solo) e` accettabile
- fotone virtuale (γ^*): (\mathbf{q} , ν) indipendenti, risposta longitudinale e trasversa rispetto alla polarizzazione di γ^*

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

prototipo
 $e+p \rightarrow e'+X$



3 vettori indipendenti
 k, k', P
 + lo spin S
 θ_e angolo di diffusione

definizioni e cinematica

e^- ultrarelativistico $m_e \ll |\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|$

Target Rest Frame (TRF)

$$P = (M, \mathbf{0})$$

$$k = (\sqrt{m_e^2 + |\mathbf{k}|^2}, 0, 0, |\mathbf{k}|) \\ \sim (E, 0, 0, E)$$

$$k' = (\sqrt{m_e^2 + |\mathbf{k}'|^2}, |\mathbf{k}'| \sin \theta_e, 0, |\mathbf{k}'| \cos \theta_e) \\ \sim (E', E' \sin \theta_e, 0, E' \cos \theta_e)$$

$$q = k - k' = (E - E', \mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Invarianti cinematici

$$P^2 = M^2 \quad ; \quad S^2 = 1 \quad ; \quad P \cdot S = 0$$

$$k^2 = k'^2 = m_e^2 \sim 0$$

$$q^2 \sim -2EE'(1 - \cos \theta_e) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \leq 0$$

$$\implies Q^2 \equiv -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \geq 0$$

Invarianti cinematici (continua)

$$\nu = \frac{P \cdot q}{M} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{M(E - E')}{M} = E - E' \quad \text{energia trasferita}$$

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{M(E - E')}{ME} = \frac{E - E'}{E} \quad \text{frazione di energia trasferita}$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$x_B = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{Q^2}{2M\nu}$$

$$0 \leq x_B \leq 1$$

limite elastico

limite anelastico

massa invariante finale

$$W = (P + q)^2 = M^2 + Q^2 \left(\frac{1}{x_B} - 1 \right) \geq M^2$$

Scelta alternativa : 3 vettori indipendenti $P, (k+k'), (k-k') \equiv q$

Invarianti : $P^2 = M^2$; $(k-k')^2 = q^2 \equiv -Q^2$; $(k+k')^2 \sim Q^2$

$$P \cdot q \stackrel{\text{TRF}}{=} M\nu$$

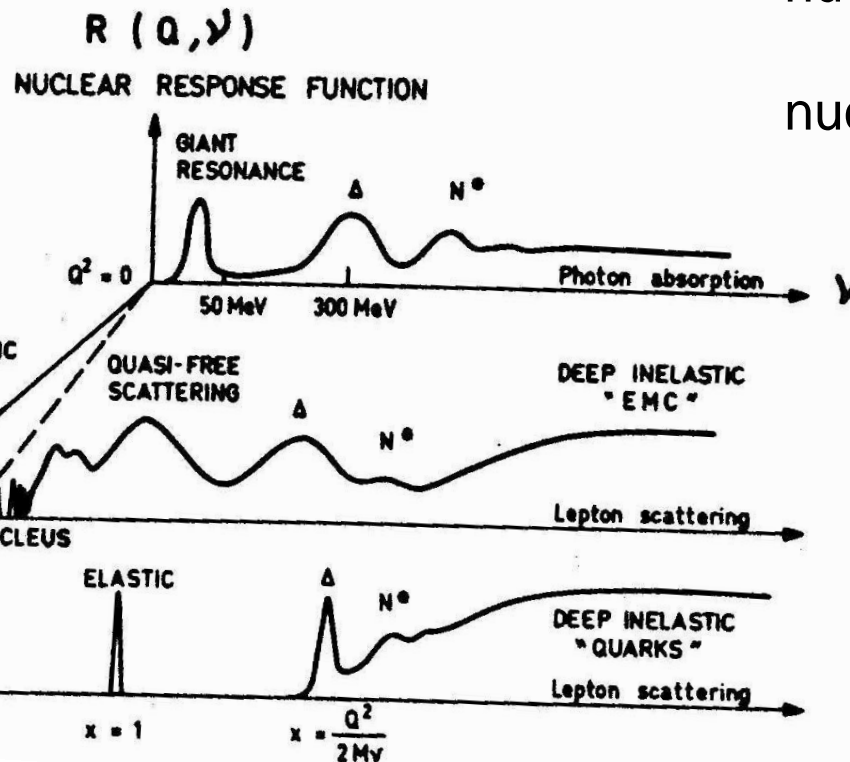
$$P \cdot (k + k') = 2P \cdot k - P \cdot q \stackrel{\text{TRF}}{=} \left(\frac{2}{y} - 1\right) M\nu$$

