Riassunto lezione precedente

- Evidenza spettroscopica di multipletti quasi degeneri; organizzabili in gruppi separati secondo simmetria SU(2) di isospin, con lieve rottura di degenerazione per interazione elettromagnetica; necessità di introdurre nuovo numero quantico stranezza S per raccordare questi gruppi

- secondo SU(3) mesoni organizzati in nonetti pseudoscalari e vettoriali; barioni organizzati in ottetto e decupletto a parità + e singoletto a parità –; nello spettro, ad alta energia segnali di rottura di una simmetria legata a P (simmetria chirale?)

- Gell-Mann & Zweig (‘63): ipotesi di simmetria a livello più basso, basata su struttura più elementare, i quarks; si giustificano osservazioni spettroscopiche, ma non si evidenzia mai il tripletto di SU(3): i quark sono reali?

- cenni di teoria dei gruppi: il caso SU(2), le matrici di Pauli; definizione e proprietà dei generatori di SU(N); operatore di Casimir e classificazione dei multipletti.

SU(2) : esempio isospin

rappresentazione fondamentale a dim. 2: I=½ C = ¾ doppietto p (I_3=+½)
n (I_3=-½)

rappresentazione regolare a dim. 2^2-1=3: I=1 C = 2 tripletto $\pi^\pm$ (I_3=±1)
π^0 (I_3=0)

Hamiltoniana $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{str} + \mathcal{H}_{em}$

indipendenza della forza forte dalla carica ➔ invarianza per iso-rotazioni
$[\ \mathcal{H}_{str}\ ,\ I_i\ ] = 0$ i=1,2,3
degenerazione multipletti

operatore di carica $Q = \frac{1}{2} B + I_3$ ➔ $[\ \mathcal{H}_{em}\ ,\ I_i\ ] \neq 0$
rottura (piccola) della degenerazione
simmetria di isospin è approssimata

SU(2) : rappresentazione coniugata

rappresentazione fondamentale a dim. 2

$$\chi = \begin{vmatrix} u \\ d \end{vmatrix} = u(I_3 = +\tfrac{1}{2}) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + d(I_3 = -\tfrac{1}{2}) \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Ex: isospin u = p , d = n

rappresentazione coniugata 2* $\quad \phi = \begin{vmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} I_3 = +\tfrac{1}{2} \\ I_3 = -\tfrac{1}{2} \end{matrix}$

Ex: $\bar{p}$, $\bar{n}$

trasformazione per iso-rotazione θ intorno a ŷ

$$\begin{aligned} \chi' &= U\,\chi \\ U &\equiv e^{\frac{1}{2}i\theta\hat{\mathbf{y}}\cdot\tau} \end{aligned}$$

N.B. matrici di Pauli **σ** = **τ** per isospin

se rappresentazione coniugata definita come $\phi = \begin{vmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{vmatrix} \Rightarrow \phi' = U\,\phi$

cioè rappresentazioni $2 \Leftrightarrow 2^*$

in generale $N \not\Leftrightarrow N^*$

SU(2) : rappresentazione regolare

rappresentazione fondamentale dim. 2: generatori **σ**, algebra $\left[\frac{1}{2}\sigma_i\,,\,\frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\,\frac{1}{2}\sigma_k$

per SU(N) rappresentazione fondamentale ha dim. N e generatori matrici NxN

rappresentazione regolare ha dim. = nr. dei generatori = N^2-1

per N=2 dim. =3, generatori **S** sono matrici 3x3 con algebra $[S_i\,,\,S_j] = i\varepsilon_{ijk}\,S_k$

rappresentazione più comune

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

S_3 diagonale: base canonica $|\pi^+ > \equiv \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\,,\,|\pi^0 > \equiv \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\,,\,|\pi^- > \equiv \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

base “iso-vettoriale” $|\pi_1 > = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\pi^+ > - |\pi^- >\right)\,,\,|\pi_2 > = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|\pi^+ > + |\pi^- >\right)\,,\,|\pi_3 > \equiv |\pi^0 >$

costruzione della rappresentazione attraverso costanti di struttura dell’algebra:

$$<\pi_j \,|\, S_i \,|\, \pi_k> = -\, i\, \varepsilon_{ijk}$$

vale in generale per SU(N) con M generatori

SU(3) : proprietà generali

gruppo delle trasformazioni unitarie U tali per cui χ' = Uχ

$$\chi = \begin{vmatrix} u \\ d \\ s \end{vmatrix}$$

U sono matrici unitarie 3x3 del tipo $U = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\lambda}$