Q e` la “lente di ingrandimento”

| Q [GeV] | $\lambda \sim 1/Q$ [fm] | bersaglio |
|---------|-------------------------|------------------|
| 0.02 | 10 | nuclei |
| 0.1 | 2 | |
| 0.2 | 1 | mesoni / barioni |
| 1 | 0.2 | partoni |
| | | ?? |

N.B. $1 \text{ fm} = (200 \text{ MeV})^{-1}$

Frois, Nucl. Phys. **A434** ('85) 57c



$$\text{nucleo } M_A \quad x_A = \frac{Q^2}{2M_A \nu}$$

$$\text{nucleone } M \quad x_B = \frac{Q^2}{2M \nu}$$

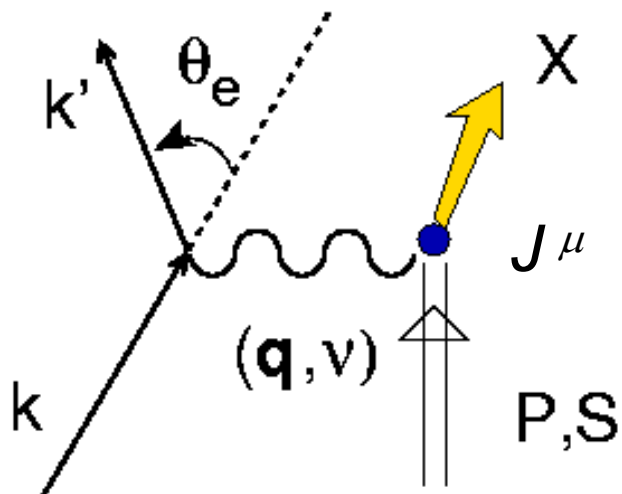
area proibita $\nu \leq \frac{Q^2}{2M_A}$



Sezione d'urto

n° eventi per unità di tempo, diffusore, angolo solido

n° particelle incidenti per unità di tempo, superficie



$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{F}} |\mathcal{M}|^2 dR$$

flusso

$$\mathcal{F} = 4\sqrt{(P \cdot k)^2 - P^2 k^2} \stackrel{\text{TRF}}{=} 4ME$$

spazio fasi

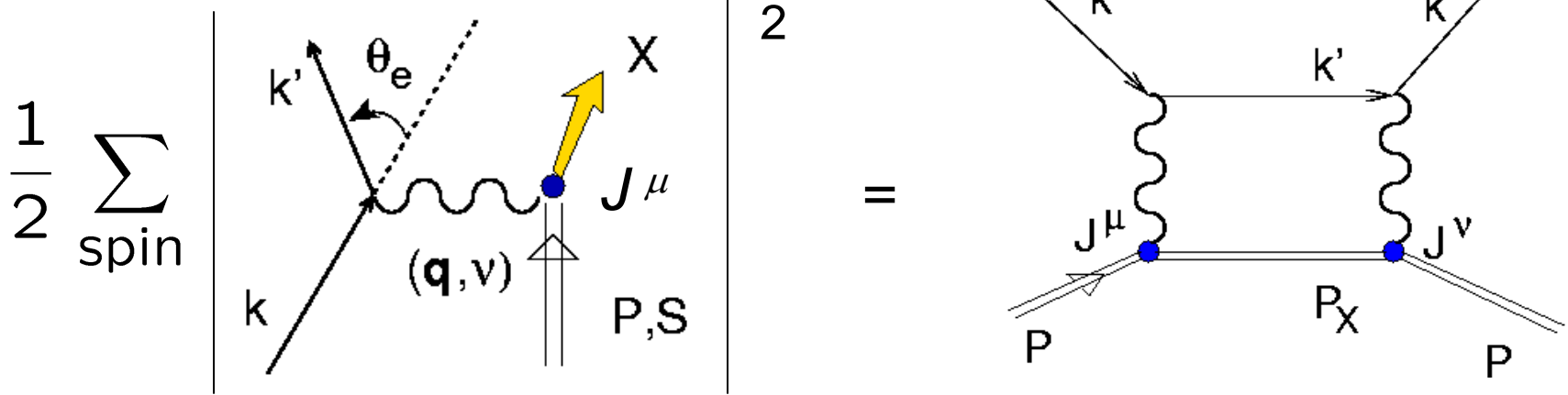
$$dR = (2\pi)^4 \delta(P + q - P_X) \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2E'}$$