8 generatori della trasformazione: 8 matrici 3x3 hermitiane a traccia nulla
le matrici di Gell-Mann λ

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sottogruppo SU(2) di isospin
"I – spin" su (u,d)

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sottogruppo "V – spin" su (u,s)

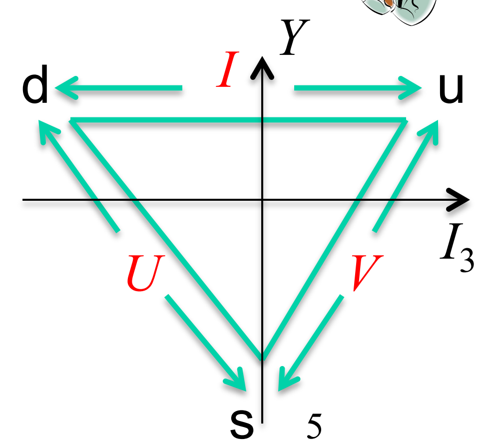
$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

sottogruppo "U – spin" su (d,s)

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

operatore isospin ½ λ_3

operatore ipercarica $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\lambda_8$



SU(3) : classificazione multipletti e operatore di Casimir

definiamo $F_i = \frac{1}{2}\lambda_i$. Algebra: $[F_i, F_j] = i\, f_{ijk}\, F_k$, $\{F_i, F_j\} = 4/3\, \delta_{ij} + 4\, d_{ijk}\, F_k$

costanti di SU(3):

$f_{123}=1$, $f_{458}=f_{678}= \sqrt{3}/2$

$f_{147}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{516}=f_{637}= \frac{1}{2}$

$d_{118}=d_{228}=d_{338}=-d_{888}= 1/\sqrt{3}$

$d_{146}=d_{157}=d_{256}=d_{344}=d_{355}= \frac{1}{2}$

$d_{247}=d_{366}=d_{377}= -\frac{1}{2}$

$d_{448}=d_{558}=d_{668}=d_{778}= -1/2\sqrt{3}$

operatore di Casimir

SU(2): $I_i = \frac{1}{2}\,\sigma_i$ $\qquad C = (\boldsymbol{I})^2 = \frac{1}{2}\,(I_+ I_- + I_- I_+) + (I_3)^2 = \frac{1}{2}\,\{I_+, I_-\} + (I_3)^2$

SU(3): $F_i = \frac{1}{2}\,\lambda_i$ $\qquad C = (\mathbf{F})^2 = \Sigma_{i=1}{}^8\, F_i F_i = \frac{1}{2}\,\{I_+, I_-\} + \frac{1}{2}\,\{V_+, V_-\} + \frac{1}{2}\,\{U_+, U_-\} + (F_3)^2 + (F_8)^2$

$I_\pm = F_1 \pm i\, F_2$
$V_\pm = F_4 \pm i\, F_5$
$U_\pm = F_6 \pm i\, F_7$

autovalore di C è $\frac{1}{3}\,(p^2+pq+q^2)+(p+q)$ $\quad p,q\ \varepsilon\ \mathbf{N}_+$

dim.	(p,q)	F^2
1	(0,0)	0
3	(1,0)	4/3
$\bar{3}$	(0,1)	4/3
8	(1,1)	3
6	(2,0)	10/3
10	(3,0)	6

$3 \not\Leftrightarrow 3^*$ because of Y

Quarks e rappresentazioni SU(N)

supponiamo barioni = {qqq} e mesoni = {$q\bar{q}$}

sapore	up u	down d	strange s
nr. barionico B	⅓	⅓	⅓
isospin I	½	½	0
I_3	+½	-½	0
ipercarica Y	⅓	⅓	-⅔
carica Q	+⅔	-⅓	-⅓
stranezza S	0	0	-1

Y = B+S

Q = I_3+½Y

servono almeno 2 flavors
u,d per distinguere p da n

gruppo $SU(2)_I$

servono almeno 3 flavors
u,d,s per distinguere p da Σ^+

gruppo $SU(3)_f$

Spettro barionico e simmetria degli stati

barioni = {qqq}   q = u,d,s (per ora non importa ordine: uds ⇔ dsu ⇔ sud…)

quark	simmetria	carica	stranezza	stati
uuu	S	2	0	Δ^{++}
uud	S M	1	0	Δ^{+} p
udd	S M	0	0	Δ^{0} n
ddd	S	-1	0	Δ^{-}
uus	S M	1	-1	Σ^{+} Σ^{*+}
uds	S M M A	0	-1	Σ^{0} Σ^{*0} Λ^{0} Λ
dds	S M	-1	-1	Σ^{-} Σ^{*-}
uss	S M	0	-2	Ξ^{0} Ξ^{*0}
dss	S M	-1	-2	Ξ^{-} Ξ^{*-}
sss	S	-1	-3	Ω^{-}

come distinguere ?

p da Δ^{+} ←

n da Δ^{0} ←

…. ←

…. ←

…. ←

…. ←

…. ←

ora ordine conta: dato {qqq} con q=u,d,s si può sempre costruire un S → 10

dato {qqq'} o {qq'q''} si può avere simm. mista M → 8 ({qq'q''} ha 2 "modi" diversi → M M)

dato {qq'q''} si può avere un A ({qq'q''}=-{q'qq''} per ogni coppia) → 1

Rappresentazioni di SU(2)

Rappresentazione fondamentale (dim. 2): $|\chi\rangle = \begin{vmatrix} u \\ d \end{vmatrix}$

2 oggetti : $|\chi_1>$, $|\chi_2>$

$\|\chi_1>$	$\|\chi_2>$	scambio 1 <-> 2	
u	u	uu	
u	d	$1/\sqrt{2}$ (ud+du)	$1/\sqrt{2}$ (ud-du)
d	u		
d	d	dd	
		S	A

$|S_1\ S_{1z}\ ;\ S_2\ S_{2z} > \ \Leftrightarrow\ |S\ S_z >$

$|½\ ½\ ;\ ½\ ½ > \ \Leftrightarrow\ |1\ 1 >$

$1/\sqrt{2}\ [\ |½\ ½\ ;\ ½\ -½ > + |½\ -½\ ;\ ½\ ½ >\ ] \ \Leftrightarrow\ |1\ 0 >$

$1/\sqrt{2}\ [\ |½\ ½\ ;\ ½\ -½ > - |½\ -½\ ;\ ½\ ½ >\ ] \ \Leftrightarrow\ |0\ 0 >$

$|½\ -½\ ;\ ½\ -½ > \ \Leftrightarrow\ |1\ -1 >$

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3}_S \oplus \mathbf{1}_A$$

notazione di teoria di gruppo

Ex: $S_1 = ½$ $S_2 = ½$ ➔ S = 1 o 0

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \otimes \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}_S \oplus \mathbf{0}_A$$

3 oggetti : $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$, $|x_3\rangle$

$|x_1\rangle|x_2\rangle|x_3\rangle$	**scambio 1 ⇔ 2**			S_z
uuu	uuu			3/2
uud, udu, duu	1/√3 (uud+udu+duu)	1/√2 (ud-du)u	1/√6 [(ud+du)u - 2 uud]	½
udd, dud, ddu	1/√3 (udd+dud+ddu)	1/√2 (ud-du)d	-1/√6 [(ud+du)d - 2 ddu]	-½
ddd	ddd			-3/2
	S	M_A	M_S	

antisimmetrico in 1⇔2 ma non definito negli altri

simmetrico

Ex: $S_1 = ½$ $S_2 = ½$ $S_3 = ½$ ➔ $(S_{12} = 1 \;\; S_3 = ½)$ + $(S_{12} = 0 \;\; S_3 = ½)$

➔ $S = 3/2$ o $½_S$ + $S = ½_A$

$$\left(\tfrac{1}{2} \otimes \tfrac{1}{2}\right) \otimes \tfrac{1}{2} = \mathbf{1} \otimes \tfrac{1}{2} + \mathbf{0} \otimes \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}_S \oplus \tfrac{1}{2}_S \oplus \tfrac{1}{2}_A$$

$$(\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) \otimes \mathbf{2} = (\mathbf{3} \otimes \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1} \otimes \mathbf{2}) = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M_S} \oplus \mathbf{2}_{M_A}$$

Rappresentazioni di SU(3)

Rappresentazione fondamentale (dim. 3):

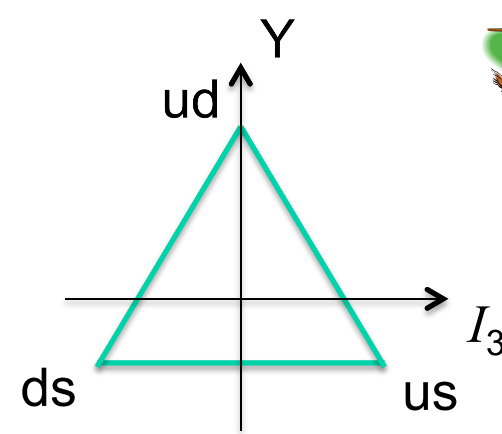
$$|\chi\rangle = \begin{vmatrix} u \\ d \\ s \end{vmatrix}$$