$$\frac{E' dE' d\Omega}{16\pi^3}$$

ampiezza scattering

$$\mathcal{M} = \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \frac{e^2}{Q^2} \langle P_X | J^\mu(0) | P, S \rangle$$

Tensore adronico



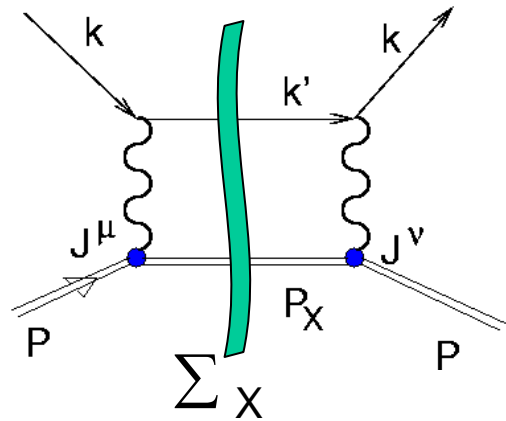
$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$$



tensore leptónico $L^{\mu\nu} = 2k^\mu k'^\nu + 2k^\nu k'^\mu - Q^2 g^{\mu\nu}$

tensore adronico $H^{\mu\nu} = \langle P | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | P \rangle$

Scattering inclusivo



tensore adronico

$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \sum_X \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(P+q-P_X) H^{\mu\nu}$$

sezione d'urto per scattering inclusivo (formula generale)



$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{E'}{E} \frac{\alpha^2}{Q^4} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

$$Q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2}$$

grandi angoli soppressi !

Scattering inclusivo elastico

$$\sum_X \dots |P_X\rangle \langle P_X| \dots = \dots |P'\rangle \langle P'| \dots \quad W' = (P+q)^2 = M^2$$

tensore
 adronico

$$\begin{aligned}
 2MW^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \sum_X \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(P+q-P_X) H^{\mu\nu} \\
 &= \delta((P+q)^2 - M^2) H^{\mu\nu} = \delta(2P \cdot q - Q^2) H^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$



$$\stackrel{\text{TRF}}{=} \delta(2M\nu - Q^2) H^{\mu\nu} = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) H^{\mu\nu}$$

$\nu \leftrightarrow Q$: concetto di scaling

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{E'}{E} \frac{\alpha^2}{4M^2 Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

vari
casi

$$\int dE' \frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \frac{\alpha^2}{4M^2 Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$$

Bersaglio = particella scalare libera

$$H^{\mu\nu} = \langle P | J^\mu | P' \rangle \langle P' | J^\nu | P \rangle$$

2 vettori indipendenti : $R=P+P'$, $q=P-P'$ $\rightarrow J^\mu \approx F_1 R^\mu + F_2 q^\mu$

$$F_{1,2}(q^2, P^2, P'^2) = F_{1,2}(q^2)$$

conservazione della corrente $q_\mu J^\mu = 0 \rightarrow F_2(q^2) = -\frac{R \cdot q}{q^2} F_1(q^2)$

definizione : $\tilde{P}^\mu = R^\mu - \frac{R \cdot q}{q^2} q^\mu \rightarrow J^\mu = \tilde{P}^\mu F_1(Q^2)$

N.B. per particella on-shell $q \cdot R = 0$; ma in generale per off-shell $q \cdot \tilde{P} = 0$

$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} = \left(2k \cdot \tilde{P} k' \cdot \tilde{P} - \tilde{P}^2 k \cdot k' \right) 2 |F_1(Q^2)|^2$$

$$\stackrel{\text{TRF}}{\sim} 16 E E' M^2 |F_1(Q^2)|^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2}$$