2 oggetti : $|\chi_1\rangle$, $|\chi_2\rangle$

$\lvert\chi_1\rangle$	$\lvert\chi_2\rangle$	scambio 1 <-> 2	
u	u	uu	
u	d	1/√2 (ud+du)	1/√2 (ud-du)
d	u		
d	d	dd	
u	s	1/√2 (us+su)	1/√2 (us-su)
s	u		
d	s	1/√2 (ds+sd)	1/√2 (ds-sd)
s	d		
s	s	ss	
		S	A

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \quad \mathbf{6}_S \oplus \overline{\mathbf{3}}_A$$

stati A sono $\overline{3}$ perché



3 oggetti : $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$, $|x_3\rangle$

$\lvert x_1\rangle \lvert x_2\rangle \lvert x_3\rangle$	scambio 1 ⇔ 2				spettro
uuu	uuu				Δ^{++}
uud, udu, duu	1/√3 (uud+udu+duu)	1/√6 [(ud+du)u-2uud]	1/√2 (ud-du)u		Δ^{+}(S) p(M)
udd, dud, ddu	1/√3 (udd+dud+ddu)	-1/√6 [(ud+du)d-2ddu]	1/√2 (ud-du)d		Δ^{0}(S) n(M)
ddd	ddd				Δ^{-}
uus, usu, suu	1/√3 (uus+usu+suu)	1/√6 [(us+su)u-2uus]	1/√2 (us-su)u		Σ^{*+}(S) Σ^{+}(M)
uds	1/√6 (uds+usd+dus +sud+dsu+sdu)	1/2√3 [s(du+ud) + usd+dsu-2(du+ud)s]	1/2 [(usd+dsu) - s(ud+du)]	1/√6 [s(du-ud) + usd–dsu + (du-ud)s]	Σ^{*0}(S) Σ^{0}(M) Λ_{1405}(A)
		1/2 [(dsu-usd) + s(ud-du)]	1/2√3 [s(du-ud) + usd-dsu-2(du-ud)s]		Λ^{0}(M)
dds, dsd, sdd	1/√3 (dds+dsd+sdd)	1/√6 [(ds+sd)d-2dds]	1/√2 (ds-sd)d		Σ^{*-}(S) Σ^{-}(M)
ssu, sus, uss	1/√3 (ssu+sus+uss)	-1/√6 [(us+su)s-2ssu]	1/√2 (us-su)s		Ξ^{*0}(S) Ξ^{0}(M)
ssd, sds, dss	1/√3 (ssd+sds+dss)	-1/√6 [(ds+sd)s-2ssd]	1/√2 (ds-sd)s		Ξ^{*-}(S) Ξ^{-}(M)
sss	sss				Ω^{-}(S)
	S	M_S	M_A	A	

$$(\mathbf{3}\otimes\mathbf{3})\otimes\mathbf{3} = (\mathbf{6}\oplus\overline{\mathbf{3}})\otimes\mathbf{3} = (\mathbf{10}_S\oplus\mathbf{8}_{M_S})\oplus(\mathbf{8}_{M_A}\oplus\mathbf{1}_A)$$

SU(N) e i tableaux di Young

SU(2): $|\chi_1\rangle$, $|\chi_2\rangle$

$|\chi_1\rangle$, $|\chi_2\rangle$, $|\chi_3\rangle$

SU(3): $|\chi_1\rangle$, $|\chi_2\rangle$

$|\chi_1\rangle$, $|\chi_2\rangle$, $|\chi_3\rangle$

SU(6): $|\chi_1\rangle$, $|\chi_2\rangle$, $|\chi_3\rangle \otimes (\uparrow, \downarrow)$

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3}_S \oplus \mathbf{1}_A$$
$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M_S} \oplus \mathbf{2}_{M_A}$$
$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6}_S \oplus \overline{\mathbf{3}}_A$$
$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_{M_S} \oplus \mathbf{8}_{M_A} \oplus \mathbf{1}_A$$
$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{56}_S \oplus \mathbf{70}_{M_S} \oplus \mathbf{70}_{M_A} \oplus \mathbf{20}_A$$

….

c'è una procedura automatica per calcolare le dimensioni delle rappresentazioni irriducibili?

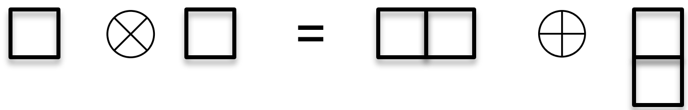
I tableaux di Young

identificazione rappresentazioni di **SU(N)**

rappresentazione fondamentale N a dim.N = $\square$

rappresentazione coniugata N* = $\left.\begin{array}{c}\square\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \square\end{array}\right\}$ N-1 quadrati

tableaux di Young: prodotto di rappresentazioni



N N = ? ?

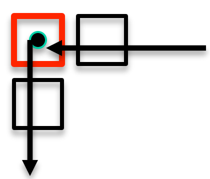
come calcolare le dimensioni delle rappresentazioni prodotto?

dimensioni = $\dfrac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}}$

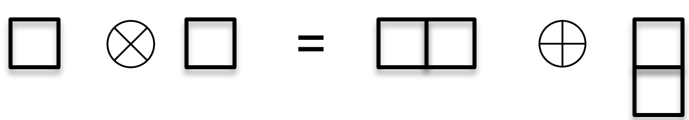
numeratore =

N	N+1	N+2
N-1	N	N+1
N-2	N-1	N
N-3		

= prodotto dei numeri in tutte le caselle

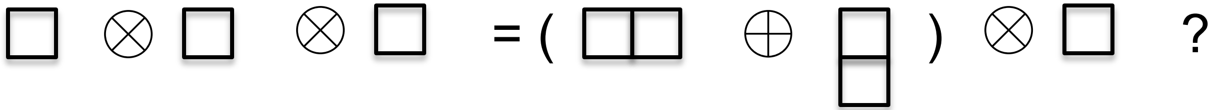
"gancio" =  = nr. di caselle attraversate

denominatore = prodotto dei "ganci" di tutte le caselle

quindi dim.  $= \dfrac{N(N+1)}{2} \oplus \dfrac{N(N-1)}{2}$ 

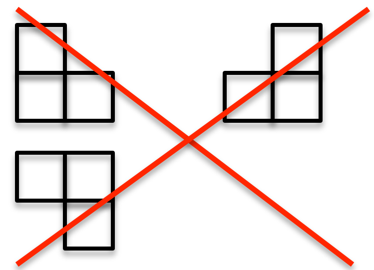
stato S A

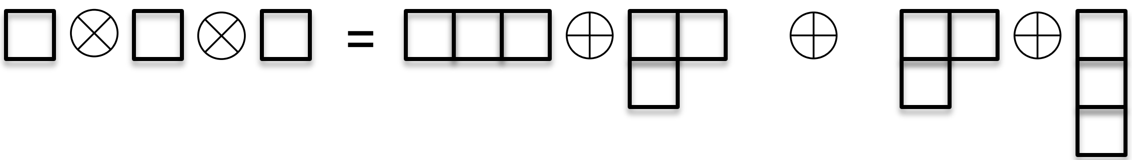
continua



si combinano le caselle in tutti i modi purché

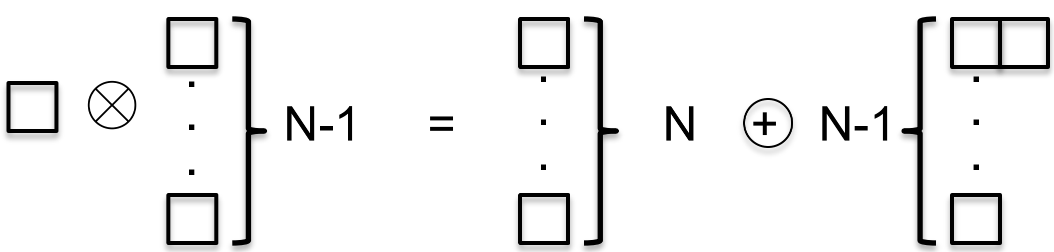
- no figure concave verso l'alto
- no figure concave verso il basso a sinistra





$$N \otimes N \otimes N = \frac{N(N+1)(N+2)}{6} \oplus \frac{(N-1)N(N+1)}{3} \oplus \frac{(N-1)N(N+1)}{3} \oplus \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$$

per strutture mesoniche, cioè "quarkonio"



$$N \otimes N^* = 1 \oplus (N^2 - 1)$$