Scattering inclusivo elastico su particella scalare libera

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} E'^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \frac{E'}{E} |F_1(Q^2)|^2 \equiv \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} |F_1(Q^2)|^2$$



Coulomb scattering elastico da
particella puntiforme

rinculo
bersaglio

struttura
bersaglio

Breit frame \rightarrow fattore di forma

$$\mathbf{P} = -\mathbf{q}/2$$



$$\mathbf{P}' = +\mathbf{q}/2$$

$$v = 0$$

$$R^\mu = (2E, \mathbf{0})$$

$$q^\mu = (0, \mathbf{q})$$

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{0}) \rightarrow 2E F_1(Q^2)$$



$$F_1(Q^2) \equiv F_1(|\mathbf{q}|^2) = \int d\mathbf{r} \, \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

↑
fattore di forma di
carica
materia
.....

↑
distribuzione di
carica
materia
.....

Bersaglio = particella di Dirac libera puntiforme

Esempio: $e^- + \mu^- \rightarrow e^{-'} + \mu^-$

$$J^\mu = \bar{u}(P') \gamma^\mu u(P)$$

$$H^{\mu\nu} \equiv L^{\mu\nu} \quad \text{with } k^{(\prime)} \leftrightarrow P^{(\prime)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\not{P}' + M) \gamma^\mu (\not{P} + M) \gamma^\nu \right] \\ &= 2 \left[P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - (P \cdot P' - M^2) g^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \stackrel{\text{TRF}}{=} 16EE'M^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left(1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right)$$

interazione
magnetica di
spin con γ^*

Bersaglio = particella di Dirac libera con struttura

3 vettori indipendenti $P^\mu, P'^\mu, \gamma^\mu$ (+ invarianza per time-reversal, parità)

$$J^\mu = \bar{u}(P') \Gamma^\mu u(P) = \bar{u}(P') \left[\Gamma_1 P^\mu + \Gamma_2 P'^\mu + \Gamma_3 \gamma^\mu \right] u(P)$$

$$\Gamma_i(Q^2, P^2, P'^2) \equiv \Gamma_i(Q^2)$$

conservazione della corrente $q_\mu J^\mu = 0$

$$\begin{aligned} q_\mu \bar{u}(P') \Gamma^\mu u(P) &= \\ &= \bar{u}(P') \left[\Gamma_1 P \cdot (P' - P) + \Gamma_2 P' \cdot (P' - P) + \Gamma_3 \gamma \cdot (P' - P) \right] u(P) \\ &= \bar{u}(P') \left[(P \cdot P' - M^2) (\Gamma_1 - \Gamma_2) + \Gamma_3 (\not{P}' - \not{P}) \right] u(P) = 0 \\ &\Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2 \end{aligned}$$

$$J^\mu = \bar{u}(P') \left[\Gamma_1(Q^2) R^\mu + \Gamma_3(Q^2) \gamma^\mu \right] u(P)$$

eq. di Dirac
 $\not{P} u = M u$
 $\bar{u} \not{P} = \bar{u} M$

Decomposizione di Gordon (on-shell)

$$J^\mu = \bar{u}(P') \left[\Gamma_1(Q^2) R^\mu + \Gamma_3(Q^2) \gamma^\mu \right] u(P)$$

$$\bar{u} \gamma^\mu u = \bar{u} \left[\frac{R^\mu}{2M} + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u \quad \text{with } \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

cioe' $R^\mu \leftrightarrow 2M \gamma^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$



proof flow-chart

- da destra, inserire def. di $\sigma^{\mu\nu}$
- usare eq. di Dirac
- usare $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu}$
- usare eq. Dirac \rightarrow sinistra

$$J^\mu = \bar{u}(P') \left[F_1(Q^2) \gamma^\mu + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(Q^2) \right] u(P)$$

| | | |
|-------------------------------|-------------------|-------------------|
| $F_1 = 2M\Gamma_1 + \Gamma_3$ | Dirac form factor | $F_1(0) = 1$ |
| $F_2 = -2M\Gamma_1$ | Pauli form factor | $F_2(0) = \kappa$ |

Bersaglio = particella di Dirac libera e composita

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} H^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\not{p}' + M) \Gamma^\mu (\not{p} + M) \Gamma^\nu \right]$$

$$\Gamma^\mu = F_1 \gamma^\mu + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2$$

.....

Sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left[\left(F_1^2 + \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) + \frac{Q^2}{2M^2} (F_1 + F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \delta \left(\nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[\underbrace{\left(F_1^2 + \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right)}_{\text{struttura interna}} + \underbrace{\frac{Q^2}{2M^2} (F_1 + F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2}}_{\text{struttura interna}} \right]$$

struttura interna
(difficilmente separabile)

Formula di Rosenbluth

Definizione fattori
di forma di Sachs

(Yennie, 1957)

$$G_E(Q^2) = F_1(Q^2) - \tau F_2(Q^2)$$

$$G_M(Q^2) = F_1(Q^2) + F_2(Q^2)$$

$$\text{with } \tau = \frac{Q^2}{4M^2}$$

N.B.: infatti, in Breit frame + riduzione nonrel. \rightarrow

$$J^0 \sim G_E$$
$$\mathbf{J} \sim \frac{G_M}{2M} \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}$$

distribuzione di carica/magnetica
del bersaglio



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$
$$\equiv \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

separazione piu` facile

Separazione di Rosenbluth

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

- larghi θ_e (larghi Q^2) \rightarrow estrarre G_M
- piccoli θ_e (piccoli Q^2) \rightarrow estrarre G_E per differenza
- Rosenbluth plot



$$\epsilon (1 + \tau) \frac{E}{E'} \frac{1}{\sigma_{\text{Mott}}} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \epsilon G_E^2 + \tau G_M^2$$

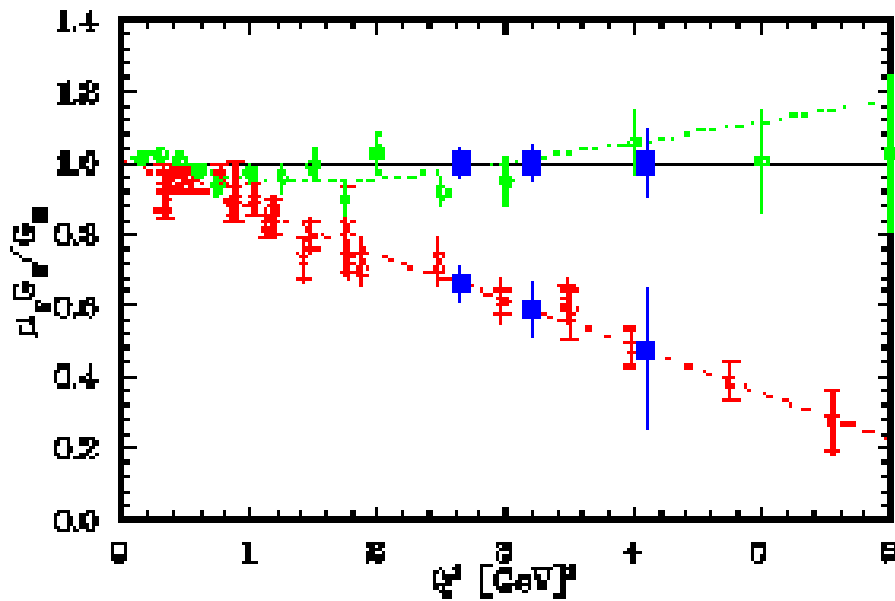
$$\epsilon = \left[1 + 2(1 + \tau) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]^{-1}$$

polarizz. trasversa lineare di γ^*

misure con diverse $(E, \theta_e) \rightarrow$ plot in ϵ a fisso Q^2

intercetta a $\epsilon = 0 \rightarrow G_M$

pendenza in $\epsilon \rightarrow G_E$



Rosenbluth plot

$$\mu_p \frac{G_E^p}{G_M^p} \rightarrow \text{cost}$$



$$F_2 \sim \frac{F_1}{Q^2}$$

pQCD scaling

JLAB data

(ottenuti con e^- scattering
e doppia polarizzazione
→ più precisi)



$$F_2 \sim \frac{F_1}{Q}$$

$Q^2 \lesssim 10 \text{ (GeV/c)}^2$ ancora regime
non perturbativo

